

УДК 532.516

М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн

ТУРБУЛЕНТНОЕ ВИХРЕВОЕ ДИНАМО

В классе автомодельных конических течений несжимаемой жидкости с переменной вязкостью изучается возможность спонтанного возникновения вращательного движения в полупространстве над плоскостью вследствие бифуркации при некотором числе Рейнольдса, определяющем интенсивность заданных источников движения, не создающих внешнего момента сил. Доказывается невозможность самовращения в случаях: постоянной вязкости; вязкости, убывающей по направлению к оси симметрии; нисходящего движения; покоя или слабых источников основного течения. Строятся примеры бифуркаций самовращения для одноячейстого восходящего движения при условии отсутствия вращательного трения на плоскости и для двухъячейстого движения с условиями регулярности на оси и прилипания на неподвижной плоскости. В этих случаях движение складывается из внешнего ламинарного потока и приосевого турбулентного ядра, имеющего большую вязкость. Указанные примеры, по-видимому, моделируют вращающиеся астрофизические струи, зарождение водоворота, возникновение «огненного» смерча над плоскостью под действием квадрупольного источника тепла.

1. Понятие вихревого динамо. Под вихревым динамо будем понимать спонтанное возбуждение вращательного движения жидкости при отсутствии явных источников вращения, т. е. в условиях, когда движение без вращения заведомо возможно. Возникновение вихревого динамо связывается с прямой бифуркацией исходного режима при некотором числе Рейнольдса $Re = Re_*$, когда уравнение для вращательной компоненты начинает допускать нетривиальные решения, соответствующие устойчивому режиму, а режим без вращения становится неустойчивым. Это означает, что для почти всех начальных возмущений исходного режима он эволюционирует во времени при фиксированном $Re > Re_*$ к устойчивому режиму с вращением. Таких режимов в данном случае два. Они различаются лишь направлением вращения. Именно это явление здесь называется «самовращением» или «вихревым динамо».

Таким образом, вихревое динамо характеризуется тремя признаками: 1) существует порог (по Re) самовозбуждения, 2) вращение может осуществляться в любую сторону в зависимости от знака начального вращательного возмущения, 3) в установившемся движении начальное возмущение полностью забывается и интенсивность вращения от него не зависит. По указанным свойствам задача о вихревом динамо вполне аналогична известной проблеме МГД динамо о спонтанной генерации магнитного поля при движении проводящей жидкости в отсутствие внешних источников поля. Отсюда и термин вихревое динамо.

Вопрос о возможности стационарного вихревого динамо в условиях осесимметричной задачи не тривиален. В родственной проблеме МГД динамо известна теорема Каулинга [1], согласно которой спонтанная генерация магнитного поля в осесимметричном случае невозможна. Аналогичная теорема относительно циркуляции может быть доказана для осесимметричного течения однородной жидкости с условиями прилипания. Ясно, что условия прилипания, в частности равенство нулю вращательной компоненты скорости, затрудняют вращение жидкости. Если все же в этих условиях

самовращение возникает, то будем называть его «сильным». В противоположность этому самовозбуждение вращения в отсутствие трения на границе будем называть «слабым» самовращением. В однородной жидкости сильное самовращение невозможно. Если же на части границы заданы условия отсутствия вращательного трения, то, как показывает недавно найденный пример¹, самовращение возможно. Возникновение самовращения, связанное с предварительной потерей симметрии исходного режима вследствие гидродинамической неустойчивости, изучено в [2].

В данной работе обнаружена бифуркация самовращения в осесимметричном движении неоднородной жидкости, имеющей переменную вязкость. Если переменность вязкости рассматривать как следствие турбулентности, то в рамках модели Буссинеска удастся построить примеры возбуждения слабого и сильного самовращения для ряда течений, обладающих турбулентным ядром, т. е. предложить модель турбулентного вихревого динамо.

Рассмотрение ведется в классе конически симметричных течений, в котором вектор скорости убывает по модулю обратно пропорционально сферическому радиусу при удалении от начала координат. Этому классу принадлежат известные решения для течения в диффузоре, решение об импульсном источнике осесимметричной затопленной струи [3], а также струи, вытекающей из вершины конуса [4], решения для закрученных струй [5, 6] и ряд других [7—9]².

