Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 539.3

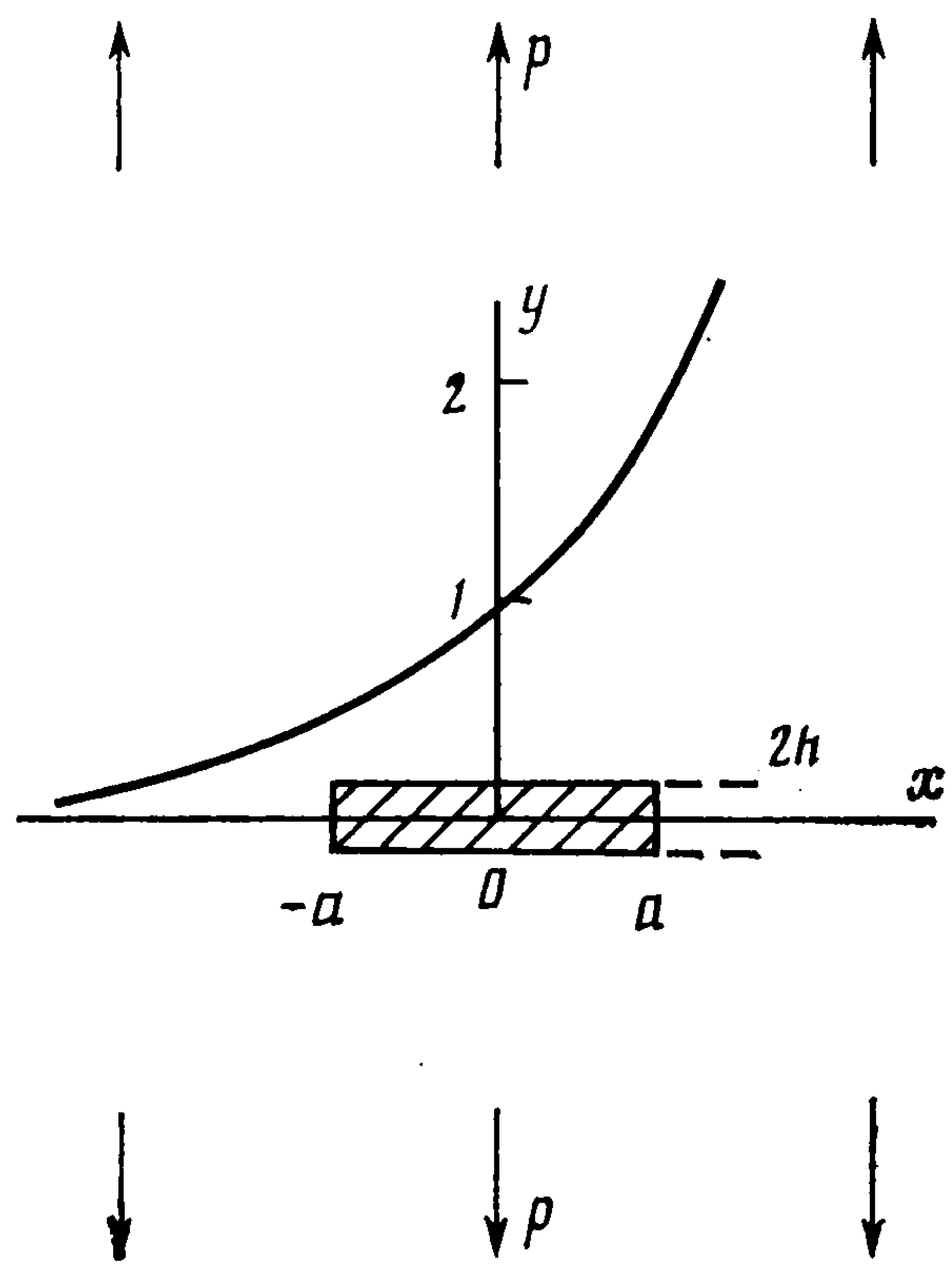
А. А. Евтушенко, В. И. Паук

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ТОНКОГО УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Получено решение плоской задачи теории упругости для тонкостенного упругого включения в матрице, модуль сдвига которой экспоненциально зависит от координаты, совпадающей с осевой линией прослойки.

