Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 539.3 : 538.54

А. Л. Радовинский

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматриваются свойства задачи динамики тонких упругих электропроводящих оболочек в произвольных электромагнитных полях. На основании нелинейных уравнений [1], полученных асимптотическим интегрированием по толщине уравнений теории упругости и уравнений Максвелла (в квазистационарном приближении), выводится выражение для функционала мощности, определяющее баланс мощностей в исследуемом процессе. Формулируется полная система естественных граничных условий задачи. Для двух основных задач электромеханики тонких упругих оболочек [1], уравнения которых линейны и могут быть получены из исходных уравнений без потери точности, выводятся условия ортогональности собственных решений, выражающие соответствующие формулировки теоремы взаимности. Рассматривается вопрос о разложении решений возникающих при этом неоднородных задач по собственным решениям.

Вопросы баланса энергии и единственности решений в первой линейной задаче (магнитоупругости) рассмотрены также в работах [2, 3].

1. Будем считать, что в окружающем оболочку бесконечном пространстве V задана триортогональная система координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, в которой оболочку можно рассматривать как математический разрез по ее срединной поверхности S. Пусть S лежит на координатной поверхности $\alpha_3 = 0$ и либо замкнута, либо ограничена замкнутой линией G, совпадающей с краем оболочки. Свойства окружающей среды отождествим со свойствами вакуума. Оболочку примем упругой, немагнитной и обладающей конечной электрической проводимостью.

Решение задачи о малых вынужденных упругих колебаниях такой оболочки в произвольном, вообще говоря, переменном во времени электромагнитном поле состоит в совместном интегрировании уравнений

$$\begin{gathered} 2EhL\mathbf{u} - \mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(p)} - \mathbf{X}^{(m)} = 0 \quad \text{на} \quad S \\ \gamma\Delta_s F + B_3^{\cdot} - \operatorname{rot}_3(\mathbf{u}^{\cdot} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \text{на} \quad S \\ \Delta\Phi = 0 \ \text{в} \ V \end{gathered} \tag{1.1}$$

с выполнением условия

$$(\partial\Phi/\partial\alpha_3)_s^+ = (\partial\Phi/\partial\alpha_3)_s^- \tag{1.2}$$

Здесь

$$\mathbf{X}^{(i)} = -2\rho h\mathbf{u}^{\cdot\cdot}, \quad \mathbf{X}^{(p)} = -\mu_1^{-1}(\operatorname{grad}_s F \times \mathbf{i}_3) \times \mathbf{B} \tag{1.3}$$

— векторы сил инерции ($\mathbf{X}^{(i)}$) и пондеромоторных сил ($\mathbf{X}^{(p)}$), $\mathbf{X}^{(m)}$ — вектор активных сил механического происхождения.

$$\begin{gathered} \mathbf{B} = \mathbf{B}^{\circ} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = {}^1/_2\,[(\operatorname{grad}\Phi)_s^+ + (\operatorname{grad}\Phi)_s^-] \\ F = (\Phi)_s^+ - (\Phi)_s^- \end{gathered} \tag{1.4}$$

— формулы, связывающие значения на поверхности S векторов: полной магнитной индукции ($\mathbf{B}$), заданной магнитной индукции сторонних источников ($\mathbf{B}^\circ$) и магнитной индукции вихревых токов ($\mathfrak{f}$), Φ — потенциал магнитной индукции $\mathfrak{b}$ вихревых токов (определяемой в V выражением $\mathfrak{b} = \operatorname{grad} \Phi$), F — перепад потенциала Φ на S, $\mathbf{u}$ — вектор упругих смещений срединной поверхности оболочки, L — оператор уравнений теории оболочек в перемещениях [4], для операторов Лапласа (Δ) и градиента без индекса и с индексом s принимаются их выражения в областях V и S соответственно, приняты обозначения $(\cdot)_s^\pm = (\cdot)_{\alpha_3 \to \pm 0}$, $\operatorname{rot}_3(\cdot) = [\operatorname{rot}(\cdot) \cdot \mathbf{i}_3]_s$, $\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_3$ — единичные орты вдоль $\alpha_1 - \alpha_3$, $\gamma = (2h\mu_0\sigma)^{-1}$; ρ, E, $2h$, σ — плотность, модуль Юнга, толщина и проводимость оболочки, μ_0 — магнитная постоянная, точкой обозначена производная по времени t.

