

УДК 539.3

И. С. Зорин, С. А. Назаров

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуется пограничный слой вблизи жестко заземленного края тонкой трехмерной пластины, находящейся под действием изгибающих нагрузок. Показано, что учет следующего члена в асимптотике прогиба вызывает появление неоднородностей в граничном условии на крае пластины. Доказано, что вдали от края разность решения задачи в измененной постановке и трехмерного решения обратно пропорциональна толщине пластины (для решения Кирхгофа погрешность обратно пропорциональна квадрату толщины; вблизи края точность обоих решений одинакова). Найден поправочный член в представлении собственных частот изгибных колебаний и проведено сравнение с теорией Рейсснера.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — область на плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченная замкнутым простым гладким (класса C^∞) контуром $\partial\Omega$, Q — цилиндр $\{x: y = (x_1, x_2) \in \Omega, |x_3| < 1/2h\}$ малой высоты h с боковой поверхностью S_h и основаниями Γ_h^\pm . Рассмотрим трехмерную задачу теории упругости

$$\mu\Delta u(h, x) + (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} u(h, x) + h^{-1}f(y) e^{(3)} = 0, \quad x \in Q_h \quad (1.1)$$

$$\sigma^{(3)}(u; h, x) = p_\pm(y) e^{(3)}, \quad x \in \Gamma_h^\pm \quad (1.2)$$

$$u(h, x) = 0, \quad x \in S_h \quad (1.3)$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе, $e^{(j)}$ — орт в \mathbb{R}^3 , $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений, p_\pm и $h^{-1}f$ — поперечная нагрузка и массовые силы, $\sigma^{(3)} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$, σ_{jk} — декартовы компоненты тензора напряжений $\sigma(u)$, $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, индекс k после запятой означает дифференцирование по x_k . Масштабированием характерный размер области Ω сведем к единичному; тогда малый параметр h и координаты станут безразмерными. Найдем несколько первых членов асимптотики при $h \rightarrow 0$ решения u задачи (1.1)—(1.3). Воспользуемся вариантом известного алгоритма [1—4] построения асимптотических разложений.

2. Внутреннее решение. Вдали от S_h представим решение в виде формального ряда

$$u(h, x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{j-3} (V^j(y) + hU^j(y, h^{-1}x_3)) \quad (2.1)$$

$$V^q = e^{(3)}w^q, \quad q = 0, 1; \quad V^j = (v^j, w^j), \quad v^j = (v_1^j, v_2^j)$$

где компоненты $U_k^j(y, \zeta)$ ($k = 1, 2, 3$) имеют нулевые средние $\langle U_k^j \rangle(y)$ по $\zeta \in (-1/2, 1/2)$; $\zeta = h^{-1}x_3$.

Обозначим L и B матричные дифференциальные операторы из левых частей уравнений (1.1) и (1.2). Можно проверить, что в координатах y, ζ они представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} L(\partial/\partial x) &= h^{-2}L^0(\partial/\partial \zeta) - h^{-1}L^1(\partial/\partial y, \partial/\partial \zeta) - L^2(\partial/\partial y) \\ B(\partial/\partial x) &= h^{-1}B^0(\partial/\partial \zeta) - B^1(\partial/\partial y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$L^0(\partial/\partial \zeta) = M\partial^2/\partial \zeta^2, \quad B^0(\partial/\partial \zeta) = M\partial/\partial \zeta, \quad M = \operatorname{diag}(\mu, \mu, \lambda + 2\mu)$$

Подставим (2.1), (2.2) в (1.1), (1.2) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях h . Получим рекуррентные системы уравнений с параметром $y \in \Omega$ для определения вектор-функций U^j .

$$\begin{aligned} L^\circ U^j &= L^1 U^{j-1} + L^2 (U^{j-2} + V^{j-1}) - \delta_{j,3} f e^{(3)}, \quad \zeta \in (-1/2, 1/2) \\ B^\circ U^j &= B^1 (U^{j-1} + V^j) + \delta_{j,3} p_\pm e^{(3)}, \quad \zeta = \pm 1/2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решая последовательно задачи (2.3), $j = 0, 1, 2$, имеем

$$U^0 = -\zeta \nabla w^\circ, \quad U^1 = 1/2 v (1 - v)^{-1} (\zeta^2 - 1/12) \Delta_y w^\circ e^{(3)} - \zeta \nabla w^1 \quad (2.4)$$

$$U^2 = 1/2 (1 - v)^{-1} \{ 1/3 [\zeta^3 (2 - v) + 1/4 (v - 6) \zeta] \nabla \Delta_y w^\circ + \\ + v (\zeta^2 - 1/2) \Delta_y w^1 e^{(3)} \} - \zeta \nabla w^2$$

$$\nabla = (\nabla, 0), \quad \nabla = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2), \quad \Delta_x = \nabla \cdot \nabla$$

где точкой обозначено скалярное произведение. Условием разрешимости задачи (2.2) ($j = 3$) является уравнение Софи Жермен

$$D \Delta_y^2 w^\circ(y) = p_+(y) - p_-(y) + f(y), \quad y \in \Omega; \quad D = E [12(1 - v^2)]^{-1} \quad (2.5)$$

где D — приведенная ($h = 1$) цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Решение U^3 имеет вид

$$U^3 = [4\mu(1 - \nu)]^{-1} \{ [1/2(3 - \nu^2)(\zeta^2 - 1/12) - (1 - \nu^2)(\zeta^4 - 1/80)(p_+ - \\ - p_- + f) + (1 - 2\nu)[\zeta(p_+ + p_-) - (\zeta^2 - 1/12)f] \} e^{(3)} + 1/6 \zeta (1 - \\ - \nu)^{-1} [\zeta^2(2 - \nu) + 1/4(\nu - 6)] \nabla \Delta_y w^1 + \nu (1 - \nu)^{-1} [1/2(\zeta^2 - \\ - 1/12) \Delta_y w^2 - \zeta \nabla \cdot v^3] e^{(3)} \quad (2.6)$$

