Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 539.3 : 534.1

С. А. Вакуленко

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВОЛН

Рассматриваются асимптотические решения, описывающие доменные стенки и волновые пучки в нелинейной сплошной среде. Форма этих стенок и ход пучков могут быть определены из простого вариационного принципа, обобщающего принцип Ферма линейной геометрической оптики на нелинейный случай.

1. Постановка задачи. Рассматриваются асимптотические решения для некоторых классов нелинейных уравнений. Изучаются следующие уравнения:

$$\Delta u+\omega^2 V_u'(u, \mathbf{x})=0, \quad u(\mathbf{x}): R^m \rightarrow R, \quad \mathbf{x} \in R^m \tag{1.1}$$

а также

$$\Delta u+\omega^2 \Phi_{|u|^2}'(|u|^2, \mathbf{x}) u=0, \quad u(\mathbf{x}) \in C, \quad \mathbf{x} \in R^k \tag{1.2}$$

где $\omega \gg 1$, $m \geqslant 1$, $k=2, 3$.

Уравнение (1.1) может быть применено (при $m=2$) в двумерных задачах теории упругости жидких кристаллов (эти приложения рассматриваются в разд. 4). Уравнение (1.2) используется для описания распространения излучения в нелинейной среде [1, 2]. В этом случае u — комплексная амплитуда поля, Φ' — нелинейный показатель преломления.

Рассматривались [3] специальные асимптотические (при $\omega \rightarrow \infty$) решения уравнений (1.1), (1.2). В данной работе будем применять ради краткости термин «сосредоточенное решение» (строгое определение можно найти в [3]).

Приведем пример сосредоточенного решения. Положим в (1.1) $m=1$, $\alpha>0$, $V_u'=\alpha^2(x) \sin u$. Тогда имеется асимптотическое решение вида

$$u=4 \operatorname{arctg}(\exp (\omega \alpha(x_0)(x-x_0)))+O(\omega^{-1})=u_0(x)+O(\omega^{-1}) \tag{1.3}$$

Функция $u_0(x)$ существенно изменяется в узкой области размером $O(\omega^{-1})$ вблизи точки x_0, а при $|x-x_0| \gg \omega^{-1}$ функция $u_0(x)$ экспоненциально мало отличается от 0 или 2π. Решение сосредоточено вблизи x_0. При $m>1$ такие решения уравнения (1.1) сосредоточены вблизи гиперповерхностей S в R^m, а уравнения (1.2) — вблизи кривых l. Решения уравнения (1.1) интерпретируются как доменные стенки, а уравнения (1.2) — как волновые пучки.

Основная цель работы — сформулировать простой вариационный принцип, позволяющий непосредственно по виду уравнений найти упомянутые выше гиперповерхности и кривые, минуя задачу нахождения главного члена u_0 асимптотики. Дело в том, что последняя задача может не иметь простого явного решения. Тем не менее часто удается найти область сосредоточения решения, не используя формул для u_0. Найденные вариационные принципы являются нелинейными обобщениями принципа Ферма геометрической оптики. Эти принципы справедливы для любых функций $V(u, \mathbf{x})$, удовлетворяющих условию 1 (см. ниже, разд. 2 в случае (1.1). Для задачи (1.2) при $\mathbf{x} \in R^3$ получить простой принцип типа Ферма удается только для потенциалов вида

$$\Phi = 2\alpha(\mathbf{x}) \mid u \mid^{p+2} (p+2)^{-1} + \beta(\mathbf{x}) \mid u \mid^2, \; p > 0, \; \alpha, \; \beta > 0 \quad (1.4)$$

2. Асимптотический формализм для уравнения (1.1). При произвольной функции V сосредоточенное решение уравнения (1.1) не обязано существовать. Достаточными являются следующие простые условия, смысл которых прояснится ниже:

Условие 1. $V \in C^\infty$, $|V| < C_1$ и для каждого $\mathbf{x}$ функция V имеет два локальных максимума $u_+(\mathbf{x})$, $u_-(\mathbf{x})$, таких, что

$$V_{\max} = V(u_+(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = V(u_-(\mathbf{x}), \mathbf{x}), \quad \min_{\mathbf{x}} | V_{uu}(u_+(\mathbf{x}), \mathbf{x}) | > \delta > 0 \quad (2.1)$$

Условие 2. Для всех локальных максимумов V, отличных от u_+, u_-, функция V в этих точках не превышает $V_{\max} - \delta_1$ $(\delta_1 > 0)$.

