Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 532.59 + 532.135

И. Ш. Ахатов

СДВИГОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ И ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

В линейной постановке решается ряд задач о развитии поверхностных и внутренних волн в жидкостях со сложными реофизическими свойствами. Исследуется влияние вязкоупругих свойств неньютоновских жидкостей и свойств диссипации и локальной деформационной инерции жидкостей с пузырьками газа на устойчивость таких волн.

Вопрос об устойчивости внутренних волн в двухслойной несжимаемой вязкой жидкости с тангенциальным разрывом скорости подробно изучен [1, 2]. Известно, что в коротковолновой области имеет место неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, а в области длинных волн неустойчивость отсутствует из-за стабилизирующего действия стратификации. Однако в этой области существуют волны с отрицательной энергией, которые становятся неустойчивыми при наличии вязкой диссипации. В этой связи представляет интерес исследование устойчивости волн с отрицательной энергией в двухслойных неньютоновских жидкостях, характеризующихся более сложным реологическим поведением.

1. Волны на поверхности вязкоупругой жидкости. В декартовой системе координат x, y рассматривается вязкоупругая несжимаемая среда бесконечной глубины ($\infty < y < 0$). Ускорение свободного падения $g = \mathrm{const}$ направлено по отрицательной полуоси y.

Используется обобщенный реологический закон

$$\mathrm{R}\tau_{ij} = \mathrm{Q}\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol\cdot} \tag{1.1}$$

связывающий компоненты девиаторной части тензора напряжений τ_{ij} с компонентами тензора скоростей деформаций $\varepsilon_{ij}^{\boldsymbol\cdot}$. Здесь $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$ — дифференциальные операторы, основанные на производной Олдройда по времени [3], которые в линейном приближении могут быть записаны в виде

$$\mathbf{R} = 1 + \theta\partial/\partial t, \ \mathbf{Q} = 2\mu\,(1 + \lambda\partial/\partial t) \tag{1.2}$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, θ и λ — времена релаксации. Можно показать, что система линеаризованных уравнений двумерного нестационарного движения вязкоупругой жидкости при использовании соотношений (1.1), (1.2) имеет вид

$$\mathrm{R}\,(\rho\partial u/\partial t + \partial p/\partial x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Q}\Delta u, \quad \mathrm{R}\,(\rho\partial v/\partial t + \partial p/\partial y) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Q}\Delta v - \rho g, \quad \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \tag{1.3}$$

Уравнение поверхности жидкости $y = \eta\,(x, t)$ связывается с полем скоростей стандартным кинематическим соотношением

$$\partial\eta/\partial t - v = 0, \ y = 0 \tag{1.4}$$

Динамические граничные условия равенства нулю касательной и нормальной составляющих напряжения на поверхности жидкости в линейном приближении дают

$$\mu\,(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) = 0,\ \mathbf{R}p - Q\partial v/\partial y = 0,\ y = 0 \qquad (1.5)$$

Решение задачи (1.2)—(1.5) может быть представлено в виде [4]

$$u = u_0 - \partial\psi/\partial y,\ v = v_0 + \partial\psi/\partial x,\ p = p_0 \qquad (1.6)$$
$$u_0 = ikBE\,(t, x, y),\ v_0 = kBE\,(t, x, y)$$
$$p_0 = i\omega\rho BE\,(t, x, y) - \rho g y;\ E\,(t, x, y) =$$
$$= \exp\,(-\,i\omega t + ikx + ky)$$

где u_0, v_0, p_0 — решение этой задачи для идеальной несжимаемой жидкости ($\mu = 0$, $\lambda = 0$, $\theta = 0$), ψ — функция от x, y, t. Подстановка этих выражений в первые два уравнения (1.3) при учете равенства $\Delta u_0 = 0$, $\Delta v_0 = 0$ приводит к уравнению

$$2\rho\mathbf{R}\partial\psi/\partial t = \mathbf{Q}\Delta\psi$$

решение которого имеет вид

$$\psi = C\exp\,(-i\omega t + ikx + ly)$$
$$l^2 = k^2 - \frac{i\omega r\,(\omega)}{\nu q\,(\omega)},\quad r\,(\omega) = 1 - i\omega\theta,\quad q\,(\omega) = 1 - i\omega\lambda,\quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