При заданных в функции времени и координат значениях $\mathbf{B}^\circ$ и $\mathbf{X}^{(m)}$ уравнения (1.1)—(1.4) образуют замкнутую нелинейную систему относительно неизвестных $\mathbf{u}$ и Φ, к которой при решении надо добавить некоторые граничные условия на краю G и на бесконечности [5]. Они обсуждаются ниже в п. 3.

Уравнения (1.1)—(1.4) представляют собой векторную форму записи уравнений [1], полученных асимптотическим методом путем интегрирования уравнений теории упругости и уравнений Максвелла по толщине оболочки в рамках некоторых допущений, предполагающих, в частности, ограниченность изменяемости исследуемых процессов во времени такими пределами, в которых на толщине оболочки не проявляется скин-эффект [6] и справедлива двумерная динамическая теория упругих оболочек [4].

Линейная плотность $\mathbf{J}$ вихревых токов и электрическое поле $\mathbf{e}$ в оболочке могут быть выражены через введенные величины посредством равенств

$$\mathbf{J} = \mu_0^{-1} \operatorname{grad}_s F \times \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{e} = (2h\sigma)^{-1} \mathbf{J} - \mathbf{u}^\cdot \times \mathbf{B} \tag{1.5}$$

2. Пусть ($\mathbf{u}$, Φ) представляет собой некоторое решение уравнений (1.1)—(1.4). Тогда баланс мощностей в определяемой этими уравнениями задаче выразится функционалом

$$N = N^{(m)} + N^{(i)} + N_s^{(e)} + N_v^{(e)} - P_g^{(m)} - P_g^{(e)} - P_\infty^{(e)} - P_s^{(m)} - P_s^{(e)} = 0 \tag{2.1}$$

где $N^{(m)}$ — мощность упругих деформаций оболочки, $N^{(i)}$ — мощность сил инерции оболочки, $N_s^{(e)}$ — мощность вихревых токов в оболочке, $N_v^{(e)}$ — мощность индуцированного электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве, $P_g^{(m)}$ — мощность краевых сил и моментов в оболочке, $P_g^{(e)}$ — мощность краевых токов, $P_\infty^{(e)}$ — потери мощности на излучение, $P_s^{(m)}$ и $P_s^{(e)}$ — соответственно активная мощность динамической нагрузки механического и электромагнитного происхождения. В общем случае они выражаются по формулам

$$N^{(m)} = \iint (T_{jk}\varepsilon^{jk\cdot} + M_{jk}\mu^{jk\cdot})\, ds, \quad N^{(i)} = \rho h \left[\iint \mathbf{u}^{\cdot 2} ds\right]^\cdot$$

$$N_s^{(e)} = \lambda\mu_0^{-1} \iint (\operatorname{grad}_s F)^2\, ds, \quad N_v^{(e)} = (2\mu_0)^{-1} \left[\iiint (\operatorname{grad} \Phi)^2\, dv\right]^\cdot$$

$$P_g^{(m)} = \oint (\mathbf{P}_k \mathbf{u}^\cdot + \mathbf{Q}_k \mathbf{\Gamma}^\cdot) A_k\, d\alpha_k, \quad P_g^{(e)} = \mu_0^{-1} \oint F e_k A_k\, d\alpha_k$$

$$P_\infty^{(e)} = \mu_0^{-1} \iint \Phi \left(\frac{\partial \Phi^\cdot}{\partial N}\right) d\sigma \tag{2.2}$$

$$P_s^{(m)} \iint \mathbf{X}^{(m)} \cdot \mathbf{u}^\cdot ds, \quad P_s^{(e)} = \mu_0^{-1} \iint B_3^{\circ\cdot} F\, ds$$

$$ds = A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad dv = A_1 A_2 A_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

Здесь $A_1 - A_3$ — коэффициенты первой квадратичной формы заданной системы координат, $d\sigma$ — элемент поверхности Σ, охватывающей оболочку (приняв последнюю шаровой с радиусом r, будем считать, что $r \to \infty$), N — единичная внешняя по отношению к V нормаль к Σ (и в дальнейшем к S), T_{jk}, M_{jk}, ε_{jk}, μ_{jk} — тензоры усилий, моментов, деформаций и углов поворота оболочки, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{\Gamma}$ — краевые значения векторов поверхностных сил, моментов и упругих вращений, $j, k = 1, 2$ — индексы, по которым ведется суммирование. Интегрирование здесь и далее, если не оговорено противное, ведется по поверхностям S, Σ, объему V, контуру G с элементами ds, $d\sigma$, dv, $d\alpha_k$ соответственно.