Можно положить без ограничения общности $V_{\max} = 0$. Для упрощения построений предположим также, что функции $u_\pm$ не зависят от x.

Метод аналогичен методу работы [4], где, однако, были рассмотрены при $m = 2$ другие, отличные от указанных выше достаточные условия.

Ищем решение уравнения (1.1), сосредоточенное в окрестности размером $O(\omega^{-1})$ вблизи гладкой гиперповерхности $S \subset R^m$. Эта гиперповерхность должна быть замкнутым многообразием. Введем в окрестности $\Omega(M_1)$ точки $M_1 \in S$ координаты n, s, где координаты $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, \ldots \ldots, s_{m-1})$ параметризуют $\Omega(M_1) \cap S$, $|n|$ — расстояние от точки M до ее проекции на S. Знак n выбирается в зависимости от того, с какой стороны от S находится точка M. Можно, например, взять окрестность Ω в виде шара диаметром $O(\omega^{-1/2})$. Тогда при $\omega \to \infty$ введенные координаты невырождены.

В окрестности Ω строим решение в виде

$$u = u_0(\nu, \mathbf{s}) + \omega^{-1} u_1(\nu, \mathbf{s}) + \ldots, \; \nu = \omega n \quad (2.2)$$

Запишем оператор Лапласа Δu из (1.1) в координатах n, $\mathbf{s}$, учитывая члены порядка ω^2, ω. Очевидно, что

$$\Delta u = \omega^2 u''_{\nu\nu} + \omega\varkappa(\mathbf{s}) u_\nu' + O(1) \quad (2.3)$$

Чтобы вычислить $\varkappa(\mathbf{s})$, подставим вместо u в (2.3) функцию, линейную по ν. Подобное вычисление имеется в [5]. Оказывается, что величина $\varkappa$ равна средней кривизне поверхности S (пользуемся определением средней кривизны из [6, с. 30]). Далее, разлагая V_u' в (1.1) в ряд как по u, так и по n, имеем для главного члена

$$\partial^2 u_0 / \partial \nu^2 + V_u'(u_0, 0, \mathbf{s}) = 0, \quad V(u, 0, \mathbf{s}) = V(u, \mathbf{x})|_{n=0} \quad (2.4)$$

Для поправок u_j $(j = 1, 2, \ldots)$ имеем рекуррентную систему

$$Qu_j = F_j(u_0, u_1, \ldots u_{j-1}, \mathbf{s}) \quad (Q = \partial^2/\partial\nu^2 + V''_{uu}(u_0, 0, \mathbf{s})) \quad (2.5)$$

При этом

$$F_1 = -\varkappa u'_{0\nu} - \nu V''_{un}(u_0, n, \mathbf{s}) \quad (2.6)$$

Уравнения (2.4), (2.5) необходимо дополнить граничными условиями, приводящими к сосредоточенному решению

$$\nu \to \pm\infty, \quad u_0(\nu, \mathbf{s}) \to u_\pm, \quad u_j(\nu, \mathbf{s}) \to 0 \quad (2.7)$$

Явное решение u_0 (v, s) задачи (2.4), (2.7) задается формулой

$$\nu + h(\mathrm{s}) = \int\limits_{u_-}^{u_0} (-2V(z, 0, \mathrm{s}))^{-1/2} dz, \quad u_- < u_0 < u_+ \tag{2.8}$$

Из условий 1 и 2 следует положительность подкоренного выражения и справедливость асимптотики

$$\nu \to \pm\infty, \quad |u_0 - u_\pm| = O(\exp(-\delta_2 |\nu|)), \quad \delta_2 > 0.$$

Постоянную $h(s)$ можно фиксировать дополнительным условием, например, $0 = \operatorname{argmax}_\nu |u_{0\nu}'(\nu, \mathrm{s})|$.

Рассмотрим теперь уравнения для поправок (2.5). Непосредственно проверяется, что ядро оператора Q с нулевыми граничными условиями на бесконечности непусто: $Qu_{0\nu}' = 0$. Отсюда следует, что ограниченная поправка u_j существует лишь при условии

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_j(\nu, \mathrm{s}) u_{0\nu}' d\nu = 0 \tag{2.9}$$