Для того чтобы стала разрешимой задача (2.3) ($j = 4$), необходимо выполнение трех условий. Во-первых, это аналогичное (2.5) уравнение

$$D \Delta_y^2 w^1(y) = 0, \quad y \in \Omega \quad (2.7)$$

и, во-вторых, система двух уравнений, описывающая обобщенное плоско-напряженное состояние

$$\begin{aligned} \mu \Delta_y v^3(y) + \mu(1 + \nu)(1 - \nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot v^3(y) = \\ = 1/2 \nu (1 - \nu)^{-1} \nabla (p_+ + p_-)(y), \quad y \in \Omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Задача для пограничного слоя. Ряд (2.1) не удовлетворяет условию (1.3) на боковой поверхности S_h цилиндра. Как известно, возникающая невязка компенсируется при помощи пограничного слоя. Введем в окрестности Γ множества $\overline{S_h}$ координаты n, x_3, s , где n и s — внутренняя нормальная и касательная составляющие. Решение типа пограничного слоя представим в виде $z = (z_n, z_3, z_s)$. Положим $\eta = (h^{-1}n, h^{-1}s)$. Операторы L и B , записанные в координатах n, x_3, s , допускают расщепления в следующие формальные ряды:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{j-2} P^j\left(\eta, s, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial s}\right), \quad (3.1)$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{-1} Q^j\left(\eta, s, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial s}\right)$$

Ясно, что операторы P° и Q° не содержат дифференцирования по s , а их коэффициенты постоянны. Более того, $P^\circ(\partial/\partial \eta) = L(\partial/\partial \eta, 0)$, $Q^\circ(\partial/\partial \eta) = B(\partial/\partial \eta, 0)$. Итак, из (1.1)–(1.3) получается краевая задача для определения пограничного слоя

$$\begin{aligned} P^\circ(\partial/\partial \eta) z(\eta) + H(\eta) = 0, \quad \eta \in \Pi; \quad z(0, \eta_2) = \Phi(\eta_2), \quad |\eta_2| < 1/2, \\ Q^\circ(\partial/\partial \eta) z(\eta_1, \pm 1/2) = G^\pm(\eta_1), \quad \eta_1 \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Задача (3.2) рассматривается в полуполосе $\Pi = \{\eta \in \mathbb{R}^2: \eta_1 > 0, |\eta_2| < 1/2\}$ и разбивается на две: плоскую задачу теории упругости (первые две строки) и задачу об антиплоском сдвиге (третья строка). Кроме того, данные ее параметрически зависят от переменной s ; для сокращения обозначений символ s опускается.

Следующие утверждения в существенном известны и получаются конкретизацией общих результатов [5, 6]. (Необходимые для этого вычисления можно найти, например, в [4]; см. также [7, 8].)

Предложение 1. 1°. Пусть правые части уравнений (3.2) экспоненциально убывают при $\eta_1 \rightarrow +\infty$. Тогда существует единственное решение z задачи (3.2) с ограниченными компонентами z_n и z_s . Для него при некотором $\delta > 0$ имеет место асимптотическое разложение

$$z(\eta) = C + (-\eta_2 C_4, \eta_1 C_4, 0) + o(\exp(-\delta\eta_1)), \quad \eta_1 \rightarrow +\infty \quad (3.3)$$

2°. Существуют в точности четыре линейно независимых решения

$$Y^{(j)}(\eta) = \Psi^{(j)}(\eta) + X^{(j)}(\eta), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4)$$

однородной задачи (3.2), растущие на бесконечности не быстрее степени η_1 . В (3.4) $X^{(j)}$ — подчиненные условиям 1° решения задачи (3.2) с правыми частями $H = 0$, $G^\pm = 0$, $\Phi(\eta_2) = -\Psi^{(j)}(0, \eta_2)$, векторы $\Psi^{(j)}$ задаются равенствами

$$\Psi^{(1)}(\eta) = \left(\eta_1, -\frac{v\eta_2}{1-v}, 0 \right), \quad (3.5)$$

$$\Psi^{(2)}(\eta) = \left(\frac{1}{2} \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{2-v}{1-v} \frac{\eta_2^3}{6} + \frac{\eta_2(v-6)}{24(1-v)}, \frac{\eta_1^3}{6} + \frac{v\eta_1}{2(1-v)} \left(\eta_2^2 - \frac{1}{12} \right), 0 \right),$$

$$\Psi^{(3)}(\eta) = (0, 0, \eta_1), \quad \Psi^{(4)}(\eta) = \left(-\eta_1\eta_2, \frac{1}{2} \left(\eta_1^2 + \frac{v}{1-v} \left(\eta_2^2 - \frac{1}{12} \right) \right), 0 \right)$$

3°. Постоянные $C = (C_1, C_2, C_3)$ и C_4 из (3.3) вычисляются по формулам

$$C_j = \alpha_j \Lambda(G^\pm, H, \Phi; Y^{(j)}), \quad j = 1, 2, 4 \quad (3.6)$$

$$C_3 = \mu^{-1} \int_{\Pi} \eta_1 H_3(\eta) d\eta + \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_3(\eta_2) d\eta_2 + \mu^{-1} \sum_{\pm} \int_0^{\infty} \eta_1 G_3^\pm(\eta_1) d\eta_1$$

$$\alpha_1 = (12D)^{-1}, \quad \alpha_4 = -\alpha_2 = D^{-1},$$

$$\Lambda(G^\pm, H, \Phi; Y) = \int_{\Pi} Y'(\eta) \cdot H(\eta) d\eta + \int_{-1/2}^{1/2} T^{(1)}(Y; 0, \eta_2) \cdot \Phi(\eta_2) d\eta_2 +$$

$$+ \sum_{\pm} \int_0^{\infty} Y'(\eta_1, \pm 1/2) \cdot G^\pm(\eta_1) d\eta_1, \quad Y' = (Y_1, Y_2, 0)$$

Применяя формулы (3.3), (3.6) к решению (3.4), $j = 4$, приходим к следующему утверждению.

