

УДК 532.527

В. В. Климов, В. Л. Прозоровский

## МЕТОД КОНТУРНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР С ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

Метод контурной динамики, предложенный [1] для описания взаимодействия плоских вихрей, распространяется на осесимметричные вихревые течения. На основании численного моделирования эволюции простейших контуров выдвигается гипотеза о существовании периодических солитоноподобных вихревых структур.

В основу анализа положены уравнения идеальной несжимаемой жидкости в форме

$$\partial\Omega/\partial t + \text{rot} [\Omega\mathbf{v}] = 0, \quad \Omega = \text{rot } \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — поле скорости,  $\Omega$  — поле завихренности. В дальнейшем будем рассматривать лишь осесимметричные течения, для которых в цилиндрической системе координат  $\Omega = \{0, \rho\omega(\rho, z), 0\}$  внутри некоторых областей и  $\Omega = 0$  вне этих областей. Учитывая это, перепишем первое уравнение в (1) в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v_z \frac{\partial\omega}{\partial z} + v_\rho \frac{\partial\omega}{\partial\rho} = 0 \quad (2)$$

Предположим, что  $\omega(\rho, z)$  — кусочно-постоянная функция, т. е.

$$\omega(\rho, z) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \Theta(S_i) \quad (3)$$

Здесь  $\gamma_i = \text{const}$  характеризует интенсивность вихрей,  $\Theta(S_i)$  — характеристическая функция односвязной области  $S_i$ , граница которой определена параметрическими уравнениями

$$\rho = \rho_i(s_i, t), \quad z = z_i(s_i, t) \quad (4)$$

где  $s_i$  — параметр, изменяющийся вдоль границы. В этом случае можно показать, что уравнение (2) удовлетворяется тождественно, если

$$\partial\rho_i/\partial t = v_\rho(\rho_i, z_i), \quad \partial z_i/\partial t = v_z(\rho_i, z_i) \quad (5)$$

Фактически уравнения (5) справедливы всегда, так как выражают известную теорему Гельмгольца.

Таким образом, показано, что если распределение завихренности описывается кусочно-постоянной функцией (3), то оно будет описываться такой же функцией и в последующие моменты времени, а изменяться будут лишь границы областей.

Покажем теперь, что в предположении справедливости представления (3) поле скорости  $\mathbf{v}$  может быть выражено через контурные интегралы по границам областей с постоянной завихренностью с универсальными подынтегральными функциями.

Для этого рассмотрим последние два уравнения (1). Согласно известным формулам убывающее на бесконечности решение этих уравнений имеет

вид

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6)$$

В осесимметричном случае вектор  $\mathbf{A}$ , как и  $\boldsymbol{\Omega}$ , имеет лишь азимутальную компоненту  $A_\varphi$ , так что вместо (6) получим

$$A_\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \rho'^2 d\rho' \int_{-\infty}^\infty dz' \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\omega(\rho', z') \cos \varphi}{[(z - z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi]^{3/2}} \quad (7)$$

$$v_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho}$$

Подставляя вместо  $\omega$  выражение (3), имеем

$$A_\varphi = \sum \frac{\gamma_i}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \int_{S_i} d\rho_i dz_i \rho_i^2 \frac{\partial}{\partial z_i} \ln(z_i - z + [(z_i - z)^2 + \rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos \varphi]^{1/2}) \quad (8)$$

Здесь и далее суммирование ведется от  $i = 1$  до  $i = N$ .

Применяя к (8) формулу Грина, найдем представление для  $A_\varphi$  в виде интеграла по границам областей  $\partial S_i$ . Дифференцируя этот результат по  $z$ , получим выражение для  $v_\rho$  в виде контурного интеграла по границам областей с универсальной подынтегральной функцией ( $\mathbf{K}(p)$ ,  $\mathbf{E}(p)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно)

$$v_\rho = \sum \frac{2\gamma_i}{\pi} \oint_{\partial S_i} d\rho_i \rho_i^2 \frac{\mathbf{K}(p) - \mathbf{E}(p)}{r_+ - r_-} \quad (9)$$

$$r_\pm = [(z_i - z)^2 + (\rho_i \pm \rho)^2]^{1/2}, \quad p = (r_+ - r_-)/(r_+ + r_-)$$

Полностью аналогичные, но более длинные выкладки позволяют также получить ( $\Pi$  — эллиптический интеграл третьего рода)

$$v_z = \sum \frac{\gamma_i}{2\pi} \oint_{\partial S_i} d\rho_i \frac{\rho_i}{r_+} \left[ \mathbf{K}(k) + \frac{\rho_i - \rho}{\rho_i + \rho} \Pi(n, k) \right] (z_i - z) \quad (10)$$

$$k^2 = 1 - r_-^2/r_+^2, \quad n = 4\rho\rho_i/(\rho_i + \rho)^2$$

Подставляя теперь (9) и (10) в систему (5), получим окончательные выражения для уравнений контурной динамики для осесимметричных течений идеальной жидкости.