Ранее было построено решение задачи для трещины в плоскости с модулем сдвига $\mu(y) = \mu(1 + c\,|\,y\,|)$, $c = \text{const}$ [1] и с модулем сдвига $\mu(x) = \mu e^{\beta x}$, $\beta = \text{const}$ [2].

1. Постановка задачи. Рассматривается упругое равновесие неоднородной плоскости, содержащей на отрезке $[-a, a]$ оси x тонкое неоднородное упругое включение малой толщины $2h$ (фиг. 1). Материал матрицы обладает переменным модулем сдвига $\mu(x) = \mu e^{\beta x}$, $\beta = \text{const}$ и постоянным коэффициентом Пуассона ν, для материала включения $\mu_0(x) = \mu_0 e^{\beta_0 x}$, $\beta_0 = \text{const}$ и ν_0 соответственно. Механический контакт включения с неоднородной матрицей характеризуется полным сцеплением. Составное тело находится в условиях плоской задачи под действием равномерной растягивающей нагрузки на бесконечности.



Фиг. 1

При учете малой толщины включения и симметрии задачи взаимодействие тонкого упругого включения с окружающей средой можно описать системой дифференциальных соотношений [3, 4]

$$2\mu_0(x)\,u_{,x}(x, +0) = c_{10}N(x) - c_{20}\sigma_y(x, +0)$$
$$2\mu_0(x)\,v(x, +0) = h\,[c_{10}\sigma_y(x, +0) - c_{20}N(x)] \tag{1.1}$$
$$N(x) = N(-a) - \frac{1}{h}\int\limits_{-a}^{x}\sigma_{xy}(t, +0)\,dt, \quad -a \leqslant x \leqslant a$$
$$c_{10} = (1 + \varkappa_0)/4, \quad c_{20} = (3 - \varkappa_0)/4$$

$\varkappa_0 = (3 - \nu_0)/(1 + \nu_0)$ для обобщенного плоского напряженного состояния, $\varkappa_0 = 3 - 4\nu_0$ для плоской деформации, $N(-a)$ — нормальное усилие на торце $x = -a$ включения.

2. Метод решения. В силу линейности решение исследуемой задачи представим в виде

$$(\sigma, u) = (\sigma^\circ, u^\circ) + (\sigma^*, u^*) \tag{2.1}$$

где $\sigma^\circ = (\sigma_x^\circ, \sigma_y^\circ, \sigma_{xy}^\circ)$ — напряжения, $u^\circ = (u^\circ, v^\circ)$ — смещения от заданной внешней нагрузки в неоднородной плоскости без включения (основная задача), $\sigma^* = (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_{xy}^*)$, $u^* = (u^*, v^*)$ — напряжения и смещения для возмущенной части задачи. Считая величины σ°, u° известными, определим значения σ^*, u^*. Пусть $U(x, y)$ — функция напряжений для возмущенной части задачи. Тогда

$$\sigma_x^* = U_{,yy}, \quad \sigma_y^* = U_{,xx}, \quad \sigma_{xy}^* = -U_{,xy} \tag{2.2}$$

Подстановка формул (2.2) при учете соотношений закона Гука в уравнение совместимости деформаций приводит к дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered} \nabla^4 U - 2\beta\nabla^2 U_{,x} + \beta^2 (U_{,xx} - cU_{,yy}) = 0 \\ c = c_2/c_1, \quad c_1 = (1 + \varkappa)/4, \quad c_2 = (3 - \varkappa)/4 \end{gathered} \tag{2.3}$$

$\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния, $\varkappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, ∇^2 — оператор Лапласа. Функцию $U(x, y)$ ищем в форме интеграла Фурье

$$\begin{gathered} U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\alpha, y) e^{-ix\alpha} d\alpha, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \\ \bar{U}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) e^{ix\alpha} dx, \quad -\infty < \alpha < \infty, \quad y > 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