Выкладки, приведшие к получению соотношений (2.1), (2.2), можно свести к следующей схеме. Запишем первые два уравнения (1.1) символически в виде $\mathbf{M}(\mathbf{u}, \Phi, \mathbf{X}^{(m)}) = 0$ и $E(\mathbf{u}, \Phi, B_3^\circ) = 0$ соответственно, а последнее уравнение (1.1) продифференцируем по t. Умножая эти уравнения на некоторые величины и интегрируя по областям их определения, составим сумму

$$\mathrm{N} = \iint \left[\mathbf{M}(\mathbf{u}, \Phi, \mathbf{X}^{(m)})\,\mathbf{u}^{\cdot} - E(\mathbf{u}, \Phi, B_3^\circ)\frac{F}{\mu_0}\right] ds - \iiint \left[\Delta(\Phi^{\cdot})\frac{\Phi}{\mu_0}\right] dv = 0 \tag{2.3}$$

Раскроем входящие в (2.3) выражения

$$\iiint 2Eh\,(L\mathbf{u})\,\mathbf{u}^{\cdot}\,ds = N^{(m)} - P_g^{(m)} \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) следует непосредственно из результатов [4] в случае, если оператор L является формально самосопряженным. При этом мощность упругих деформаций $N^{(m)}$ может быть выражена через потенциальную энергию W деформации оболочки по формуле $N^{(m)} = W^{\cdot}$, где

$$W = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\iint \left\{\left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1-\nu}{2}\,\omega^2\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{3}\left[\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\nu\varkappa_1\varkappa_2 + (1-\nu)\,\tau^2\right]\right\} ds$$

ε_k, ω, $\varkappa_k$, τ — компоненты тангенциальной и изгибной деформации оболочки, ν — коэффициент Пуассона. Равенства

$$-\iint \mathbf{X}^{(i)}\mathbf{u}^{\cdot}\,ds = N^{(i)}, \qquad -\iint \left(\frac{B_3{}^{\cdot}F}{\mu_0}\right) ds = -P_s^{(e)} - \mu_0^{-1}\iint f_3{}^{\cdot}F\,ds \tag{2.5}$$

можно проверить непосредственной подстановкой с учетом (1.3) и (1.4).

Используя формулы (1.3) и применяя теорему Стокса, имеем

$$\iint \left[-\mathbf{X}^{(p)}\mathbf{u}^{\cdot} + \mathrm{rot}_3(\mathbf{u}^{\cdot}\times\mathbf{B})\frac{F}{\mu_0}\right] ds = \mu_0^{-1}\iint \mathrm{rot}_3\left[F(\mathbf{u}^{\cdot}\times\mathbf{B})\right] ds =$$
$$= -\mu_0^{-1}\oint F(-1)^k (B_3 u_l{}^{\cdot} - B_l u_3{}^{\cdot})\,A_k\,d\alpha_k, \quad l, k = 1, 2, \quad l \neq k \tag{2.6}$$

В двух случаях используется теорема Грина. При этом получаем

$$-\iint \left[\gamma\Delta_s(F)\frac{F}{\mu_0}\right] ds = N_s^{(e)} - \gamma\mu_0^{-1}\oint F(-1)^k A_l^{-1}\frac{\partial F}{\partial\alpha_l}A_k\,d\alpha_k \tag{2.7}$$

$$-\iiint \left[\Delta(\Phi^{\cdot})\frac{\Phi}{\mu_0}\right] dv = N_v^{(e)} - \mu_0^{-1}\iint \Phi\left(\frac{\partial\Phi^{\cdot}}{\partial N}\right) d\sigma -$$
$$-\mu_0^{-1}\iint\limits_{S^+ + S^-} \Phi\left(\frac{\partial\Phi^{\cdot}}{\partial N}\right) ds = N_v^{(e)} - P_\infty^{(e)} + \mu_0^{-1}\iint f_3{}^{\cdot}F\,ds \tag{2.8}$$

В (2.8) интегрирование в поверхностном интеграле ведется по всей охватывающей V поверхности $S^+ + S^- + \Sigma$, где под $S^\pm$ понимаются лицевые поверхности $\alpha_3 = \pm 0$ на математическом разрезе S. При получении последнего слагаемого (2.8) учитывается, что $(\partial\Phi/\partial N)_s^+ = -(\partial\Phi/\partial\alpha_3)_s^+$, $(\partial\Phi/\partial N)_s^- = (\partial\Phi/\partial\alpha_3)_s^-$, а также равенства (1.2) и (1.4).