Отличительной чертой рассматриваемых течений является их обязательная автомодельность, связанная с отсутствием характерного масштаба длины и заданием в качестве источников движения величин, имеющих размерность кинематической вязкости ν или ее степени. В простейших случаях задается одна такая величина Q , определяющая число Рейнольдса $Re = Q/\nu$. Для движений рассматриваемого типа справедливо утверждение [10]: если решение существует, то оно должно быть автомодельным.

2. Основные уравнения. Рассмотрим в среднем стационарное и осесимметричное турбулентное течение. Для замыкания уравнений Рейнольдса используем модель Буссинеска, введя эффективную турбулентную кинематическую вязкость ν_t . Суммарную относительную вязкость определим соотношением $\varepsilon = (\nu + \nu_t)/\nu$. Тогда уравнения для среднего поля скорости u могут быть записаны в виде [9]

$$(u, \nabla)u = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\varepsilon\Delta u + \nu\nabla\varepsilon \cdot D + F, \quad \nabla u = 0 \quad (2.1)$$

(D — удвоенный тензор скоростей деформаций, F — вектор внешних сил). Предположим, что турбулентное движение в среднем автомодельно и принадлежит конически-симметричному классу, т. е.

$$u_R = -\frac{\nu}{R} y'(x), \quad u_\theta = -\frac{\nu}{R} \frac{y(x)}{(1-x^2)^{1/2}}, \quad u_\varphi = \frac{\nu}{R} \frac{\Gamma(x)}{(1-x^2)^{1/2}} \quad (2.2)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{R^2} q(x) + \text{const}, \quad |x = \cos \theta$$

где R , θ , φ — сферические координаты, θ — угол между положительной полуосью z и радиус-вектором, φ — азимутальный угол, от которого

¹ Гольдштик М. А., Яворский Н. И. Течение между пористым вращающимся диском и плоскостью: Препринт № 152. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1987. 42 с.

² См. также: Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Индуцированные струи и критические явления в вязких течениях: Препринт № 159. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1987. 50 с.

Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Автомодельные задачи тепловой конвекции: Препринт № 170. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1988. 50 с.

течение не зависит. Штрихом здесь и далее обозначена производная по x . Коническая симметрия возможна только в случае, когда внешняя сила имеет представление

$$F = \rho v^2 R^{-3} f(x) \quad (2.3)$$

а турбулентная вязкость зависит лишь от угла θ , $\varepsilon = \varepsilon(x)$ [8].

Далее предполагается, что $f = \{f_R, f_\theta, 0\}$, и, таким образом, внешние силы не создают вращательного момента. Симметричный тензор D имеет компоненты

$$\begin{aligned} D_{RR} &= \frac{2v}{R^2} y', & D_{R\theta} &= \frac{v(1-x^2)^{1/2}}{R^2} \left(y'' + \frac{2y}{1-x^2} \right), & D_{R\varphi} &= -\frac{2v}{R^2} \frac{\Gamma}{(1-x^2)^{1/2}} \\ D_{\theta\theta} &= \frac{2v}{R^2} \frac{xy}{1-x^2}, & D_{\theta\varphi} &= -\frac{v}{R^2} \left(\Gamma' + \frac{2x\Gamma}{1-x^2} \right), \\ D_{\varphi\varphi} &= -\frac{2v}{R^2} \left(y' + \frac{xy}{1-x^2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вектор $\nabla\varepsilon$ имеет единственную ненулевую компоненту

$$(\nabla\varepsilon)_\theta = -(1-x^2)^{1/2} \varepsilon' R^{-1} \quad (2.5)$$

Подстановка соотношений (2.2)–(2.5) в уравнение (2.1) дает уравнение для Γ

$$\varepsilon(1-x^2)\Gamma'' - y\Gamma' + \varepsilon'[(1-x^2)\Gamma' + 2x\Gamma] = 0 \quad (2.6)$$

Эта же подстановка после исключения безразмерного давления q приводит к соотношению

$$(\varepsilon z')'' = 1/2(y^2)''' + 2(1-x^2)^{-1}(\varepsilon'z + \Gamma\Gamma') + f''' \quad (2.7)$$

где введены обозначения

$$z = (1-x^2)y' + 2xy, \quad f''' = f_R' - 2f_\theta(1-x^2)^{-1/2} \quad (2.8)$$

Функция f определена с точностью до трех постоянных интегрирования. Она введена согласно методике [7] так, чтобы трижды проинтегрировать уравнение (2.7). По произволу принимаем условия

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0 \quad (2.9)$$

Отметим, что в работе [9], уравнения (2.6) и (2.7) выписаны неверно.