Тогда из (2.3) получаем

$$\frac{d^4\bar{U}}{dy^4} + (2i\beta\alpha - 2\alpha^2 - c\beta^2)\frac{d^2\bar{U}}{dy^2} + (\alpha^4 - 2i\beta\alpha^3 - \beta^2\alpha^2)\bar{U} = 0 \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.5), убывающее на бесконечности, имеет вид

$$\begin{gathered} \bar{U}(\alpha, y) = \mathbf{A}_1(\alpha) e^{-m_1 y} + \mathbf{A}_2(\alpha) e^{-m_2 y}, \quad y \geqslant 0 \\ m_1 = ((-\gamma_1 + \gamma_2)/2)^{1/2}, \quad m_2 = ((-\gamma_1 - \gamma_2)/2)^{1/2} \\ \gamma_1 = 2i\beta\alpha - 2\alpha^2 - c\beta^2, \quad \gamma_2 = (\beta^4 c^2 - 4i\beta^3 c\alpha + 4\beta^2 c\alpha^2)^{1/2} \end{gathered} \tag{2.6}$$

($\mathbf{A}_1(\alpha)$, $\mathbf{A}_2(\alpha)$ — комплексные функции). Из соотношений (2.2), (2.4), (2.6) и выражений закона Гука находим

$$\begin{gathered} \sigma_x^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum \mathbf{A}_j(\alpha) m_j^2 e^{-m_j y} e^{-ix\alpha} d\alpha \\ \sigma_y^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \sum \mathbf{A}_j(\alpha) e^{-m_j y} e^{-ix\alpha} d\alpha \\ \sigma_{xy}^*(x, y) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \sum \mathbf{A}_j(\alpha) m_j e^{-m_j y} e^{-ix\alpha} d\alpha \\ 2\mu(x) u_{,x}^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum l_{2j} \mathbf{A}_j(\alpha) e^{-m_j y} e^{-ix\alpha} d\alpha \\ 2\mu(x) v_{,x}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta + i\alpha) \sum \frac{l_{1j}}{m_j} \mathbf{A}_j(\alpha) e^{-m_j y} e^{-ix\alpha} d\alpha \\ l_{1j} = c_1\alpha^2 + c_2 m_j^2, \quad l_{2j} = c_2\alpha^2 + c_1 m_j^2, \quad j = 1, 2 \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, суммирование ведется по j от $j = 1$ до $j = 2$.

Обозначим

$$\sigma_{xy}^*(x, +0) = f_1(x), \quad 2\mu(x) v_{,x}^*(x, +0) = f_2(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{2.8}$$

причем $f_j(x) = 0, \; |x| > a$. Из соотношений (2.8), учитывая (2.7), получаем

$$\mathbf{A}_1(\alpha) = -\frac{m_1 l_{12}}{i\alpha^3 c_1 m} F_1(\alpha) + \frac{m_1 m_2^2}{(\beta + i\alpha)\alpha^2 c_1 m} F_2(\alpha) \tag{2.9}$$

$$\mathbf{A}_2(\alpha) = \frac{m_2 l_{11}}{i\alpha^3 c_1 m} F_1(\alpha) - \frac{m_2 m_1^2}{(\beta + i\alpha)\alpha^2 c_1 m} F_2(\alpha)$$

$$F_j(\alpha) = \int_{-a}^{a} f_j(t) e^{i\alpha t} dt, \quad j = 1, 2; \quad m = m_1^2 - m_2^2$$

Подстановка функций $\mathbf{A}_1(\alpha)$, $\mathbf{A}_2(\alpha)$ в формулы (2.7) и переход к пределу $y \to +0$ дает

$$\sigma_y^*(x, +0) = \lim_{y \to +0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \sum f_j(t) h_{1j}(x, y, t) dt\right] \tag{2.10}$$

$$2\mu(x) u_{,x}^*(x, +0) = \lim_{y \to +0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \sum f_j(t) h_{2j}(x, y, t) dt\right], \quad -\infty < x < \infty$$