В результате получаем

$$\left.\begin{aligned} u &= (ikB\exp\,(ky) - lC\exp\,(ly))\exp\,(-i\omega t + ikx)\\ v &= (kB\exp\,(ky) + ikC\exp\,(ly))\exp\,(-i\omega t + ikx),\ p = p_0 \end{aligned}\right. \qquad (1.7)$$

Дальнейшее использование граничных условий (1.4), (1.5) приводит к дисперсному соотношению

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 + 4i\nu k^2\omega q\,(\omega)/r\,(\omega) + 4\nu^2k^4\,(l/k - 1)(q\,(\omega)/r\,(\omega))^2 = 0 \quad (1.8)$$

где $\omega_0{}^2\,(k) = gk$ — дисперсионное соотношение для волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. В случае малых вязкостей ($\nu k^2/\omega \ll 1$) можно считать, что движение мало отличается от потенциального течения идеальной жидкости, так что $\omega = \omega_0 + i\delta$, $\delta \ll \omega_0$.

Решение уравнения (1.8) в линейном по δ приближении имеет вид

$$\delta = -\,2\nu k^2\,[1 + gk\lambda\theta + i\sqrt{gk}\,(\theta - \lambda)]/(1 + gk\theta^2)$$

Видно, что наличие у жидкости вязкоупругих свойств приводит к изменению дисперсионных и диссипативных характеристик. Так, для фазовой скорости c и декремента затухания — $\operatorname{Re}\delta$ имеем

$$c = \sqrt{g/k}\,[1 + 2\nu k^2\,(\theta - \lambda)/(1 + gk\theta^2)]$$
$$-\operatorname{Re}\delta = 2\nu k^2\,(1 + gk\lambda\theta)/(1 + gk\theta^2)$$

Для учета влияния поверхностного натяжения σ в (1.8) необходимо использовать равенство $\omega_0{}^2 = gk + \sigma k^3/\rho$.

2. Внутренние волны в слоистой вязкоупругой жидкости. Рассматриваются две несжимаемые жидкости различной плотности, из которых нижняя ($y < 0$) является вязкоупругой, имеет большую плотность и неподвижна, а верхняя ($y > 0$) — идеальной и движется со скоростью U. Параметры, относящиеся к верхней и нижней жидкостям, помечаются индексами 1 и 2 соответственно.

Кинематические и динамические условия на границе раздела жидкостей приводят к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\partial\eta/\partial t + U\partial\eta/\partial x - v_1 = 0,\ \partial\eta/dt - v_2 = 0\\ &\mu\,(\partial u_2/\partial y + \partial v_2/\partial x) = 0,\ \mathbf{R}\,(p_2 - p_1) = \mathbf{Q}\partial v_2/\partial y \end{aligned}\right. \qquad (2.1)$$