Предложение 2. Справедливы соотношения

$$X^{(4)}(\eta) = (c(v)\eta_2, b(v) - c(v)\eta_1, 0) + o(\exp(-\delta\eta_1)), \quad \eta_1 \rightarrow +\infty \quad (3.7)$$

$$c(v) = D^{-1} \mathfrak{E}(X^{(4)}, X^{(4)}; \Pi)$$

$$\mathfrak{E}(X, Y; \Pi) = E^{-1} (1+v) \int_{\Pi} \sum_{j,k=1}^2 [T_{jk}(X) T_{jk}(Y) - v T_{jj}(X) T_{kk}(Y)] d\eta$$

$$T^{(1)} = (T_{11}, T_{12}, 0); \quad T_{jk}(z) = \mu (\partial z_k / \partial \eta_j + \partial z_j / \partial \eta_k) + \delta_{j,k} \lambda \nabla_{\eta} \cdot z$$

$$T_{j3}(z) = T_{3j}(z) = \mu \partial z_3 / \partial \eta_j, \quad T_{33}(z) = \lambda \nabla_{\eta} \cdot z, \quad j, k = 1, 2$$

Зависимость величины $c(v)$ от коэффициента Пуассона, определенная при помощи вычислений на ЭВМ, представлена на фиг. 1.

4. **Граничные условия на $\partial\Omega$.** С целью компенсировать невязку ряда (2.1) в краевом условии (1.3) будем искать пограничный слой в виде

$$z(h, x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{j-3} z^j(h^{-1}n, h^{-1}x_3, s) \quad (4.1)$$

где $\eta \rightarrow z^j(\eta, s)$ — экспоненциально убывающие при $\eta_1 \rightarrow +\infty$ вектор-функции. С точностью $O(h^{-1})$ упомянутая невязка на S_h в координатах η, s равна $-h^{-3}(0, w^0(s, 0), 0) + h^{-2}(\eta_2 w_{,n}^0(s, 0), -w^1(s, 0), \eta_2 w_{,s}^0(s, 0))$. Согласно предложению 1, 3^o задача (3.2) с соответствующими правыми частями имеет исчезающие на бесконечности решения z^0 и z^1 лишь в том случае, если выполнены следующие равенства:

$$w^0(y) = 0, \quad (\partial w^0 / \partial n)(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega \quad (4.2)$$

$$w^1(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega \quad (4.3)$$

При этом $z^0 = z^1 = 0$. Далее, вектор z^2 есть решение задачи (3.2), в которой $H = 0$, $G^{\pm} = 0$ и

$$\Psi(\eta_2) = (\eta_2 w_{,n}^1(s, 0), -1/2\nu(1-\nu)^{-1}(\eta_2^2 - 1/12)\Delta_y w^0(s, 0) - w^2(s, 0), 0) \quad (4.4)$$

Сравнивая (4.4) с указанными в предложении 1 краевыми условиями (3.5) для решения $X^{(4)}$, находим, что

$$z^2(\eta, s) = w_{,n}^1(s, 0)(\eta_2 e^{(\eta_2)} - \eta_1 e^{(\eta_1)}) - e^{(\eta_2)} w^2(s, 0) + X^{(4)}(\eta) \Delta_y w^0(s, 0) \quad (4.5)$$

Применяя предложение 2, получаем, что требование экспоненциального убывания вектора (4.5) дает равенства

$$w_{,n}^1(y) + c(\nu) \Delta_y w^0(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega \quad (4.6)$$

$$w^2(y) = b(\nu) \Delta_y w^0(y), \quad y \in \partial\Omega \quad (4.7)$$

Соотношения (4.2), (4.3), (4.6) доставляют необходимые краевые условия для уравнений (2.5), (2.7).

5. **Оправдание асимптотического разложения.** Найдем сначала первые члены асимптотики компонент тензора напряжений, которые порождаются суммой рядов (2.1) и (4.1). Согласно (2.4), (2.6), вдали от боковой поверхности S_h положим

$$\sigma_{jk}^* = -12D\zeta h^{-2} [\nu \delta_{j,k} \Delta_y + (1-\nu) \partial^2 / \partial y_j \partial y_k] (w^0 + hw^1) \quad (5.1)$$