Здесь

$$h_{kj}(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{H}_{kj}(\alpha, y) - \mathbf{H}_{kj}^{\infty}(\alpha, y)] e^{i\alpha(t-x)} d\alpha +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{kj}^{\infty}(\alpha, y) e^{i\alpha(t-x)} d\alpha; \quad \lim_{|\alpha| \to \infty} \frac{\mathbf{H}_{kj}^{\infty}(\alpha, y)}{\mathbf{H}_{kj}(\alpha, y)} = 1 \tag{2.11}$$

$$\mathbf{H}_{11}(\alpha, y) = \frac{m_1 l_{12} e^{-m_1 y} - m^2 l_{11} e^{-m_2 y}}{i\alpha c_1 m}, \quad \mathbf{H}_{12}(\alpha, y) = \frac{m_1 m_2 (-m_2 e^{-m_1 y} + m_1 e^{-m_2 y})}{(\beta + i\alpha) c_1 m}$$

$$\mathbf{H}_{21}(\alpha, y) = \frac{-m_1 l_{12} l_{21} e^{-m_1 y} + m_2 l_{11} l_{22} e^{-m_2 y}}{i\alpha^3 c_1 m}$$

$$\mathbf{H}_{22}(\alpha, y) = \frac{m_1 m_2 (m_2 l_{21} e^{-m_1 y} - m_1 l_{22} e^{-m_2 y})}{(\beta + i\alpha)\alpha^2 c_1 m}$$

Как следует из формул (2.6), при $|\alpha| \to \infty$ имеем $m_j \to |\alpha|$, и соотношения (2.11) приводят к равенствам

$$\mathbf{H}_{kj}^{\infty}(\alpha, y) = \lambda_{kj} \frac{\alpha}{i|\alpha|} e^{-|\alpha| y}, \quad k, j = 1, 2 \tag{2.12}$$

$$\lambda_{11} = \frac{c_1 - c_2}{2c_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{1}{2c_1}, \quad \lambda_{21} = \frac{c_2^2 - 2c_1 c_2 - 3c_1^2}{2c_1}, \quad \lambda_{22} = \frac{c_1 - c_2}{2c_1}$$

Учитывая значение интеграла

$$\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{-|\alpha| y} e^{i\alpha(t-x)} d\alpha = \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2}$$

из соотношений (2.1), (2.10), (2.12) получаем

$$\sigma_y(x, +0) = \sigma_y^\circ(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \sum f_j(t) \left[\frac{\lambda_{1j}}{t - x} + k_{1j}(x, t)\right] dt \tag{2.13}$$

$$2\mu(x) u_{,x}(x, +0) = 2\mu(x) u_{,x}^\circ(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \sum f_j(t) \left[\frac{\lambda_{2j}}{t - x} + k_{2j}(x, t)\right] dt$$

$$k_{kj}(x, t) = \int_0^{\infty} \{\mathrm{Re}\,[\mathbf{M}_{kj}(\alpha) e^{i\alpha(t-x)}] - \lambda_{kj} \sin(t - x)\alpha\} d\alpha, \quad k, j = 1, 2$$

$$\mathbf{M}_{11}(\alpha) = \frac{n_1}{i\alpha c_1 m_+}, \quad \mathbf{M}_{12}(\alpha) = \frac{m_1 m_2}{(\beta + i\alpha) c_1 m_+}, \quad \mathbf{M}_{22}(\alpha) = -\frac{n_2}{\alpha^2} \mathbf{M}_{12}(\alpha)$$

$$\mathbf{M}_{21}(\alpha) = -\frac{c_1c_2\alpha^4 + c_1^2\alpha^2(m_1^2 + m_1m_2 + m_2^2) - c_2m_1m_2n_2}{i\alpha^3c_1m_+}$$

$$m_+ = m_1 + m_2, \quad n_1 = c_1\alpha^2 - c_2m_1m_2, \quad n_2 = c_2\alpha^2 - c_1m_1m_2$$