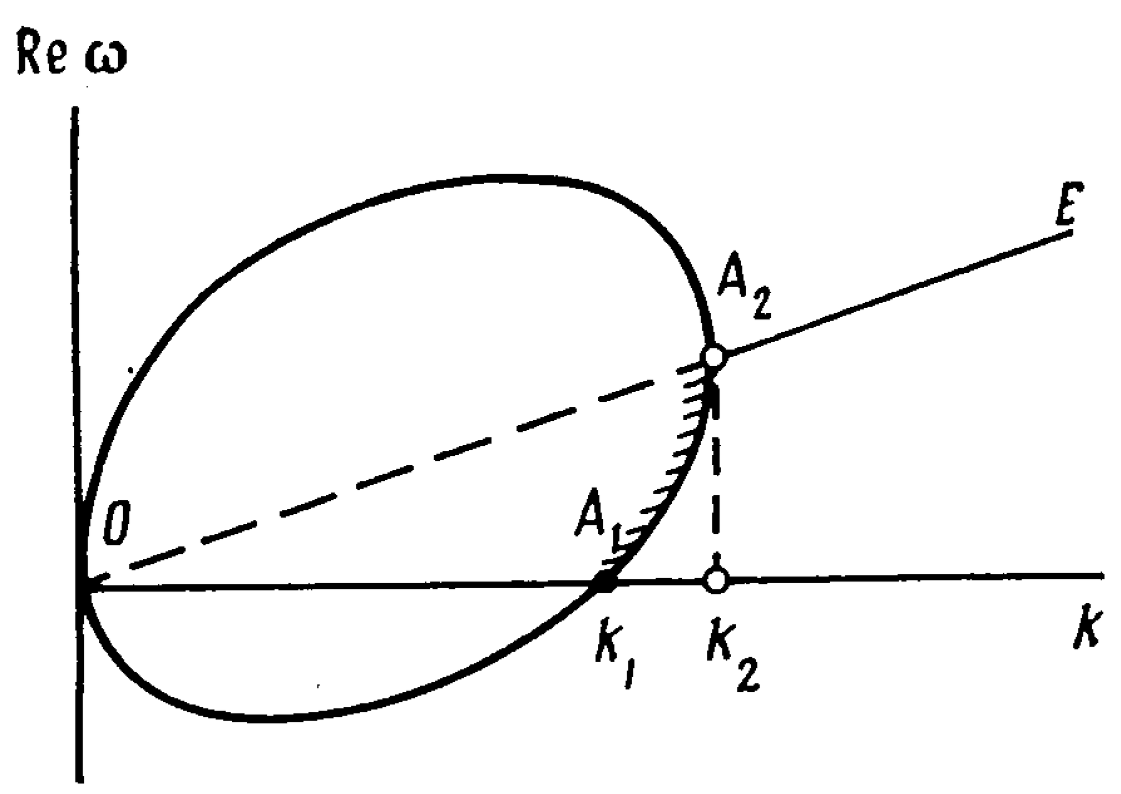
В качестве решения уравнений динамики вязкоупругих жидкостей (1.3) используются соотношения (1.7), полученные в п. 1. Решение для верхней (идеальной) жидкости представляется в виде

$$u_1 = U + ikAE(t, x, -y), \ v_1 = -kAE\,(t, x, -y)$$
$$p_1 = -i\rho_1 A\,(\omega - Uk)E\,(t, x, -y) - \rho_1 gy \tag{2.2}$$

Подстановка соотношений (1.7) и (2.2) в (2.1) дает следующее дисперсионное соотношение:

$$s\,(\omega - Uk)^2 + \omega^2 - (1 - s)gk + 4i\nu k^2\omega q\,(\omega)/r\,(\omega) +$$
$$+ 4\nu^2 k^4\,(l/k - 1)(q\,(\omega)/r\,(\omega))^2 = 0, \ s = \rho_1/\rho_2 \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) при $\nu k^2/\omega \ll 1$ может быть приведено к дисперсионному соотношению для внутренних волн в слоистой идеальной жидкости $Z_0(\omega, k) = 0$ с поправкой, обусловленной реологическими константами ν, λ, θ:



Фиг. 1

$$Z_0\,(\omega, k) = -iF\,(k, \theta, \lambda, \omega, k)$$
$$Z_0 = s\,(\omega - Uk)^2 + \omega^2 - (1 - s)gk \tag{2.4}$$
$$F = 4\nu k^2\omega[1 + \omega^2\lambda\theta + i\omega\,(\theta - \lambda)]/(1 + \omega^2\theta^2)$$

В слоистой идеальной жидкости, описываемой дисперсионным уравнением $Z_0\,(\omega, k) = 0$, область неустойчивости Кельвина — Гельмгольца ($k > k_2 = (1 - s^2)g/(sU^2)$) граничит с областью волн отрицательной энергии, расположенной между критическими точками $k_1 = (1 - s)g/(sU^2)$ $(\omega = 0)$ и k_2 $(\partial\omega/\partial k = \infty)$ [1, 2] (фиг. 1). Действительно, в линейном приближении усредненная плотность энергии волны дается соотношением

$$E = \omega a^2 \partial Z_0/\partial w = 2\omega a^2\,(1 + s)(\omega - Us\,(1 + s)^{-1}k)$$

из которого следует, что ветвь A_1A_2 дисперсионной кривой, лежащая ниже прямой OE $(\omega = Us\,(1 + s)^{-1}k)$, соответствует волнам с отрицательной энергией. Известно, что если нижняя среда является ньютоновской вязкой жидкостью, то неустойчивость Кельвина — Гельмгольца ослабляется, а во всей области волн с отрицательной энергией возникает неустойчивость [1, 2] (диссипативная неустойчивость).