Суммируя входящие в (2.3) выражения с учетом (2.4)—(2.8), получаем (2.1). Заметим, что при этом последние слагаемые в (2.5) и (2.8) взаимно уничтожаются, а (2.6) и последнее слагаемое в (2.7) в сумме дают $P_g^{(e)}$ (здесь надо учесть вторую формулу (1.7)).

Допустим, что область V может содержать неизменяемые замкнутые подобласти (V', V''), не контактирующие с лицевыми поверхностями S и занятые материалом со свойствами идеального диэлектрика (V') или идеального проводника (V'') (подобласти V'' должны быть односвязными). Идеальный диэлектрик не искажает поля Φ, а на поверхности идеального проводника нормальная ($\mathbf{n}'$ — нормаль) компонента $\mathbf{b}$ равна нулю и, следовательно, в поверхностном интеграле (2.8) $\partial\Phi^{\cdot}/\partial n' = 0$. Поэтому баланс мощностей (2.1), (2.2) остается в силе. Будем также считать, что на участках края G, находящихся в контакте с идеальным проводником, выполняется условие $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}' = 0$, исключающее проникновение края в V''.

3. Рассмотрим граничные условия, которые надо добавить к уравнениям (1.1)—(1.4), ограничив рассмотрение теми из них, при выполнении которых $P_g^{(m)} + P_g^{(e)} + P_\infty^{(e)} = 0$.

Первая группа условий носит механический характер, образует обычную систему краевых условий теории оболочек и, как показано в [5], обеспечивает равенство нулю $P_g^{(m)}$ для таких идеализированных краевых условий, как, например, условия жесткой заделки, шарнирного опирания, свободного края.

Вторая группа условий состоит в выполнении обычного условия ограниченности [6] потенциала Φ на бесконечности (при этом $P_\infty^{(e)} = 0$), условия $\partial\Phi/\partial n' = 0$ на поверхности подобластей V'' и одного из условий ($\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — касательная и нормаль к G)

$$F = 0 \text{ или } \partial F/\partial n = 0 \text{ на } G \tag{3.1}$$

Их физический смысл состоит в следующем. Первое и второе условия (3.1), как следует из (1.5), означают равенство нулю нормальной и касательной к G компонент линейной плотности вихревых токов, что соответствует условиям изолированного и контактирующего с идеальным проводником края. Учитывая, что в случае контакта края с идеальным проводником $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}' = 0$ (см. п. 2) и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}' = 0$, из (1.5) несложно получить равенство $e_\tau = (2h\sigma)^{-1}\partial F/\partial n$. Таким образом, выполнение условий (3.1) обеспечивает равенство $P_g^{(e)} = 0$.

4. Уравнения (1.1)—(1.4) нелинейны. Они могут быть линеаризованы [1] без потери точности при решении следующих двух основных задач электромеханики тонких упругих оболочек.

Задача 1 состоит в определении влияния постоянного (во времени) магнитного поля $\mathbf{B}^\circ$ на свободные ($\mathbf{X}^{(m)} = 0$) или вынужденные ($\mathbf{X}^{(m)} = \mathbf{X}^{(m)}(t)$) колебания оболочки. Соответствующая линейная форма уравнений может быть получена из (1.1)—(1.4), если во втором уравнении (1.1) положить $B_3^{\cdot} = f_3^{\cdot}$, а в остальных уравнениях считать, что $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\circ$. Эти упрощения связаны с тем, что магнитное поле, возникающее вследствие малых колебаний оболочки, мало в сравнении с магнитным полем сторонних источников.

Задача 2 состоит в определении упругих колебаний оболочки, вызванных переменным магнитным полем $\mathbf{B}^\circ = \mathbf{B}^\circ(t)$. Соответствующие уравнения могут быть получены из (1.1)—(1.4) путем отбрасывания во втором уравнении (1.1) последнего слагаемого $\mathrm{rot}_3 (\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} \times \mathbf{B})$. Это связано с тем, что вихревые токи, вызываемые малыми колебаниями оболочки, малы в сравнении с токами, индуцированными переменным магнитным полем $\mathbf{B}^\circ$ сторонних источников.