Подставляя выражения (2.13) в условия взаимодействия тонкостенного упругого включения с неоднородной матрицей (1.1) и переходя к безразмерным величинам, получаем систему двух сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum \varphi_j(\tau)\left[\frac{a_{kj}}{\tau-\xi} + b_{kj}\operatorname{sign}(\xi-\tau) + \mathbf{K}_{kj}(\xi,\tau)\right]d\tau = \Phi_k(\xi)$$

$$k = 1, 2; -1 < \xi < 1 \qquad (2.14)$$

Здесь

$$\mathbf{K}_{1j}(\xi,\tau) = \lambda_2 k_{1j}(a\xi, a\tau) + k_{2j}(a\xi, a\tau)$$

$$\mathbf{K}_{2j}(\xi,\tau) = \lambda_1 k_{1j}(a\xi, a\tau), \quad \varphi_j(\tau) = f_j(a\tau)$$

$$a_{1j} = \lambda_2\lambda_{1j} + \lambda_{2j}, \quad a_{2j} = \lambda_1\lambda_{1j}, \quad \lambda_j = c_j^\circ/k, \quad j = 1, 2$$

$$\Phi_1(\xi) = -\lambda_2\sigma_y^\circ(a\xi) - 2\mu(a\xi)\overset{\bullet}{u}_{,x}(a\xi) + {}^1/_2[N(a) + N(-a)]$$

$$\Phi_2(\xi) = -\lambda_1\sigma_y^\circ(a\xi) + {}^1/_2[N(a) + N(-a)] + {}^1/_2h_0^{-1}[V(a) + V(-a)]$$

$$b_{11} = \frac{\pi\lambda_1}{2h_0}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{21} = \frac{\pi\lambda_2}{2h_0}, \quad b_{22} = -\frac{\pi}{2h_0}$$

$$N(w) \equiv {}^1/_2[\sigma_x(w,h) + \sigma_x(w,-h)], \quad V(w) \equiv \mu(w)[v(w,h) - v(w,-h)]$$

$$k = \frac{\mu_0(a\xi)}{\mu(a\xi)}, \quad h_0 = \frac{h}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a}, \quad w = \pm a$$

Искомые функции $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ удовлетворяют дополнительным условиям

$$\int_{-1}^{1}\varphi_j(\tau)\,d\tau = \mathbf{B}_j, \quad j = 1, 2 \qquad (2.15)$$

$$\mathbf{B}_1 = h_0[N(-a) - N(a)], \quad \mathbf{B}_2 = V(a) - V(-a)$$

Априорные формулы для вычисления осевого усилия $N(w)$ и относительного вертикального смещения $V(w)$ на торцах $w = \pm a$ включения приведены в [4].

Система сингулярных интегральных уравнений (2.14), (2.15) описывает упругое равновесие плоскости с включением произвольной жесткости: от абсолютно податливого (трещина) до абсолютно жесткого. В случае равенства механических параметров матрицы и включения из системы интегральных уравнений (2.14), (2.15) следует $\varphi_j(\tau) = 0$, $(i = 1, 2)$ и, таким образом, отсутствие возмущений, вносимых включением. При $k = 0$ имеем $\varphi_1(\tau) = 0$ и интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_2(\tau)\left[\frac{\lambda_{12}}{\tau-\xi} + k_{12}(\xi,\tau)\right]d\tau = -\sigma_y^\circ(a\xi), \quad -1 < \xi < 1$$

для трещины в неоднородной пластинке, полученное ранее [2]. Если же $k \to \infty$, то из (2.14) следует $\varphi_2(\tau) = 0$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\tau)\left[\frac{\lambda_{21}}{\tau-\xi} + k_{21}(\xi,\tau)\right]d\tau = -2\mu(a\xi)\overset{\circ}{u}_{,x}(a\xi), \quad -1 < \xi < 1$$

— интегральное уравнение для абсолютно жесткого включения в неоднородной плоскости. Положив $\beta = \beta_0 = 0$, получаем решение для тонкостенного упругого включения в однородной матрице [5].