Из уравнения (2.4) находится малая поправка $i\delta$ к частоте $(\omega = \omega_0 + i\delta)$:

$$\delta = -\frac{2\nu k^2\omega}{1+s}\left(\omega - \frac{sU}{1+s}k\right)^{-1}(1 + \omega^2\theta^2)^{-1}[1 + \omega^2\lambda\theta + i\omega\,(\theta - \lambda)]$$

Отсюда видно, что если $\theta = 0$, то инкремент нарастания $\mathrm{Re}\,\delta$ волн с отрицательной энергией такой же, как в случае ньютоновской вязкой жидкости. Если $\lambda < \theta \neq 0$, то инкремент нарастания ниже, чем у ньютоновской вязкой жидкости, а если $\lambda > \theta \neq 0$, то выше. Таким образом, наличие у жидкости вязкоупругих свойств может приводить как к усилению, так и к ослаблению диссипативной неустойчивости, в зависимости от величин времен релаксации.

3. Волны на поверхности жидкости с пузырьками газа. Газожидкостные среды представляют собой жидкости с неголономным уравнением состояния [5, 6] $p = f\,(\rho, \dot\rho, \ddot\rho)$ (точка означает лагранжеву временную производную). В линейном приближении отклонения давления p' плотности ρ' от их начальных равновесных значений p_0 и ρ_0 связаны соотношением [7—9]

$$p' = c_0^2\rho' + \alpha\dot{\rho}' + \beta\dddot{\rho}' \tag{3.1}$$
$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho^\circ \varphi_0}, \quad \alpha = \frac{4\mu}{3\varphi_0\rho^\circ}, \quad \beta = \frac{a^2}{3\varphi_0}$$

Здесь γ — показатель политропы газа в пузырьках, φ_0, a — объемная концентрация и радиус пузырьков, μ — эффективная вязкость. Мелкомасштабные физико-химические процессы, происходящие в газожидкостных средах, и их влияние на диссипативные (параметр α) и дисперсионные (параметр β) свойства смеси детально проанализированы [6].

В первоначальном невозмущенном состоянии распределение плотности жидкости по глубине определяется формулой

$$\rho_0(y) = \rho_0(0)\exp(-gy/c_0^2)$$

поэтому для длин волн L, удовлетворяющих условию $gL/c_0^2 \ll 1$, можно с хорошей точностью считать жидкость однородной ($\rho_0 = \mathrm{const}$).

Уравнения неразрывности импульсов после линеаризации имеют вид

$$\partial\rho'/\partial t + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \rho_0\partial\mathbf{v}'/\partial t + \nabla p' - \rho'\mathbf{g} = 0 \tag{3.2}$$

Последним слагаемым во втором уравнении (3.2) можно пренебречь, учитывая, что возмущение плотности ничтожно мало по сравнению с градиентом давления при $gL/c_0^2 \ll 1$. Тогда для потенциала течения ($\mathbf{v}' = \nabla\varphi$) из (3.2) при учете (3.1) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \left(c_0^2 + \alpha\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Delta\varphi = 0 \tag{3.3}$$

которому удовлетворяет бегущая волна

$$\varphi = A\exp(-i\omega t + ikx + iq(\omega)y) \tag{3.4}$$
$$q^2(\omega) = -k^2 + \omega^2(c_0^2 - i\alpha\omega - \beta\omega^2)^{-1}$$