Решение задачи 1 требует совместного интегрирования соответствующих уравнений.

Уравнения задачи 2 распадаются на две подсистемы, интегрирование которых определяет два последовательных этапа решения задачи. Первый этап состоит в совместном интегрировании уравнений, получаемых из второго и третьего уравнений (1.1). При этом определяется поле Φ (и функция F). Второй этап заключается в решении обычной задачи интегрирования уравнений движения оболочки (первое уравнение (1.1)) при известном магнитном давлении $\mathbf{X}^{(p)}$ (определяемом прямыми действиями по формуле (1.2)) и давлении активных сил $\mathbf{X}^{(m)}$ (последние могут отсутствовать — $\mathbf{X}^{(m)} = 0$). Решаемые на обоих этапах задачи интегрирования линейны.

Задача 1 совпадает с задачей магнитоупругости тонких оболочек, сформулированной в [7], а уравнения задачи 1, как показано в [8], могут быть получены из уравнений работы [7] путем некоторых преобразований, включающих введение магнитного потенциала и отбрасывание асимптотически малых членов. Первый этап задачи 2 совпадает с задачей электродинамики тонких проводящих оболочек [9], а соответствующие уравнения могут быть сведены к уравнениям работы [10].

5. Рассмотрим задачу 1, считая, что возмущающие силы $\mathbf{X}^{(m)}$ и все искомые величины меняются во времени по закону $\exp(\Omega t)$. После отбрасывания этого множителя в уравнениях задачи 1 получим их в виде

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{u}, \Phi, \Omega, \mathbf{X}^{(m)}) = 2EhL\mathbf{u} + 2\rho h\Omega^2\mathbf{u} + \mu_0^{-1}(\mathrm{grad}_s F \times \mathbf{i}_3) \times \mathbf{B}^\circ - \mathbf{X}^{(m)} = 0$$

$$E_1(\mathbf{u}, \Phi, \Omega) = \gamma\Delta_s F + \Omega f_3 - \Omega\,\mathrm{rot}_3(\mathbf{u} \times \mathbf{B}^\circ) = 0, \quad \Delta\Phi = 0 \tag{5.1}$$

Исследуем сначала свойства собственных решений задачи (5.1), положив $\mathbf{X}^{(m)} = 0$.

Пусть $(\mathbf{u}_{(t)}, \Phi_{(t)}, \Omega_{(t)})$ и $(\mathbf{u}_{(q)}, \Phi_{(q)}, \Omega_{(q)})$ — два собственных решения однородных уравнений (5.1), удовлетворяющие перечисленным в п. 3 граничным условиям, обеспечивающим равенство нулю $P_g^{(m)} + \dot{P}_g^{(e)} + P_\infty^{(e)}$. (В дальнейшем всюду считается, что решения всех рассматриваемых краевых задач удовлетворяют таким граничным условиям.)

Составим функционал

$$N_{(tq)} = \iint \left[\mathbf{M}_1(\mathbf{u}_{(t)}, \Phi_{(t)}, \Omega_{(t)}, 0)\,\Omega_{(q)}\mathbf{u}_{(q)} - E_1(\mathbf{u}_{(q)}, \Phi_{(q)}, \Omega_{(q)})\frac{F_{(t)}}{\mu_0}\right] ds -$$

$$- \iiint \left[\Omega_{(q)}\Delta(\Phi_{(q)})\frac{\Phi_{(t)}}{\mu_0}\right] dv = 0, \quad F_{(t)} = (\Phi_{(t)})_s^+ - (\Phi_{(t)})_s^-$$