Таким образом, в предположении кусочно-постоянной завихренности  $\omega$  динамика осесимметричных вихревых структур полностью определяется динамикой ограничивающих их контуров, так что задача фактически стала одномерной.

Заметим, что при необходимости исследования течений с распределением завихренности, отличающимся от (3), их всегда можно аппроксимировать конечным набором кусочно-постоянных областей, в результате чего при помощи уравнений (5), (9), (10) можно описывать динамику вихрей с любым распределением завихренности по их сечениям.

Несмотря на сложность системы (5), (9), (10), она может оказаться полезной даже при аналитических исследованиях. Например, в случае вихря Кельвина асимптотическое разложение по  $a/R$  ( $R$  — радиус вихревого кольца,  $a$  — радиус его сечения) приводит к известному выражению для поступательной скорости вихря [2]

$$V = \frac{\kappa}{4\pi R} \left( \ln \left( \frac{8R}{a} \right) - \frac{1}{4} \right)$$

где  $\kappa$  — циркуляция скорости по контуру. Аналогично можно получить и последующие члены разложения по  $a/R$ .

Следует подчеркнуть, что система (5), (9), (10) может быть использована для поиска солитоноподобных решений уравнений гидродинамики в осесимметричном случае. Заранее можно предположить, что существуют осесимметричные солитоноподобные образования по крайней мере двух видов. Во-первых, это вихревые образования, движущиеся с постоянной скоростью без изменения формы. Существование ряда решений такого рода было доказано в [3]. Во-вторых, можно предположить, что существуют решения, в которых область постоянной завихренности движется поступательно и одновременно меняет свою форму так, что через некоторое время  $T_0$  можно обнаружить вихревую область первоначальной формы, но смещенную на некоторое расстояние по оси  $z$ . Существование таких решений в случае движения вихревых колец доказано в [4, 5]. Приведенные ниже результаты численного моделирования также дают указания в пользу существования решений такого рода.

В общем случае, если  $\rho(z, t)$  описывает динамику контура, то решение второго рода можно найти, решая уравнение

$$\rho(z, t + T_0) = \rho(z - VT_0, t) \quad (11)$$

которое должно быть справедливо для любых  $t$  и отличных от нуля  $T_0$ .

Для получения конструктивного уравнения предположим, что в классе солитоноподобных решений второго рода существуют такие, которые можно представить в виде контура, вращающегося вокруг некоторого поступательно движущегося центра. В этом случае из (11) можно получить уравнение

$$\frac{\partial z(s, t)}{\partial s} (v_\rho - \Omega z(s, t)) = \frac{\partial \rho(s, t)}{\partial s} (v_z - V + \Omega \rho(s, t)) \quad (12)$$

Здесь  $\Omega$  — постоянная угловая скорость вращения вихря,  $V$  — его постоянная поступательная скорость, а  $v_\rho$  и  $v$  — выражения (9), (10).

Решение уравнения (12) или в более общем случае — уравнения (11), если оно существует для некоторых  $V$  и  $\Omega$ , даст форму солитоноподобных вихрей второго рода.

Вернемся теперь к более простой задаче построения численного алгоритма решения системы (5), (9) и (10) в случае одного односвязного контура, т. е. при  $N = 1$ . Для этого все величины размерности длины будем измерять в единицах  $R$  ( $R$  — характерный радиус вихря), величины размерности времени в единицах  $2\pi/(\gamma R)$ . В результате этой процедуры безразмерный вариант уравнений контурной динамики принимает вид