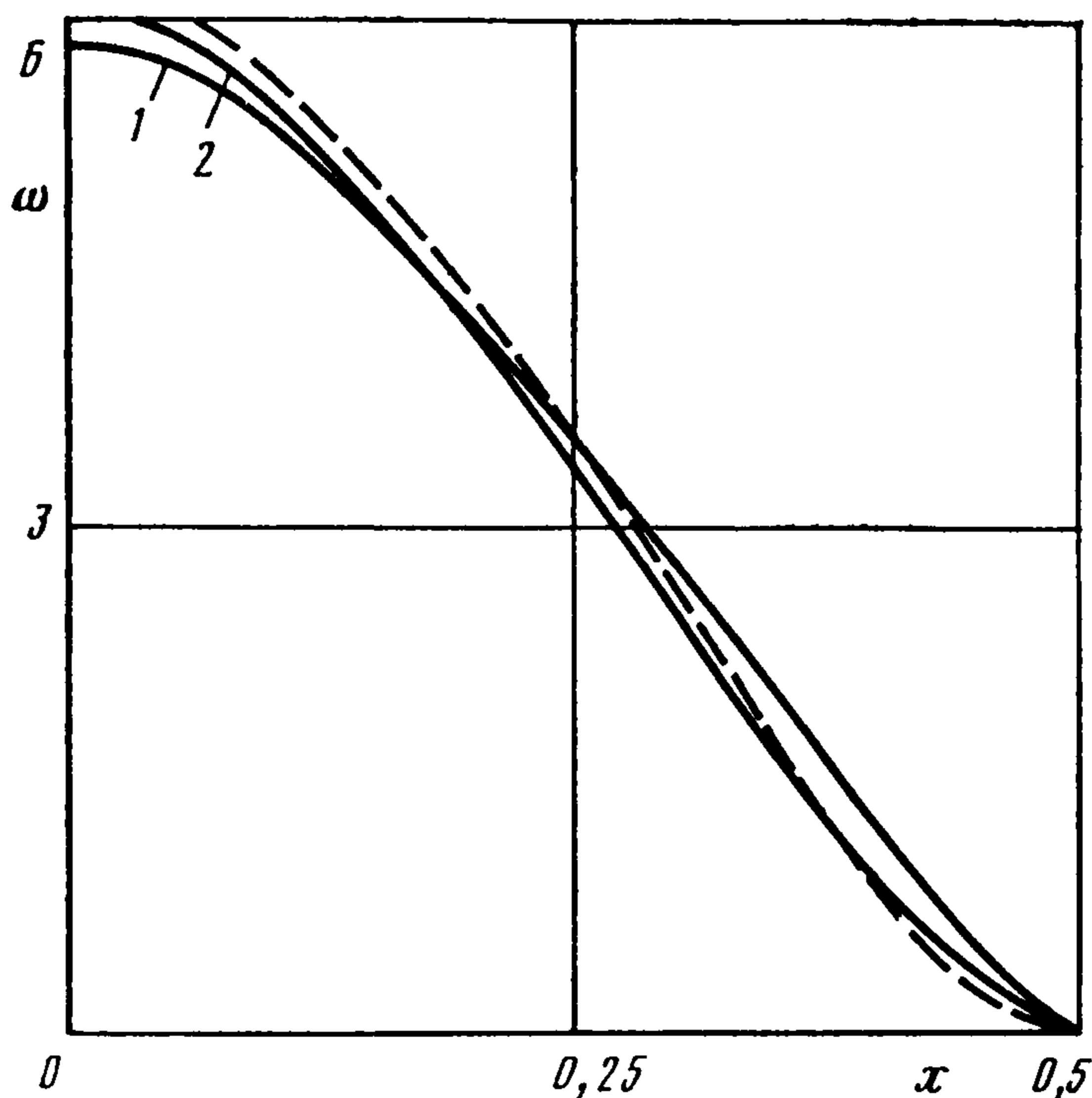
$$\sigma_{j3}^* = 6Dh^{-1} (\zeta^2 - 1/4) (\partial / \partial y_j) \Delta_y (w^0 + hw^1), \quad j, k = 1, 2$$

$$\sigma_{33}^* = 1/2 (p_+ + p_- - 2\zeta f + \zeta (3 - 4\zeta^2) (p_+ - p_- + f))$$

Пограничный слой дает дополнительное поле напряжений вблизи края пластины. Соответствующий тензор σ^z , записанный в координатах n, x_3, s , вычисляется по смещениям $h^{-1}\chi(z^2 + b(\nu) \Delta_y w^0 e^{(\eta_2)})$ (причины введения слагаемого $b(\nu) \Delta_y w^0 e^{(\eta_2)}$ поясняются перед предложением 4) при помощи обычных формул для плоскодеформированного состояния и равен

$$\|T_{p,q}(h^{-1}\chi[z^2 + e^{(\eta_2)} b(\nu) \Delta_y w^0])\|_{p,q=1}^3$$

где χ — гладкая срезающая функция, величины T_{jk} указаны в предложении 1, 3^o. Подчеркнем, что в силу предложения 2 невязки, возникающие из-за умножения на срезку $\chi(n)$, экспоненциально малы.



Фиг. 1

Вектор смещений $u^\circ = h^{-3}e^{(3)}w^\circ + h^{-2}U^\circ$ (см. (2.1), (2.4)) и напряжения σ° (в первых двух формулах (5.1) отброшены члены порядков $O(h^{-1})$, $O(1)$ соответственно) назовем основным приближением к решению задачи (1.1)—(1.3). По аналогии смещения $u^1 = h^{-3}e^{(3)}(w^\circ + hw^1) + h^{-2}(U^\circ + hU^1) + \chi h^{-1}(z^2 + b(v)\Delta_y w^\circ e^{(3)})$ и напряжения $\sigma^1 = \sigma^* + \sigma^z$ следует считать приближениями второго порядка. Последнее нуждается в обосновании. Известно [9, 10] утверждение, касающееся основного члена асимптотики.