В частности, при $j = 1$ получаем из (2.6) и (2.9)

$$\varkappa = -\frac{a_1}{a_0}, \quad a(n, \mathrm{s}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(u_0(\nu), n, \mathrm{s}) d\nu \tag{2.10}$$

$$n = 0, \quad a_1 = a_n', \quad a_0 = a$$

Эти соотношения имеют простой геометрический смысл (см. ниже, разд. 3) и налагают ограничения на поверхность S. Если условие (2.9) при $j = 1$ выполнено, то имеем

$$u_1(\nu, \mathrm{s}) = C_1(\mathrm{s}) u_{0\nu}'(\nu, \mathrm{s}) + u_{0\nu} \int\limits_0^{\nu} u_{0\eta}'^{-2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{\eta} F_1(\xi) d\xi \tag{2.11}$$

Постоянная C_1 (s) определяется лишь на втором шаге, при нахождении u_2, из соотношения (2.9) при $j = 2$. Аналогично условия (2.9) при $j >$ > 2 всегда можно удовлетворить за счет выбора C_{j-1} (s). На j-м шаге из (2.9) имеем

$$C_j \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{0\nu}'^2 d\nu = B_j(\mathrm{s})$$

где функция B_j уже определена при помощи $u_0, u_1, \ldots, u_{j-1}$, найденных на предыдущих шагах.

Процесс нахождения поправок u_j можно продолжать неограниченно, и на каждом шаге имеем оценку

$$\nu \to \pm\infty, \quad |u_j| = O(\exp(-\delta_3 |\nu|))$$

Таким образом, строится асимптотическое решение в окрестности $\Omega(M_1)$. Заметим, что u_0 (x) и u_1 (x) не зависят от выбора координат s в Ω. Это позволяет продолжить решение на окрестность $\Omega(S)$ размером $O(\omega^{-1/2})$ всей гиперповерхности S, склеив решения в разных окрестностях $\Omega(M_1)$. Вне этой окрестности $\Omega(S)$ можно положить $u(\mathrm{x}) \equiv u_+$ или $u(\mathrm{x}) \equiv u_-$ в зависимости от того, по какую сторону от S находится точка x. Затем оба решения (внешнее и в окрестности $\Omega(S)$) склеиваются при помощи разбиения единицы. В результате получаем асимптотическое решение $\mathrm{mod}\,(\omega^{-n})$, $n \in N$.

Замечание об условиях 1 и 2. В случае отказа от условия $V(u_+, \mathrm{x}) \equiv V(u_-, \mathrm{x})$ сосредоточенное решение уравнения (1.1) не обязано существовать. Однако если это равенство выполнено лишь на некоторой гладкой кривой Г (пусть $m = 2$), то при некоторых условиях на Г типа невырожденности решение также можно построить [4]. При этом решение сосредоточено вблизи Г, а условие ортогональности (2.9) удовлетворяется за счет выбора h (s). В работе [4] можно найти также обоснование метода.

Если же функция $V(u_+, \mathrm{x})$ всюду отлична от $V(u_-, \mathrm{x})$ (пусть $u_{\pm}$ — единственные локальные максимумы V), то строятся асимптотические решения параболического уравнения (многомерного обобщения уравнения Фишера [7])

$$u_t = \Delta u + \omega^2 V_u'(u, \mathrm{x}) \tag{2.12}$$

Однако эти решения уже обязательно зависят от времени. При $m = 1$ уравнение (2.12) было рассмотрено в [8].

3. Вариационный принцип для поверхности S. Выясним геометрический смысл условий (2.10). Из (2.8) находим, что $d\nu = (-2V(u, 0, \mathrm{s}))^{-1/2}du$. Переходя в интеграле для функции a к переменной u, получим

$$a(\mathrm{x}) = \mathrm{const} \int\limits_{u_-}^{u_+} \sqrt{-V(u, \mathrm{x})}\, du \tag{3.1}$$

Таким образом, функция a (x) определяется непосредственно по уравнению (1.1) и при помощи (3.1) может быть продолжена с окрестности Ω на все пространство R^m. При этом оказывается, что многообразие S удовлетворяет следующему вариационному принципу:

$$\delta L = \delta \int\limits_S a(\mathrm{x})\, d\sigma = 0 \tag{3.2}$$

где $d\sigma$ — дифференциальная форма $(m - 1)$-мерного объема (меры) S.

Геометрический смысл принципа (3.2) состоит в том, что S — минимальная поверхность в конформно-евклидовой метрике $a(\mathrm{x}) \langle\ \rangle$. Физический смысл также прост. Если решение интерпретировать как доменную стенку, то условие (3.2) означает, что вклад энергии доменной стенки в энергию системы экстремален.

Можно доказать, что (3.2) и (2.10) равносильны.