Использование стандартных граничных условий для идеальной жидкости приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega^4 + g^2q^2(\omega) = 0 \tag{3.5}$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (3.5) сводится к уравнению

$$Z_0(\omega_0, k) = \omega_0^4 - g^2(k^2 - \omega_0^2c_0^{-2}) = 0$$

решение которого обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$\omega_0 = c_0k, \quad k\to 0; \quad \omega_0 = \sqrt{gk}, \quad k\to\infty$$

При малых α и β дисперсионное соотношение (3.5) представляется в виде

$$Z_0(\omega, k) = -i\alpha g^2\omega^3c_0^{-4} - \beta g^2\omega^4c_0^{-4}$$

Отсюда для малой поправки $i\delta$ к частоте получается выражение

$$\delta = \frac{-\alpha g^2\omega_0^2 + i\beta g^2\omega_0^3}{2(2c_0^4\omega_0^2 + g^2c_0^2)}$$

Видно, что волны на поверхности жидкости с пузырьками газа затухают с декрементом затухания, который при $k \to 0$ стремится к нулю по закону $-\operatorname{Re}\delta = \alpha k^2/2$, а при $k \to \infty$ стремится к конечному значению $-\operatorname{Re}\delta = \alpha g^2/(4c_0^4)$.

4. Волны на границе раздела пузырьковой и идеальной жидкостей. Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость бесконечной глубины ($y < 0$), над которой ($y > 0$) находится жидкость с пузырьками газа, движущаяся горизонтально со скоростью U. Параметры, относящиеся к верхней и нижней жидкостям, помечаются индексами 1 и 2 соответственно. Уравнение для потенциала возмущений в пузырьковой жидкости φ_1 получается из (3.3) операторной заменой $\partial/\partial t \to \partial/\partial t + U\partial/\partial x$, а его решение — из (3.4) заменой $\omega \to (\omega - Uk)$ в выражении для $q(\omega)$. Использование граничных условий

$$(\partial/\partial t + U\partial/\partial x)\eta - \partial\varphi_1/\partial y = 0, \quad \partial\eta/\partial t - \partial\varphi_2/\partial y = 0$$

$$\rho_1 g\eta + \rho_1 (\partial/\partial t + U\partial/\partial x)\varphi_1 = \rho_2 g\eta + \rho_2 \partial\varphi_2/\partial t$$

и решения φ_2 уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega^2 + ikq^{-1}(\omega)\, s\,(\omega - Uk)^2 - (1 - s)gk = 0$$