3. Численный анализ. Решение системы интегральных уравнений (2.14), (2.15) представим в форме

$$\varphi_j(\tau) = G_j(\tau)/\sqrt{1-\tau^2}, \quad -1<\tau<1, \quad j=1,\,2 \tag{3.1}$$

($G_j(\tau)$ — ограниченная измеримая функция). Подстановка представления (3.1) в интегральные уравнения (2.14), (2.15) и использование аналога квадратурной формулы Лобатто — Якоби для сингулярных интегралов [6] приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{r=1}^{n} W_r \sum_{j=1}^{2} G_j(\tau_r)\left[\frac{a_{kj}(\xi_l)}{\tau_r-\xi_l} + b_{kj}\operatorname{sign}(\xi_l-\tau_r) + \mathrm{K}_{kj}(\xi_l,\tau_r)\right] =$$

$$= \Phi_k(\xi_l); \quad l=1,2,\ldots,n-1; \quad k=1,2 \tag{3.2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r G_j(\tau_r) = \mathrm{B}_j/\pi, \quad j=1,2$$

Здесь

$$W_1 = W_n = \frac{1}{2(n-1)}, \quad W_r = \frac{1}{1-n}, \quad r=2,3,\ldots,n-1$$

$$\tau_r = \cos\left(\frac{r-1}{n-1}\pi\right), \quad r=1,2,\ldots,n; \quad \xi_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2n-2}\pi\right), \quad l=1,2,\ldots,n-1$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.2) решалась численно в случае равенства параметров неоднородности матрицы и включения $\beta=\beta_0$ и $\mu\neq\mu_0$. Решение основной задачи имеет вид

$$\sigma_y^\circ = \mathrm{p}, \quad 2\mu(x)\,\overset{\circ}{u}_{,x} = -c_1\mathrm{p}$$

и в уравнениях (2.15) $\mathrm{B}_j=0$ ($j=1,\,2$). Напряженное состояние в окрестности вершины тонкого упругого включения характеризуется коэффициентом интенсивности напряжений

$$k^I(w) = \lim_{x\to w}\sqrt{2(x-w)}\,\sigma_y(x,w), \quad w=\pm a \tag{3.3}$$

Подставляя в (3.3) значения $\sigma_y(x,+0)$ из соотношений (2.13), получаем

$$k^I(\pm a) = \mathrm{p}\sqrt{a}\,[k_1^I(\pm a)+k_2^I(\pm a)], \quad k_j^I(\pm a) = \mp\lambda_{1j}G_j(\pm1), \quad j=1,2 \tag{3.4}$$

Для податливых включений ($k<1$) дополнительно исследовалось вертикальное смещение берегов включения, а для более жестких по сравнению с матрицей ($k>1$) — распределение касательных напряжений на оси включения. При этом использовалась интерполяционная формула [6]

$$G_j(\tau) = \frac{1+\tau}{2}G_j(1) + \frac{1-\tau}{2}G_j(-1) + (1-\tau^2)\sum_{m=0}^{n-3} b_m^{\,j}U_m(\tau)$$

$$b_m^{\,j} = \frac{2}{n-1}\sum_{r=2}^{n-1}\left[G_j(\tau_r) - \frac{1+\tau_r}{2}G_j(1) - \frac{1-\tau_r}{2}G_j(-1)\right], \quad j=1,2 \tag{3.5}$$

($U_m(\cdot)$ — полиномы Чебышева второго рода). Тогда

$$\tau_{xy}(x,+0) = (a^2-x^2)^{-1/2}G_1(x/a)$$

а интегрируя по x второе из соотношений (2.8) при учете (3.1), имеем

$$2\mu(x)\frac{v(x)}{a} = \int_{-1}^{\xi}\frac{G_2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{V(-a)}{a} \tag{3.6}$$