Предложение 3. Пусть $f, p_\pm \in L_2(\Omega)$. Тогда для решения задачи (1.1)—(1.3) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \| (d+h)^{-2}(u_3 - u_3^\circ) \| + h^{-1} \| (d+h)^{-1}(u_j - u_j^\circ) \| + \| (d+h)^{-1}\nabla_y(u_3 - u_3^\circ) \| + \\ & + h^{-1} \| \nabla(u_j - u_j^\circ) \| + h \| (d+h)^{-2}(\partial/\partial x_3)(u_3 - u_3^\circ) \| + \quad (5.2) \\ & + \| (d+h)^{-1}(\partial/\partial x_3)(u_j - u_j^\circ) \| + h^{-1} \| \sigma_{jk}(u) - \sigma_{jk}^\circ \| + \\ & + \| (d+h)^{-1}(\sigma_{j3}(u) - \sigma_{j3}^\circ) \| + h^{-1} \| \sigma_{33}(u) - \sigma_{33}^\circ \| \leq ch^{-2}\Xi_0 \end{aligned}$$

Здесь всюду вычисляется норма в $L_2(Q_h)$; индексы j, k принимают значения 1, 2; $d(y)$ — расстояние от точки y до $\partial\Omega$; постоянная c не зависит от h ; Ξ_α — сумма норм величин f, p_\pm в $W_2^\alpha(\Omega)$, $\alpha = 0, 1$.

Если $f, p_\pm \in W_2^1(\Omega)$, то из (2.5), (2.2) и (2.7), (4.3), (4.6) получаем, что $w^\circ \in W_2^5(\Omega)$, $w^1 \in W_2^4(\Omega)$, $\Delta w^\circ \in W_2^3(\Omega)$. Поэтому второе приближение обладает необходимой гладкостью. Кроме того, погрешности, оставленные в уравнениях (1.1)—(1.3), имеют структуру погрешностей первого приближения, а порядок их при $h \rightarrow 0$ на единицу больше. Подчеркнем особо, что краевое условие (1.3) удовлетворено благодаря наличию слагаемого $\chi h^{-1}b(v)\Delta_y w^\circ$ в u_3^1 . Это выражение гладко зависит от переменных $y \in \bar{\Omega}$, его невязка в уравнениях (1.1), (1.2) мала; устранение такого убывающего члена пограничного слоя происходит на следующем шаге алгоритма (см. (4.7)). Из сказанного выше вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть $f, p_\pm \in W_2^1(\Omega)$. Если вычитаемые слева в (5.2) заменить вторым приближением к решению задачи (1.1)—(1.3), то мажоранта примет вид $c_1 h^{-1}\Xi_1$.

Предложение 4, в частности, показывает, что оценка (5.2) не улучшаемая и асимптотически точная, поскольку нормы слева в (5.2), вычисленные для пограничного слоя, имеют порядок h^{-2} .

Обратим внимание на следующий важный факт. Предложения 5 и 4 дают оценки асимптотических приближений лишь в среднем (в энергетической метрике). Вместе с тем при помощи локальных оценок [11] решений общих эллиптических краевых задач можно вывести [12] оценки решений задачи (1.1)—(1.3) в пространствах Гельдера $C^{l,\alpha}(Q_h \setminus \Upsilon_h)$, Υ_h — малые окрестности особых линий — ребер $\partial\Omega \times \{\pm 1/2h\}$. К сожалению, полученные таким способом неравенства неудовлетворительны: из-за малости «толщины» области Q_h упомянутые оценки содержат параметр h , а постоянная $c(h)$ в окончательном неравенстве имеет степенной рост при $h \rightarrow 0$. Возможность построить младшие члены асимптотики устраняет указанный недостаток. Достаточно взять некоторое количество «лишних» членов ряда, воспользоваться грубой оценкой в пространствах Гельдера, а затем, вычисляя непосредственно нормы этих членов, отнести их в остаток. Подчеркнем, что результаты [13] об эллиптических краевых задачах с ребрами на границе позволяют распространить оценку на весь цилиндр Q_h .

Приведем неравенство для приближения второго порядка в предположении, что правые части в (1.1), (1.2) обладают достаточной гладкостью:

$$|u_3 - u_3^1| + h^{-1} \{ |u_j - u_j^1| + d_* |\sigma(u) - \sigma^1| \} \leq ch^{-1} \quad (5.3)$$

Здесь смещения и напряжения вычисляются в любой точке $x \in \bar{Q}_h$; $d_*(x)$ — расстояние от x до ребер $\partial\Omega \times \{\pm 1/2h\}$. Отметим, что оценка (5.3) остается в силе, если смещение u_3^1 определять без учета пограничного слоя.

Далее понадобится оценка близости вектора $u^* = h^{-3}e^{(3)}(w^0 + hw^1) + h^2(U^0 + hU^1)$ и тензора σ^* к решению задачи (1.1)–(1.3). Так как пограничный слой сконцентрирован в малой окрестности боковой поверхности S_h , то его влияние можно устранить за счет введения в нормы из левой части (5.2) дополнительных весовых множителей $d + h$. Таким образом, при помощи оценки из предложения 4 получается следующее утверждение.

Предложение 5. Пусть $f, p_{\pm} \in W_2^1(\Omega)$. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \| (d+h)^{-1}(u_3 - u_3^*) \| + h^{-1} \| u_j - u_j^* \| + \| \nabla_y (u_3 - u_3^*) \| + \\ & + h^{-1} \| (d+h) \nabla (u_j - u_j^*) \| + h \| (d+h)^{-1} (\partial/\partial x_3)(u_3 - u_3^*) \| + \\ & + \| (\partial/\partial x_3)(u_j - u_j^*) \| + h^{-1} \| (d+h) (\sigma_{jk}(u) - \sigma_{jk}^*) \| + \| \sigma_{j3}(u) - \sigma_{j3}^* \| + \\ & + h^{-1} \| (d+h) (\sigma_{33}(u) - \sigma_{33}^*) \| \leq ch^{-1} \Xi_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Отметим, что оценки (5.2) и (5.4) имеют одинаковую точность в Ch — окрестности S_h , но вдали от боковой поверхности цилиндра Q_h (в зоне $d + h \sim 1$) оценка (5.4) точнее на один порядок.