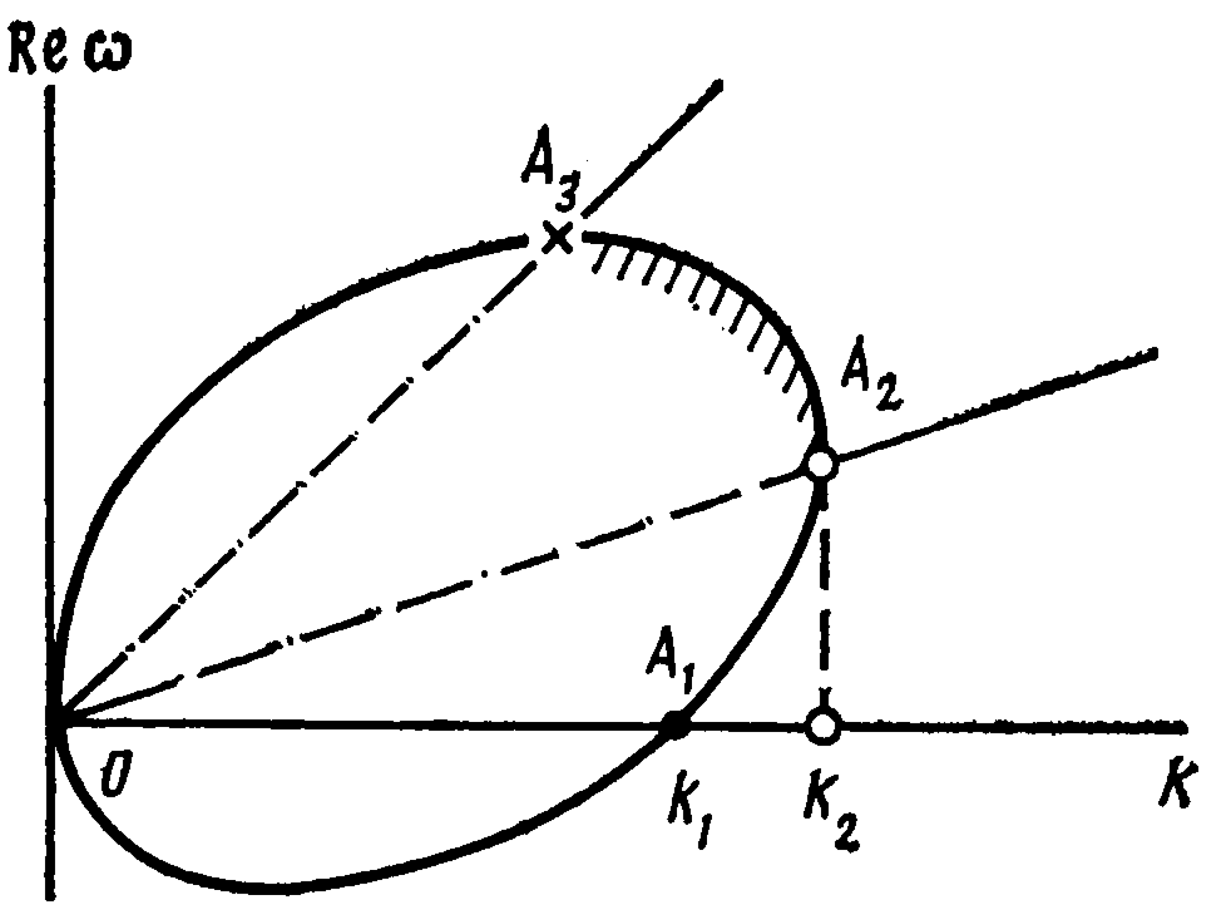
которое в линейном приближении может быть приведено к дисперсионному соотношению для внутренних волн в слоистой идеальной жидкости $Z_0(\omega, k) = 0$ (см. (2.4)) с поправкой, обусловленной сжимаемостью (c_0^{-2}), диссипативными (α) и дисперсионными (β) свойствами газожидкостной среды

$$Z_0 = -\frac{s(\omega - Uk)^4}{2k^2c_0^2}\left[1 + \frac{\beta}{c_0^2}(\omega - Uk)^2\right] - i\,\frac{\alpha s(\omega - Uk)^5}{2k^2c_0^4} \qquad (4.1)$$

Из (4.1) получается выражение для инкремента нарастания волн

$$\operatorname{Re}\delta = -\frac{\alpha s(\omega - Uk)^5}{4(1+s)k^2c_0^4\left(\omega - \dfrac{sU}{1+s}k\right)}$$

из которого следует, что в области, ограниченной прямой $\omega = Uk$ сверху и прямой $\omega = s(1 + s)^{-1}Uk$ снизу, независимо от величины параметра



Фиг. 2

α должна иметь место диссипативная неустойчивость волн (на фиг. 2 заштрихована).

Автор благодарит А. Х. Мирзаджанзаде за постановку задачи, а также М. М. Хасанова за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Л. А., Степанянц Ю. А.* Нелинейная стадия сдвиговой неустойчивости стратифицированной жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 4. С. 63—70.
2. *Островский Л. А., Рыбак С. А., Цимринг Л. Ш.* Волны отрицательной энергии в гидродинамике // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150. Вып. 3. С. 417—437.
3. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
4. *Лезич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.

5. *Нигматуллин Р. И.* Динамика гетерогенных сред. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1984. 60 с.
6. *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
7. *Кутателадзе С. С.*, *Накоряков В. Е.* Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
8. *Ахатов И. Ш.*, *Байков В. А.*, *Байков Р. А.* Распространение нелинейных волн в газожидкостных средах с переменным по пространству газосодержанием // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 180—183.
9. *Ахатов И. Ш.*, *Байков В. А.* Распространение акустических возмущений в неоднородных газожидкостных системах // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 50. № 3. С. 385—390.

Уфа

Поступила в редакцию 24.V.1988