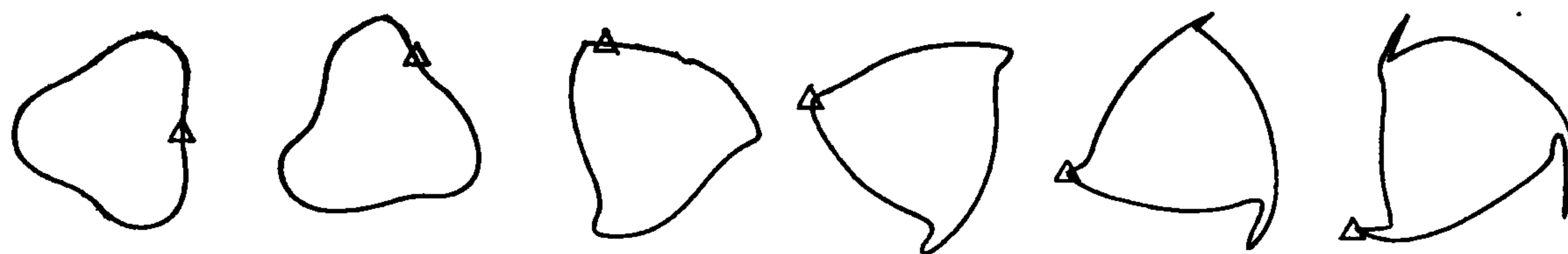
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 4 \oint_{\partial S} d\rho' \rho'^2 \frac{K(p) - E(p)}{r_+ - r_-} \quad (13)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \oint_{\partial S} d\rho' \rho' \frac{z' - z}{r_+} \left[ K(k) + \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \Pi(n, k) \right]$$

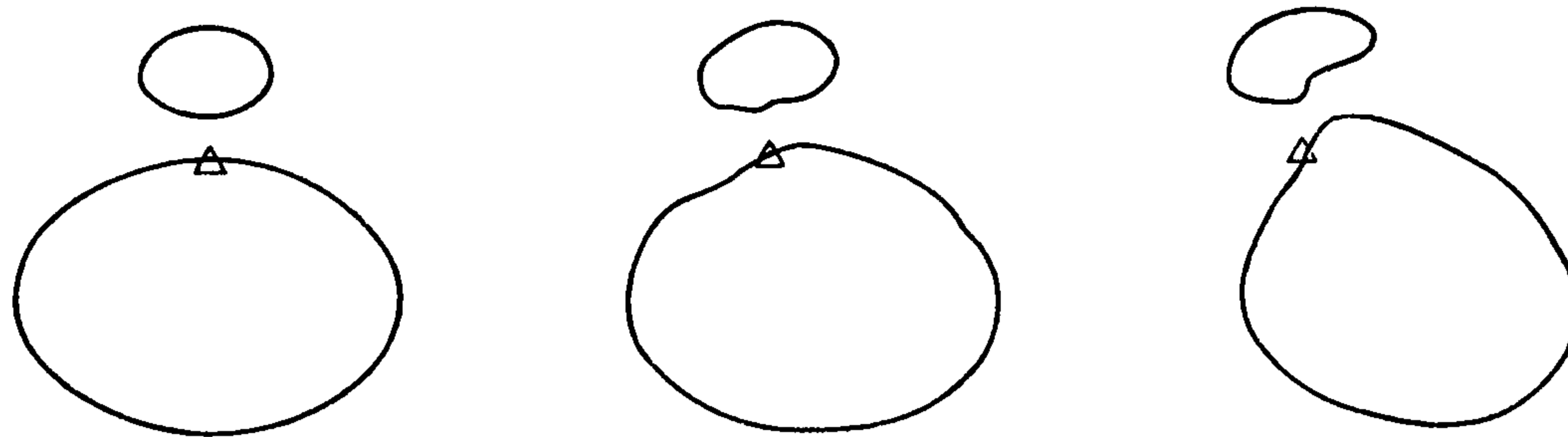
Далее контур представляется в виде набора точек, лежащих на контуре ( $\rho(s_l)$ ,  $z(s_l)$ ;  $s_l = l$ ;  $l = 0, 1, \dots, L$ ), и кубических сплайнов, аппроксимирующих контур между точками дискретизации. Аппроксимирующие сплайны задавались для  $l - 1 \leq s \leq l$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho = & m_{l-1} (l - s)^2 (s - l + 1) - m_l (s - l + 1)^2 (l - s) + \\ & + \rho(s_{l-1}) (l - s)^2 [2(s - l) + 3] + \rho(s_l) (s - l + 1)^2 [2(l - s) + 1] \end{aligned} \quad (14)$$

(и аналогично для  $z$ ). Здесь  $m_l$  и  $m_{l-1}$  — значения производных  $\partial \rho / \partial s$  в узлах  $l$  и  $l - 1$ , которые вычислялись по четырехточечным формулам. К (14) надо, естественно, добавить условия периодичности вдоль контура.