Пусть S — экстремаль (3.2). Произведем бесконечномалую деформацию многообразия S. Сдвинем каждую точку S по нормали на величину δn (s). Соответствующее приращение меры S имеет вид [6]

$$\delta W = -\int\limits_S \delta n(\mathrm{s})\, \varkappa(\mathrm{s})\, d\sigma$$

Приращение δL функционала L складывается из двух частей: вклада δL_1 за счет приращения объема S и δL_2 за счет изменения функции a (x). Имеем [6]

$$\delta L_1 = -\int\limits_S \varkappa(\mathrm{s})\, a_0(\mathrm{s})\, \delta n(\mathrm{s})\, d\sigma, \qquad \delta L = \int\limits_S (a_1(\mathrm{s}) - \varkappa a_0(\mathrm{s}))\, \delta n(\mathrm{s})\, d\sigma = 0$$

Последнее уравнение равносильно (2.10) ввиду произвольности δn (s).

4. Пример. Рассмотрим уравнение (1.1) при $V(u) = -\alpha^2(x) \cos u$, $\alpha > 0$, $m = 1$. Решение тогда определяется формулой (1.3), а точка x_0 удовлетворяет условию $\partial\alpha/\partial x\,|_{x=x_0} = 0$.

Уравнение (1.1) при $m = 2$ возникает в двумерной теории упругости нематических жидких кристаллов (НЖК), при этом $V = -{}^1/_2\alpha^2(x) \cos 2u$, функция $u(x, y)$ определяет угол взаимной ориентации магнитного поля H и директора $\mathbf{l}$. Коэффициент $\alpha^2(x)$ равен $\chi_a K^{-1}\mathrm{H}^2$, где H — напряженность магнитного поля, χ_a — диамагнитная восприимчивость НЖК, причем рассматриваются НЖК с равными значениями K модулей продольного и поперечного изгиба [9, 10].

Предположим, что поле $\mathbf{H}$ — интенсивное: $\mathbf{H}^2 = \omega^2 h^2(x, y)$, h_x', $h_y' = O(1)$, $\omega \gg 1$. Тогда можно строить асимптотические решения, как в разд. 2. Эти решения имеют смысл доменных стенок в НЖК, гиперповерхности S — это просто кривые, удовлетворяющие условию

$$\delta \int_S \alpha(x(s), y(s))\, ds = 0 \tag{4.1}$$

Оно совпадает по виду с принципом Ферма линейной геометрической оптики для среды со скоростью распространения света $c(x, y) = \alpha^{-1}(x, y)$, хотя физический смысл решения совершенно иной. Эта аналогия показывает, что кривые S разыскиваются стандартными методами [11]. Главный член асимптотики определяется формулой, аналогичной (1.3).

Построенное решение непригодно вблизи точки самопересечения кривой S.

5. Случай уравнения (1.2). Может показаться, что существование простого вариационного принципа для рассмотренных сосредоточенных решений связано с тем, что главный член u_0 удается явно найти. На самом деле это не так, как показывает пример уравнения (1.2). Будут приведены лишь основные результаты, так как построения аналогичны указанным в разд. 2, 3 и изложены в [12, 13].

При $\mathbf{x} \in R^3$ ищем решение уравнения (1.2), сосредоточенное вблизи кривой l. В окрестности l вводим координаты n, p, s, где n — отклонение точки от кривой по нормали, p — по бинормали, s — естественный параметр на кривой. Главный член асимптотики имеет вид

$$u = U_0(\nu, s)\exp\left(i\omega \int_{S_0}^{S} q(s')\, ds'\right), \quad q = q_0 + \omega^{-1} q_1, \quad \nu = \sqrt{n^2 + p^2} \tag{5.1}$$

где U_0, q_0, q_1 вещественны. Функция U_0 удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} U_{0\nu\nu}'' + \nu^{-1} U_{0\nu}' + \Phi_{|u|^2}(U_0^2, 0, s) - q_0^2(s)\, U_0 = 0 \\ \Phi(U_0^2, s) = \Phi(U_0^2, n, p, s)\,|_{n=0,\, p=0} \end{gathered} \tag{5.2}$$

Для достаточно широкого класса потенциалов Φ существует решение уравнения (5.2) ненулевое и экспоненциально убывающее при $\nu \to \infty$ [13]. Примером служат потенциалы, определяемые формулой (1.4).