Пользуясь приемами, изложенными в п. 2, получим

$$N_{(tq)} = \Omega_q W_{(tq)} + \Omega_{(t)}^2\Omega_{(q)} I_{(tq)} + P_{(tq)} + \Omega_{(q)} Q_{(tq)} = 0$$

$$W_{(tq)} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\iint\left\{\left[\varepsilon_1^{(t)}\varepsilon_1^{(q)} + \varepsilon_2^{(t)}\varepsilon_2^{(q)} + \nu(\varepsilon_1^{(t)}\varepsilon_2^{(q)} + \varepsilon_1^{(q)}\varepsilon_2^{(t)}) + \frac{1-\nu}{2}\,\omega^{(t)}\omega^{(q)}\right] +\right.$$

$$\left. + {}^1/_3 h^2[\varkappa_1^{(t)}\varkappa_1^{(q)} + \varkappa_2^{(t)}\varkappa_2^{(q)} + \nu(\varkappa_1^{(t)}\varkappa_2^{(q)} + \varkappa_1^{(q)}\varkappa_2^{(t)}) + (1-\nu)\,\tau^{(t)}\tau^{(q)}]\right\} ds \tag{5.2}$$

$$I_{(tq)} = 2\rho h\iint \mathbf{u}_{(t)}\mathbf{u}_{(q)}\,ds, \quad P_{(tq)} = \gamma\mu_0^{-1}\iint \mathrm{grad}_s F_{(\ )}\,\mathrm{grad}_s F_{(q)}\,ds$$

$$Q_{(tq)} = \mu_0^{-1}\iiint \mathrm{grad}\,\Phi_{(t)}\,\mathrm{grad}\,\Phi_{(q)}\,dv$$

Учитывая симметричность подынтегральных выражений $W_{(tq)}$, $I_{(tq)}$, $P_{(tq)}$, $Q_{(tq)}$ относительно индексов (t, q), составим разность $N_{(tq)} - N_{(qt)}$ и, отбросив общий множитель $(\Omega_{(q)} - \Omega_{(t)})$, получим равенство

$$W_{(tq)} + Q_{(tq)} - \Omega_{(t)}\Omega_{(q)}I_{(tq)} = 0, \quad t \neq q \tag{5.3}$$

Составляя разности $\Omega_{(t)}N_{(tq)} - \Omega_{(q)}N_{(qt)}$ и $\Omega_{(q)}N_{(tq)} - \Omega_{(t)}N_{(tq)}$, можно получить еще два равенства, аналогичных (5.3)

$$P_{(tq)} + \Omega_{(t)}\Omega_{(q)}(\Omega_{(t)} + \Omega_{(q)})\, I_{(tq)} = 0, \quad P_{(tq)} + (\Omega_{(t)} + \Omega_{(q)})(W_{(tq)} + Q_{(tq)}) = 0 \tag{5.4}$$

Равенства (5.3) и (5.4) представляют собой три различные формы аналога условия ортогональности собственных решений в задаче магнитоупругости тонких оболочек.

Рассмотрим теперь вопрос о разложении форм вынужденных колебаний оболочки под действием гармонической силы $\mathbf{X}^{(m)}$, действующей с круговой частотой Ω_*, по собственным решениям задачи. Для этого положим в (5.1) $\Omega = i\Omega_*$, а решение будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{u}_{(n)}, \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_{(n)} \tag{5.5}$$

Составим функционал

$$\iint \left[\mathbf{M}_1(\mathbf{u}, \Phi, i\Omega_*, \mathbf{X}^{(m)})\, \Omega_{(q)}\mathbf{u}_{(q)} - E_1(\mathbf{u}_{(q)}, \Phi_{(q)}, \Omega_{(q)}) \frac{F}{\mu_0} \right] ds -$$
$$- \iiint \left[\Omega_{(q)}\Delta(\Phi_{(q)}) \frac{\Phi}{\mu_0} \right] dv = 0, \quad F = \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_{(n)}$$

из которого с учетом (5.5), (5.2) и (5.3) получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Omega_*^2 + \Omega_{(n)}^2)\, I_{(nq)} A_n = - \iint \mathbf{X}^{(m)} \mathbf{u}_{(q)}\, ds$$

Придавая q значения 1, 2, . . ., получим бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов A_n разложений (5.5).

6. Рассмотрим первый этап решения задачи 2, считая, что $\mathbf{B}^\circ$ и Φ меняются во времени по закону $\exp(\Omega t)$. При этом будем исходить из уравнений

$$E_2(\Phi, \Omega, B_3^\circ) = \gamma\Delta_s F + \Omega f_3 + \Omega B_3^\circ = 0, \quad \Delta\Phi = 0 \tag{6.1}$$

Пусть $(\Phi_{(t)}, \Omega_{(t)})$ и $(\Phi_{(q)}, \Omega_{(q)})$ — два собственных решения однородных ($B_3^\circ = 0$) уравнений (6.1).