Умножение обеих частей уравнения (2.7) на $1-x^2$ и интегрирование дает

$$\begin{aligned} &\varepsilon(1-x^2)^2 y'''' + \varepsilon'(1-x^2)[(1-x^2)y'' + 2y] = \\ &= 1/2(1-x^2)(y^2)'' + x(y^2)' - y^2 + \Gamma^2 + (1-x^2)f'' + 2xf' - 2f \end{aligned} \quad (2.10)$$

Произвольная постоянная положена равной нулю, поскольку предполагается, что ось $x=1$ принадлежит внутренности области течения. Это означает аналитичность решения при $x=1$, и в частности выполнение условий: $y(1) = 0$ и $\Gamma(1) = 0$, что непосредственно следует из (2.2).

3. Постановки краевых задач. Для уравнений (2.6), (2.10) можно ставить различные краевые условия, задавая, например, поле скорости типа вихреисточника на плоскости $x=0$ и условия аналитичности на оси $x=1$. В такой постановке источником движения, помимо массовой силы f , служат неоднородные граничные условия. Однако существует один выделенный случай, когда задача ставится в безграничной области в отсутствие массовых сил с условиями регулярности на полюсах $x = \pm 1$, а движение вызывается источником импульса в начале координат. Это струя Ландау [3], для которой в случае $\Gamma \equiv 0$ и $\varepsilon \equiv 1$ решение выписы-

вается аналитически и имеет вид $y = 2(1 - x^2)/(A_0 - x)$, где A_0 — произвольная постоянная, которую можно связать с импульсом струи. Таким образом, случай струи Ландау спектральный, когда существует нетривиальное решение с однородными условиями при $x = \pm 1$. Если аналогичную однородную задачу поставить в полупространстве $x \geq 0$, то при условиях прилипания на плоскости нетривиального решения не существует. Следовательно, струя однородной жидкости, вытекающая из малого отверстия в плоскости, не может быть автомодельной.

Возникают два вопроса. Нельзя ли указать такое распределение вязкости $\varepsilon(x)$, чтобы в отсутствие массовых сил, во-первых, нашлось автомодельное решение задачи о струе, истекающей из отверстия на плоскости, и, во-вторых, существовало нетривиальное решение уравнения (2.6), регулярное при $x = 1$, удовлетворяющее одному из однородных условий $\Gamma'(0) = 0$ (слабое самовращение) или $\Gamma(0) = 0$ (сильное самовращение). Заметим, что при положительном решении второго вопроса проблема нетривиальной разрешимости уравнения (2.10) отпадает, поскольку при $\Gamma \neq 0$ оно становится неоднородным.

Оказывается, что восходящая автомодельная струя не может удовлетворять условиям прилипания при любой зависимости $\varepsilon(x)$ и тем самым бифуркация самовращения исключена. Для изменения ситуации в задачу необходимо ввести иные, неточечные источники движения.

4. Несуществование решений при условиях прилипания. Прежде всего обратимся к уравнению (2.6). Если $\varepsilon \equiv 1$, то после интегрирования сразу видна монотонность функции $\Gamma(x)$ и невозможность нетривиального решения. Преобразуем уравнение (2.6) тождественно к виду

$$[\varepsilon(1 - x^2)\Gamma']' + 2(x\varepsilon\Gamma)' = 2\varepsilon\Gamma + y\Gamma' \quad (4.1)$$