Как и в разд. 2, условия ортогональности типа (2.9) приводят к условиям на кривую l и позволяют определить главную часть фазы $q_0(s)$. Имеем

$$\begin{gathered} q_0(s)\, I(s) = C = \text{const}, \quad I(s) = \int_0^\infty \nu U_0^2(\nu, s)\, d\nu \\ (2q_0^2 I - K)\varkappa = \partial F/\partial n\,|_{n=p=0}, \quad \partial F/\partial p\,|_{n=p=0} = 0 \\ K = \int_0^\infty \nu U_{0\nu}^2(\nu, s)\, d\nu, \quad F = \int_0^\infty \nu \Phi(U_0^2(\nu, s), n, p, s)\, d\nu \end{gathered} \tag{5.3}$$

Оказывается, что система уравнений (5.3), определяющая кривую l, может быть получена из вариационного принципа:

$$\delta \int_l a(\mathbf{x}(s))\, ds = 0, \quad a(x) = 2Cq_0(\mathbf{x}) - K(\mathbf{x})$$

Здесь I, K, q_0, U_0 — величины I, K, q_0, U_0, определенные по формулам (5.2), (5.3), где вместо параметра s стоит $\mathbf{x}$, т. е. это величины, полученные из уравнений (5.2), (5.3), продолженных с кривой l на все пространство R^3.

Вариационный принцип (3.2) является принципом Ферма для нелинейных волновых пучков. В отличие от обычного принципа Ферма он содержит еще параметр C. Появление этого параметра обусловлено наличием связи между амплитудой и фазой q.

С ростом C растет мощность пучка, определяемая величиной q. Для пучков разной мощности имеем разные кривые l.

На первый взгляд кажется, что, так как U_0 явно не вычисляется, принцип (3.2) практически бесполезен и кривую l (аналог луча для нелинейной среды) невозможно найти без численных методов. Однако если зависимость Ф от точки x можно явно выделить путем простого преобразования, то нелинейный принцип Ферма становится столь же простым для применения как в линейном случае, так и в случае уравнения (1.1). Такое преобразование возможно, например, для потенциала вида (1.4).

Приведем пример. Рассмотрим случай (1.4) при $p = 2$. Эталонное уравнение (5.2) может быть упрощено заменой

$$U_0 = c_1 v(\rho), \quad \rho = c_2 \nu, \quad c_1 = (q_0{}^2 - \beta)^{1/2} \alpha^{-1/2}, \quad c_2 = (q_0{}^2 - \beta)^{1/2}$$

В итоге имеем $a(\mathrm{x}) = C^2 \alpha(\mathrm{x}) + \beta(\mathrm{x}) \alpha^{-1}(\mathrm{x})$. Таким образом, задача нахождения траектории пучка, как и в линейном случае, отделяется от задачи определения самой структуры пучка — можно определить кривую l, не зная детально структуру пучка.

Автор благодарит И. А. Молоткова и Э. Л. Аэро за советы и указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов А. И., Фрайман Г. М.* Интенсивные волновые пучки в плавно неоднородных нелинейных средах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1982. Т. 83. № 4. С. 1287—1296.
2. *Ерохин Н. С., Сагдеев Р. З.* Особенности самофокусировки и поглощения энергии мощных волновых пучков в неоднородной плазме // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1982. Т. 83. № 1. С. 128—138.
3. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36. № 3. С. 63—126.
4. *Файф П., Гринли У.* Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29. № 4. С. 103—130.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2. 414 с.
6. *Фоменко А. Т.* Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982. 343 с.
7. *Колмогоров А. Н., Петровский Г. И., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А. 1937. Т. 1. № 6. С. 1—26.
8. *Волосов К. А., Данилов В. Г., Маслов В. П.* Математическое моделирование технологических процессов изготовления БИС. М.: МИЭМ. 1984. 131 с.
9. *Аэро Э. Л.* Теория локальных деформаций нематических жидких кристаллов вблизи неоднородно намагниченной поверхности // Вопросы физики формообразования и фазовых превращений. Калинин: Калинин. ун-т, 1986. С. 68—76.
10. *Аэро Э. Л.* Магнитооптика в нематических жидких кристаллах. Переходы Фредерикса в неоднородных полях // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 65. Вып. 2. С. 342—348.
11. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972. 456 с.
12. *Вакуленко С. А., Молотков И. А.* Волны в нелинейной неоднородной среде, сосредоточенные в окрестности заданной кривой // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 587—591.
13. *Вакуленко С. А., Молотков И. А.* Стационарные волновые пучки в сильно нелинейной трехмерной неоднородной среде // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1985. Т. 148. С. 53—60.

Ленинград

Поступила в редакцию 6.IV.1988