Составим функционал

$$N_{(tq)} = - \iint \left[E_2(\Phi_{(t)}, \Omega_{(t)}, 0) \frac{F_{(q)}}{\mu_0} \right] ds - \iiint \left[\Omega_{(t)}\Delta(\Phi_{(t)}) \frac{\Phi_{(q)}}{\mu_0} \right] dv =$$
$$= P_{(tq)} - \Omega_{(t)} Q_{(tq)} = 0 \tag{6.2}$$

Взяв разность $N_{(tq)} - N_{(qt)}$, отбросив общий множитель $(\Omega_{(t)} - \Omega_{(q)})$, получим с использованием (6.2) два равенства

$$Q_{(tq)} = 0, \quad P_{(tq)} = 0, \quad t \neq q \tag{6.3}$$

выражающие условия ортогональности и теоремы взаимности в задаче электродинамики тонких проводящих оболочек.

Определение вихревых токов и электромагнитного поля для оболочки, находящейся в гармоническом (круговой частоты Ω_*) поле $\mathbf{B}^\circ$ сторонних источников будем вести разложением по собственным функциям, положив в (6.1) $\Omega = i\Omega_*$, а Φ представим в виде суммы (5.5).

Составим функционал

$$\iint \left[E_2(\Phi, i\Omega_*, B_3^\circ) \frac{F_{(q)}}{\mu_0} \right] ds + \iiint \left[i\Omega_* \Delta(\Phi) \frac{\Phi_{(q)}}{\mu_0} \right] dv = 0$$

из которого с учетом (6.2) получим выражения для коэффициентов A_n разложения (5.5) для Φ

$$A_n = \frac{i\Omega_*}{i\Omega_* - \Omega_{(n)}} \iint B_3^\circ F_{(n)} \frac{ds}{(\mu_0 Q_{(nn)})}$$

Здесь согласно (6.2) можно сделать замену $Q_{(nn)} = -P_{(nn)}/\Omega_{(n)}$.

Уравнения и свойства решений второго этапа задачи 2 подробно исследованы в теории оболочек. Здесь надо иметь в виду, что в силу нелинейности выражения (1.3) для $X^{(p)}$ относительно производных функции Φ магнитное давление на оболочку в общем случае содержит постоянную (не зависящую от времени) и гармоническую (с круговой частотой $2\Omega_*$) компоненты.

7. Как видно из (2.1), (2.2), электромеханический процесс в оболочке неконсервативен и сопровождается потерей мощности, определяемой слагаемым $N_s^{(e)}$ и связанной тепловыделением за счет нагрева оболочки вихревыми токами. Поэтому данная задача, вообще говоря, должна рассматриваться с позиций магнитотермоупругости [11], т. е. должны приниматься во внимание температурные напряжения. Оставляя данный вопрос за рамками статьи, отметим, что тепловые потери в оболочке входят в слагаемое $N_s^{(e)}$ формулы (2.1), а в задачах, рассмотренных в п. 6, они могут быть (при учете (6.3)) определены по формуле

$$^1/_2\gamma\mu_0^{-1} \iint \operatorname{grad}_s F\, \overline{\operatorname{grad}_s F}\, ds$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радовинский А. Л.* Динамика упругих электропроводящих оболочек в постоянных и нестационарных магнитных полях // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 796—803.
2. *Саркисян С. О.* Уравнения энергии и теорема единственности в магниупругости тонких оболочек // Уч. зап. Ереван. ун-та, 1985. № 2. С. 41—46.
3. *Саркисян С. О.* Теорема взаимности в магниупругости тонких оболочек // Механика. Межвуз. сб. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1987. Вып. 6. С. 102—110.
4. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
5. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 710 с.
7. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
8. *Радовинский А. Л.* Об уравнениях колебаний пластин и оболочек в магнитном поле // Теория и численные методы расчета пластин и оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1984. Т. 2. С. 242—247.
9. *Тозони О. В., Маергойз И. Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Технiка, 1974. 352 с.
10. *Астахов В. И.* Задача расчета квазистационарного электромагнитного поля в проводящих оболочках // Изв. вузов. Электромеханика. 1985. № 1. С. 15—30.
11. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводящих тел. Киев: Наук. думка, 1982. 293 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.X.1987