Подставляя в соотношение (3.6) значения $G_2(\tau)$ из (3.5) и вычисляя интегралы, находим

$$2\mu(x)\frac{v(x)}{a} = \frac{1}{2}\left(\arcsin\xi + \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-\xi^2}\right)G_2(1) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\arcsin\xi+\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-\xi^2}\right)G_2(-1)+\frac{b_0^2}{2}\left(\arcsin\xi+\frac{\pi}{2}+\xi\sqrt{1-\xi^2}\right)+$$
$$+\sqrt{1-\xi^2}\sum_{m=1}^{n-3}b_m^2\left(\frac{U_{m+1}(\xi)}{m+2}-\frac{U_{m-1}(\xi)}{m}\right)+\frac{V(-a)}{a} \qquad (3.7)$$

Расчеты проводились для случая обобщенного плоского напряженного состояния при $h_0 = 0{,}1$, $\nu = \nu_0 = 0{,}3$. Для достижения относительной точности в 1% потребовалось взять при самых неблагоприятных параметрах задачи $n = 5$.

Таблица 1

k	K_1^+	K_2^+	K_1^-	K_2^-
10^{-4}	—0	1093	—0	898
10^{-2}	—4	896	—3	772
10^{-1}	—14	345	—11	320
10	73	1	64	1
10^2	112	0	95	0
10^4	118	0	100	0