Фиг. 1



Фиг. 2

Контурные интегралы в (13) вычислялись по методу Симпсона, средняя точка для которого выбиралась для  $s = l - 1/2$  в (14).

Анализ подынтегральных функций в (13) показывает наличие в них особых точек на контуре интегрирования. Так, подынтегральная функция для  $v_\rho$  имеет в точке  $(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 = 0$  логарифмическую расходимость, для корректного учета которой в окрестности сингулярной точки интеграл вычисляется аналитически. Дифференциальные уравнения по времени (13) решались методом Кутты — Мерсона [6]. В качестве дополнительного контроля корректности метода использовался известный факт сохранения потока завихренности через сечения вихря.

Для проверки уравнений (13) и их дискретного аналога прежде всего была проанализирована динамика вихря Хилла, точное решение для которого известно. Расчеты показали, что в этом случае правые части уравнений (13) вычисляются с относительной ошибкой  $\epsilon \sim 10^{-4}$  при разбиении контура на 100 точек. Численное решение дифференциальных уравнений по времени приводит к нарушению теоремы о сохранении потока завихренности  $\Phi$  ( $\Delta\Phi/\Phi \sim 10^{-3}$  через единицу безразмерного времени). Точность этой части алгоритма легко повысить увеличением количества точек на контуре, но при этом значительно возрастает время счета.

После того как корректность численной схемы была проверена на вихре Хилла, была рассмотрена динамика тороидального вихря, сечение которого ограничено контуром

$$\rho = R + (a + \epsilon \sin^2 \varphi_0) \sin \varphi, \quad z = (a + \epsilon \sin^2 \varphi_0) \cos \varphi \quad (15)$$

для  $R = 0,8$ ;  $a = 0,1$ ;  $\epsilon = 0,05$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $\varphi_0 = 3\varphi/2$ .

Результаты расчетов представлены на фиг. 1 для  $t = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0$ . Для удобства наблюдения вращения контура одна из его точек отмечена треугольником. В процессе счета контролировалось несохранение потока завихренности, которое оказалось достаточно малым вплоть до максимальных времен ( $t = 2,2$ ).

Уже при  $t = 1$  заметно возникновение на первоначально гладком контуре изломов. В последующем на месте изломов образуются вихревые линии, постепенно удаляющиеся от ядра вихря.

Несмотря на возникновение и отрыв вихревых линий (их, естественно, нужно представлять в виде поверхности), обращает на себя внимание тот факт, что основное ядро вихря (после выделения вихревых линий) вращается как целое, одновременно смещаясь по оси  $z$ . Этот факт не только позволяет надеяться на существование решений уравнений (12), но и, по-видимому, говорит об определенной их устойчивости, выражающейся в распаде первоначального вихря на солитоноподобную структуру второго рода, описываемую уравнением (12), и набор вихревых линий. Окончательный ответ на вопрос о существовании солитоноподобных решений уравнений контурной динамики может дать лишь решение уравнения (12) или более общего уравнения (11).

В качестве иллюстрации возможности использования уравнений контурной динамики для нескольких контуров на фиг. 2 приведены результаты расчета эволюции пары вихревых колец с одинаковыми значениями  $\gamma$  для  $t = 0; 0,1; 0,2$ .

Метод контурной динамики за счет снижения размерности задачи оказывается вполне реализуемым на мини-ЭВМ. Например, на ЭВМ с разрядностью 32 и быстродействием около  $4 \cdot 10^5$  длинных операций в секунду расчет одного шага по времени для фиг. 1 ( $\Delta t = 0,05$ ) занимает около 30 мин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Zabuski N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for Euler equations in two dimensions // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 30. № 1. P. 96—106.
2. *Saffman P. G.* The velocity of viscous vortex rings // *Stud. Appl. Math.* 1970. V. 49. № 4. P. 371—380.
3. *Norbury J.* A family of steady vortex rings // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 57. Pt 3. P. 417—431.
4. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. 928 с.
5. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Движение системы вихревых колец в несжимаемой жидкости // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 503—506.
6. *Fox L.* Numerical Solution of Ordinary and Partial differential Equations. L.: Pergamon Press, 1962. 509 p.

Москва

Поступила в редакцию  
23.XI.1988