6. Объединенная задача. Скаляры w^0 и w^1 являются решениями однотипных задач (2.5), (4.2) и (2.7), (4.3), (4.6). Поэтому естественно объединить их краевые условия, поставив новую краевую задачу, решение которой с точностью $O(h^2)$ совпадает с суммой $w^0 + hw^1$. Простейшей такой задачей является

$$D\Delta_y^2 w^*(h, y) = p_+(y) - p_-(y) + f(y), \quad y \in \Omega \quad (6.1)$$

$$w^*(h, y) = 0, \quad (\partial w^*/\partial n)(h, y) + c(v)h\Delta_y w^*(h, y) = 0, \quad y \in \partial\Omega$$

Однако функционал энергии, отвечающий (6.1), положительно определен лишь при $v = 0$ (при $v > 0$ постоянная $c(v)$ положительна в силу (3.7)). Для того чтобы построить объединенную краевую задачу с положительным функционалом энергии, введем регулярно возмущенную область $\Omega_h = \{y \in \Omega: n > c(v)h\} \subset \Omega$. Иными словами, удалим из области Ω пограничную полосу малой ширины, в которой существенно влияние закрепления края пластины. В Ω_h рассмотрим задачу

$$D\Delta_y^2 w^*(h, y) = p_+(y) - p_-(y) + f(y), \quad y \in \Omega_h \quad (6.2)$$

$$w^*(h, y) = (\partial w^*/\partial n)(h, y) = 0, \quad y \in \partial\Omega_h \quad (6.3)$$

Предложение 6. Если $f, p_{\pm} \in W_2^1(\Omega)$, то для решения задачи (6.2), (6.3) верна оценка

$$\| w^* - w^0 - hw^1; W_2^3(\Omega_h) \| \leq ch^2$$

где w^0 и w^1 удовлетворяют условиям (2.5), (4.2), и (2.7), (4.3), (4.6).

Доказательство. Разложим w^0 и w^1 в ряды Тейлора по переменной n и подставим сумму $w^0 + hw^1$ в краевое условие (6.3). При $n = c(v)h$ имеем

$$\begin{aligned} & w^0(y) + hw^1(y) = hw^1(0, s) + O(h^2) \\ & \frac{\partial w^0}{\partial n}(y) + h \frac{\partial w^1}{\partial n}(y) = h \left(\frac{\partial w^1}{\partial n}(0, s) + c(v) \frac{\partial^2 w^0}{\partial n^2}(0, s) \right) + O(h^2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Поскольку в силу (4.2) $\partial^2 w^0/\partial n^2 = \Delta w^0$ на $\partial\Omega$, то из (4.3), (4.6) следует, что правые части имеют порядок h^2 . Остается воспользоваться оценками решений эллиптических задач (так как возмущение области регулярно, то, согласно [14, 15], постоянная в соответствующем неравенстве не зависит от h).

Аналогично (2.4) положим

$$U^* = h^{-3} e^{(3)} [w^* + 1/12 h^2 \nu (1 - \nu)^{-1} (\zeta^2 - 1/12) \Delta_y w^*] - h^{-2} \xi \nabla w^* \quad (6.5)$$

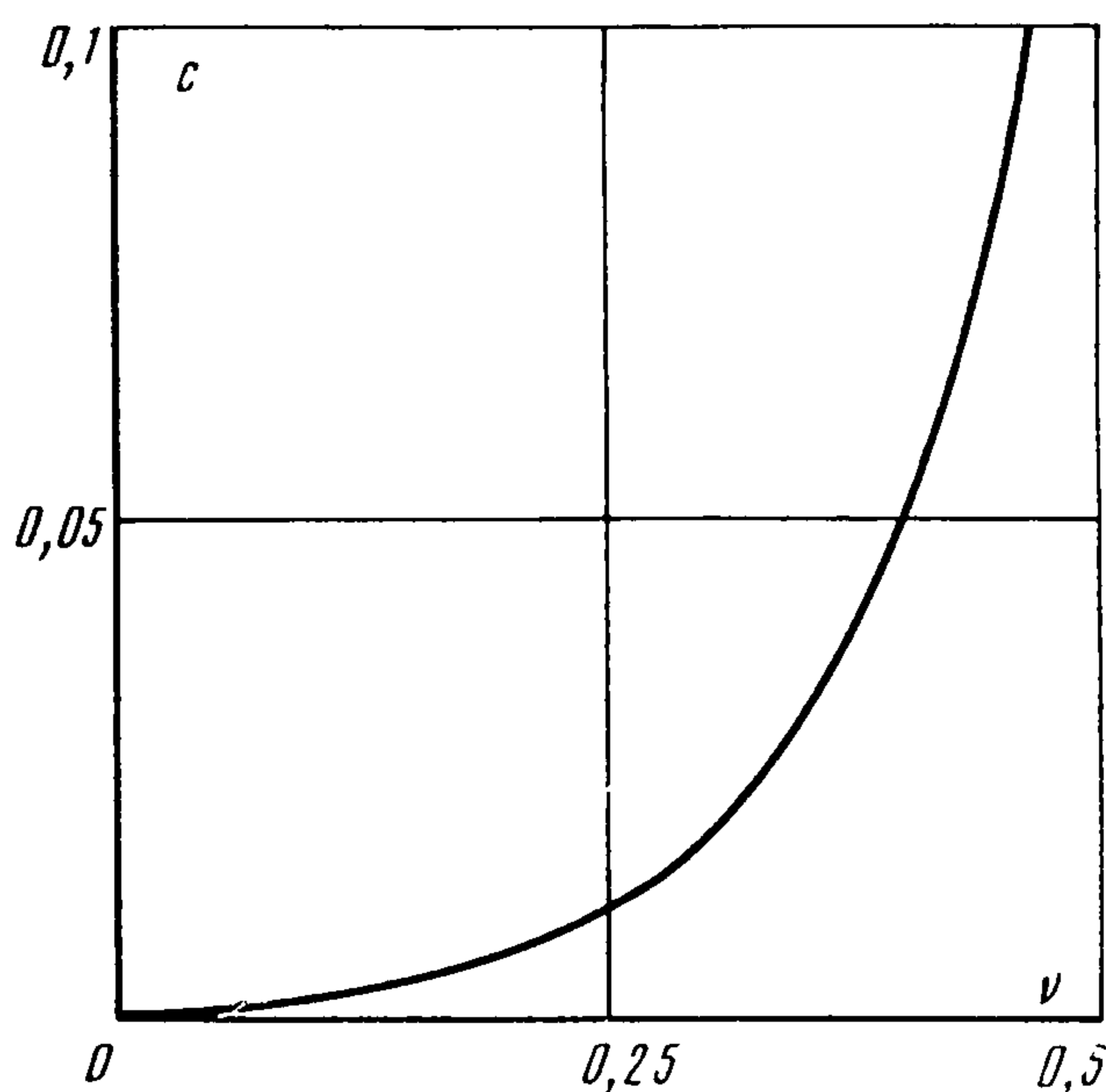
и обозначим Σ_{jk}^* , Σ_{j3}^* , Σ_{33}^* напряжения, вычисленные по формулам (5.1), в которых сумма $w^0 + hw^1$ заменена на w^* . Из предложений 6 и 5 вытекает