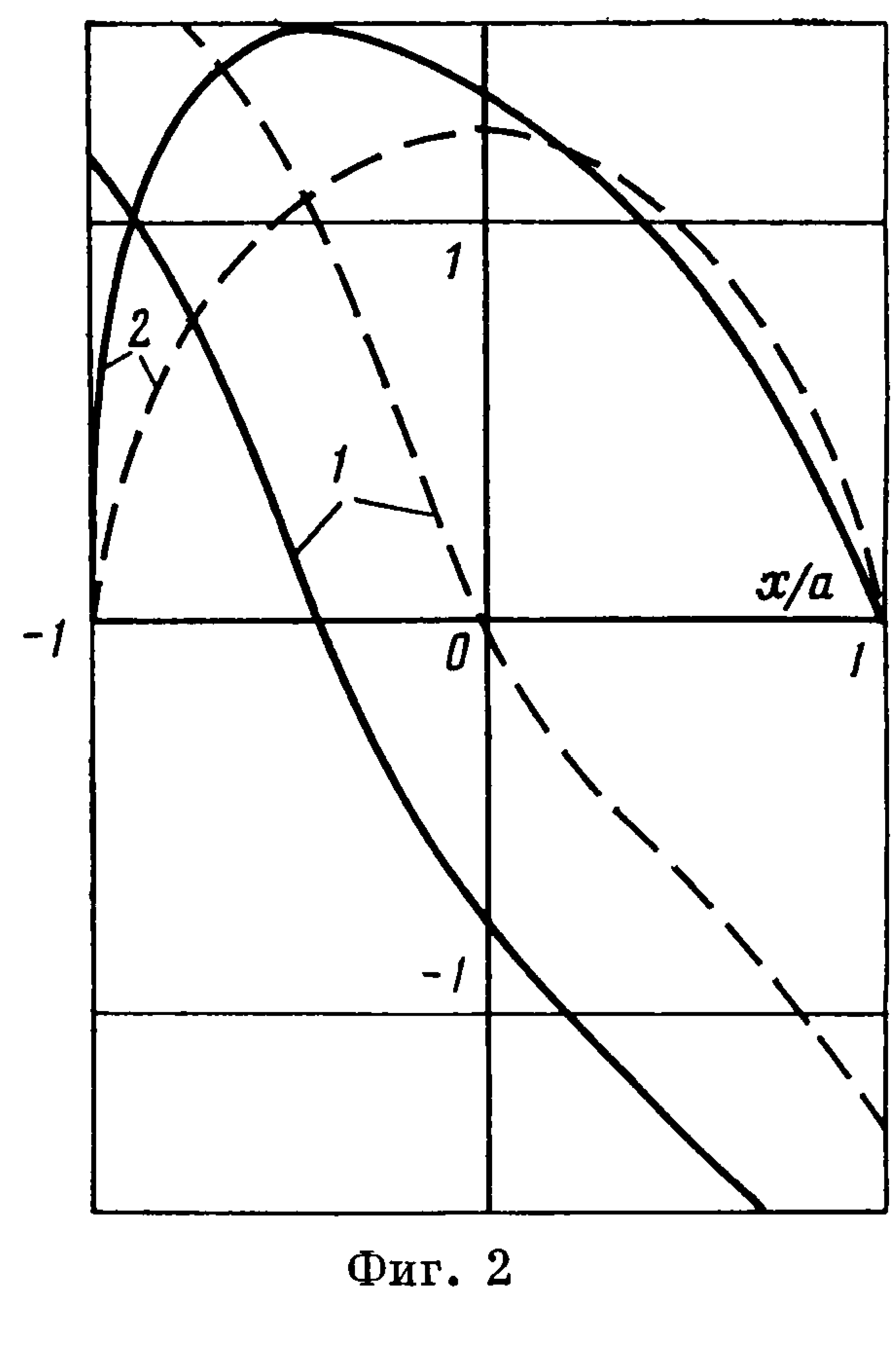
Таблица 2

β	$k = 0{,}1$				$k = 10$	
	K_1^+	K_2^+	K_1^-	K_2^-	K_1^+	K_1^-
0	—12	335	—12	335	69	69
0,2	—13	340	—11	329	71	67
0,4	—13	343	—11	323	72	65
0,6	—14	346	—10	317	73	63
0,8	—15	348	—10	310	74	61
1	—16	350	—10	304	75	59

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от параметра неоднородности β при $k = 10^{-3}$ ($j = 2$) и $k = 10^2$ ($j = 1$) оказывается близкой к линейной:

$$K_1^{\pm} = 111 + 10\beta, \quad K_2^{\pm} = 980 + 100\beta$$
$$(K_j^{\pm} = k_j^I(\pm a)\,p^{-1}a^{-1/2}\cdot 10^3, \quad j = 1, 2)$$

Зависимость этих же величин от относительной жесткости включения k при $\beta = 0{,}5$ дана в табл. 1. В табл. 2 представлены значения $K_j^{\pm}$ ($j = 1, 2$) в зависимости



Фиг. 2

от параметра неоднородности β при $k = 0{,}1$ и $k = 10$ (в последнем случае $K_2^{\pm} = 1$ для всех β).

На фиг. 2 показано распределение касательных напряжений $(a^2 - x^2)^{1/2}\sigma_{xy}(x/a)\cdot 10$ по осевой линии $-a < x < a$, $y = 0$ включения при $k = 10^3$ (кривые *1*) и нормальных смещений $2\mu(x)\, v(x)/(ap)$, найденных по формуле (3.7) для податливого включения при $k = 10^{-3}$ (кривые *2*), при $\beta = 0$ (сплошные линии) и $\beta = 0{,}5$ (штриховые линии).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gerasoulis A., Srivastav R. P.* A Griffith crack problem for a nongomogeneous medium// Intern. J. Eng. Sci. 1980. V. 18. № 1. P. 239—247.
2. *Delale F., Erdogan F.* The crack problems for a nonhomogeneous plane // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. № 3. P. 609—614.
3. *Чобанян К. С., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1967. Т. 20. № 6. С. 19—29.
4. *Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т.* Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями / ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 520—529.
5. *Евтушенко А. А.* Упругое равновесие составной плоскости с произвольно расположенным тонким упругим включением // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 875—881.
6. *Krenk S.* A quadrature formula of closed type for solution of singular integral equations // Rept. Dan. Center Appl. Math. and Mech. 1976. № 113. P. 16.

Львов

Поступила в редакцию
26.X.1987