Предложение 7. Если $f, p_{\pm} \in W_2^1(\Omega)$, то верно неравенство (5.4), в котором вместо u^* , σ^* участвуют величины U^* , Σ^* .

7. Пример. Для оценки точности приближенных формул проведен расчет на ЭВМ с использованием двумерных конечных элементов задачи об изгибе постоянной поперечной нагрузкой балки, заземленной по торцам, при $\nu = 0,3$, $h = 0,2$, $\Omega = (-1/2, 1/2)$. Двучленные асимптотические разложения прогиба балки, определенные согласно предложениям 6 и 4, совпадают с точностью $O(h^{-1})$ и задаются равенствами

$$\begin{aligned} w^*(x, h) &= 2pD^{-1}h^{-3} (x^2 - (c(\nu)h - 1/2)^2)^2 \\ h^{-3}w_0(x) + h^{-2}w_1(x) &= 2pD^{-1}h^{-3} (x^2 - 1/4) (x^2 + 2c(\nu)h - 1/4) \end{aligned} \quad (7.1)$$

(координаты безразмерные). Графики расчетов на ЭВМ (кривая 1), функции (7.1) (кривая 2) и решения Кирхгофа (штриховая кривая) представлены на фиг. 2; $\omega = (2p)^{-1} wD$. Отметим, что в срединной части балки относительная погрешность вычислений нормальных смещений (по сравнению с численным решением) по теории Кирхгофа составляет 5—6%, а использованием формул (7.1) — не превышает 1—2%.



Фиг. 2

8. Изгибные колебания пластины. Согласно предложению 7, решение задачи (6.2), (6.3) доставляет асимптотическое приближение повышенной точности вдали от края S_h пластины Q_h . Это обстоятельство естественно использовать для нахождения уточненной асимптотики собственных частот. Система уравнений

$$\mu \Delta u(h, x) + (\lambda + \mu) \text{grad div } u(h, x) + \rho k(h)^2 u(h, x) = 0, \quad x \in Q_h \quad (8.1)$$

с однородными краевыми условиями (1.2), (1.3) (в предположении, что u_3 — четная, а u_1, u_2 — нечетные функции переменной x_3) описывает изгибные колебания пластины. Известно, что решения спектрального уравнения

$$D\Delta_y^2 w^0(y) = \rho k_0^2 w^0(y), \quad y \in \Omega \quad (8.2)$$

с граничными условиями (4.2) дают асимптотику $k^{(n)}(h) = hk_0^{(n)} + O_n(h^2)$ собственных частот таких колебаний (оценка остатка ухудшается с возрастанием номера $n = 1, 2, \dots$). Совмещая результаты, полученные в предыдущих разделах, с известной процедурой построения асимптотики собственных чисел сингулярно возмущенных эллиптических краевых задач (см., например, [6], гл. 2), получаем, что решение спектрального уравнения

$$D\Delta_y^2 w^*(y, h) = \rho k_*(h)^2 w^*(y, h), \quad y \in \Omega_h \quad (8.3)$$

с условиями (6.3) на $\partial\Omega_h$ доставляет приближение к $k(h)$ с повышенной точностью $O_n(h^3)$. Сформулируем соответствующее утверждение.

Предложение 8. Справедливы соотношения $k^{(n)}(h) = hk_*^{(n)}(h) + O(h^3)$, где $n = 1, 2, \dots$, $k^{(n)}(h)$ и $k_*^{(n)}(h)$ — расположенные в по-

рядке неубывания (с учетом кратностей) собственные частоты задач (8.1), (1.2), (1.3) и (8.3), (4.2).

Укажем еще одно асимптотическое представление для $k(h)$. Допустим, что $\Lambda_0 = D^{-1}\rho k_0^2$ — простое собственное число задачи Дирихле для бигармонического оператора, а отвечающую ему собственную функцию нормируем в $L_2(\Omega)$. Повторяя выкладки из разд. 2, 4, получаем, что величина Λ_1 в представлении

$$\Lambda(h) = h^2 (\Lambda_0 + h\Lambda_1 + O(h^2)) \quad (8.4)$$

собственного числа оператора задачи (1.1)–(1.3) находится при решении уравнения $\Delta_y^2 w^1 = \Lambda_0 w^1 + \Lambda_1 w^0$ с граничными условиями (4.3), (4.6). При помощи формулы Грина условия разрешимости такой задачи приводятся к виду

$$\Lambda_1 = c(\nu) \int_{\partial\Omega} |\Delta_y w^0(y)|^2 ds \quad (8.5)$$

Таким образом, справедливо соотношение $k(h) = hk_0(1 + \frac{1}{2}\rho^{-1}Dh\Lambda_1k_0^{-2} + O(h^2))$; по поводу его обоснования см. [16]. Напомним, что D — приведенная ($h = 1$) цилиндрическая жесткость пластины. В силу (3.7), (8.4) Λ_1 — неотрицательная величина. Следовательно, собственные частоты в задаче (8.2), (4.2) дают приближения к собственным частотам изгибных колебаний пластины Q_h с недостатком.

Приведем разложение собственной частоты $k_R(h) = [D\rho^{-1}\Lambda_R(h)]^{1/2}$ изгибных колебаний пластин Рейсснера

$$\Lambda_R(h) = h^2 \left\{ \Lambda_0 + h^2 \left(\frac{1}{12}\Lambda_0 \int_{\Omega} |\nabla w^0|^2 dy - [5(1-\nu)]^{-1} \int_{\Omega} |\nabla \Delta w^0|^2 dy \right) + O(h^3) \right\} \quad (8.6)$$

где Λ_0 и w^0 — те же, что и в (8.4), (8.5). (Формулу (8.6) можно получить, используя результаты [17], при рассмотрении задачи теории пластин Рейсснера как сингулярного возмущения задачи теории Кирхгофа.) Сравнение (8.4), (8.5) и (8.6) показывает, что поправка h^3k_{1R} собственной частоты по теории Рейсснера отличается по порядку и не является знакоопределенной.

Формула (8.4) противоречит очевидному на первый взгляд неравенству $k(h) \leq k_0(h)$. Соответствующее «доказательство» для первых частот естественно проводить при помощи принципа Рэлея

$$\rho k(h)^2 = \inf \{ 2\mathcal{E}(u) \| u; L_2(Q_n) \|^2 \mid u \in W_2^1(Q_h), u = 0 \text{ на } S_h \} \quad (8.7)$$

$$\rho k_0^2 h^2 = \inf \{ 2h^2 \mathcal{E}_K(w) \| w; L_2(\Omega) \|^2 \mid w \in W_2^2(\Omega), w = \partial w / \partial n \text{ на } \partial\Omega \} \quad (8.8)$$

$$\mathcal{E}_K(w) = \frac{1}{2} D \| \Delta w; L_2(\Omega) \|^2$$

($\mathcal{E}(u)$ — энергия деформации трехмерной пластины). По функции w строится векторное поле смещений $u^w = (-x_3 \nabla_y w, w) \in W_2^1(Q_h)$, которое удовлетворяет краевым условиям на боковой поверхности пластины, и, казалось бы, $\inf \{ 2\mathcal{E}(u) \| u \|^2 \}$ на более узком множестве $\{u^w\}$ во всяком случае не меньше правой части (8.7). Ошибка заключается в том, что $\mathcal{E}(u^w) = (1 + \delta) h^3 \mathcal{E}_K(w)$, $\delta = \nu^2 (1 - 2\nu)^{-1}$, а на множестве $\{u^w\}$ нужно искать инфимум величины $2h^2 (1 + \delta) \mathcal{E}_K(w) (\|w\|^2 + \frac{1}{12}h^2 \|\nabla w\|^2)^{-1}$. Таким образом, применение здесь принципа Рэлея не дает априорной оценки для собственной частоты $k(h)$.

Отметим, что из-за малости величины $c(\nu)$ поправочный член $O(c(\nu)h)$ может быть меньше следующего члена асимптотики $O(h^2)$. Поэтому найденная поправка является в асимптотике определяющей лишь для тонких пластин (согласно расчетам на ЭВМ для $h \leq 1/20$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 27. Вып. 5. С. 593—608.
2. Зино Е. И., Тропп Э. А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
3. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
4. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 120 с.
5. Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces // Comm. Pure and Appl. Math. 1963. V. 16. № 2. P. 121—239.
6. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. V. 76. S. 29—60.
7. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. Об условиях затухания и предельном поведении на бесконечности решений системы уравнений теории упругости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 3. С. 550—553.
8. Gregory R. D., Wan F. V. M. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elast. 1984. V. 14. № 1. P. 27—64.
9. Шойхет Б. А. Одно энергетическое тождество в физически нелинейной теории упругости и оценки погрешности уравнений плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 317—326.
10. Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В. Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1032—1048.
11. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. 2 // Comm. Pure and Appl. Math. 1964. V. 17. № 1. P. 35—92.
12. Назаров С. А. Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1982. № 7. С. 65—68.
13. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. семинара С. Л. Соболева, 1978. № 2. С. 69—102.
14. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
15. Иванов Л. А., Котко Л. А., Крейн С. Г. Краевые задачи в переменных областях // Дифференциальные уравнения и их применения. Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР, 1977. Вып. 19. С. 6—161.
16. Назаров С. А. Асимптотические разложения собственных чисел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 109 с.
17. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3—122.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.II.1988