Для самовращения, слабого или сильного, необходимо, чтобы функция $\Gamma(x)$ имела одну или несколько экстремальных точек, где $\Gamma' = 0$. Рассмотрим из них ближайшую к правому концу точку x_0 . Не уменьшая общности, можно считать, что $\Gamma(x_0) > 0$. Ясно, что в рассматриваемых условиях на интервале $x_0 \leq x \leq 1$ функция $\Gamma(x)$ монотонно убывает, оставаясь положительной, а $\Gamma(1) = 0$. Проинтегрировав соотношение (4.1) в пределах от x_0 до x и используя условие аналитичности $\Gamma(x)$, при $x = 1$ имеем

$$\varepsilon(1)\Gamma(1) = x_0\varepsilon(x_0)\Gamma(x_0) + \int_{x_0}^1 (\varepsilon\Gamma + \frac{1}{2}y\Gamma') dx \quad (4.2)$$

Пусть $\varepsilon(x) > 0$, тогда из (4.2) вытекает, что условие $\Gamma(1) = 0$ выполнить невозможно, если вблизи оси на интервале $(x_0, 1)$ имеет место нисходящее течение с $y(x) \leq 0$, поскольку на том же интервале $\Gamma'(x) \leq 0$. Ясно, что данный вывод сохраняет силу и при достаточно малых $y(x) \geq 0$, в частности для движений при малых числах Рейнольдса, когда последнее слагаемое в (4.1), представляющее инерционные силы, отбрасывается.

Для получения дальнейших результатов запишем уравнение (2.6) в самосопряженной форме

$$(\varepsilon E\Gamma')' + 2\frac{\varepsilon'Ex}{1-x^2}\Gamma = 0; \quad E = \exp\left[-\int_0^x \frac{y dx}{\varepsilon(1-x^2)}\right] \quad (4.3)$$

Из (4.3) сразу же вытекает, что при $\varepsilon' < 0$ ни одно из условий $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma'(0) = 0$ выполнить нельзя, т. е. самовращение невозможно. Чтобы в этом убедиться, достаточно (4.3) проинтегрировать от 0 до x и получить неравенство $\Gamma'(x) > 0$.

Соотношение (4.3) тождественно преобразуется к виду

$$\{\varepsilon E[(1-x^2)\Gamma' + 2x\Gamma]\}' = 2\varepsilon\Gamma(xE)'$$

Интегрирование от 0 до 1 дает

$$\Gamma'(0) = -2 \int_0^1 \varepsilon \Gamma(xE)' dx$$

Отсюда следует, что при $(xE)' > 0$ самовращение невозможно. Из последнего неравенства вытекает достаточное условие отсутствия самовращения

$$xy \leq \varepsilon(1 - x^2) \quad (4.4)$$

Таким образом, можно надеяться получить самовращение лишь при условии, что вблизи оси осуществляется восходящее движение жидкости высокой вязкости.

В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что $y'(0) = \text{Re} \geq 0$, $y(0) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$, $\varepsilon'(x) \geq 0$, $\varepsilon(0) = 1$, $\varepsilon'(0) = 0$. Последнее условие правдоподобно и принято лишь для упрощения доказательства.

Введем функции H и G соотношениями

$$H = G + f, \quad G''' = 2\Gamma\Gamma'/(1 - x^2), \quad G(1) = G'(1) = G''(1) = 0 \quad (4.5)$$

и трижды проинтегрируем уравнение (2.7). Это приводит к соотношению

$$\varepsilon Z = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \left[\frac{(x-t)^2}{1-t^2} + 1 \right] \varepsilon' Z dt + H + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (4.6)$$

Для определения постоянных C_1 , C_2 , C_3 в равенствах, получающихся после каждого этапа интегрирования, полагаем $x = 0$. Получим

$$C_1 = 2\text{Re} - 2f(0) + \Gamma^2(0) - G''(0) \quad (4.7)$$

$$C_2 = Z'(0) - H'(0) = y''(0) - H'(0) \quad (4.8)$$

$$C_3 = \text{Re} - H(0) \quad (4.9)$$

Покажем, что без вращения ($\Gamma \equiv 0$) и в отсутствие поля массовых сил ($f \equiv 0$) автомодельное движение с условиями прилипания на плоскости $x = 0$ невозможно.

Выполнив в (4.6) условие $Z(1) = 0$, получаем

$$C_2 = -2\text{Re} - 2 \int_0^1 \frac{\varepsilon' z}{1+t} dt \quad (4.10)$$

Подстановка соотношений (4.7), (4.9) и (4.10) в (4.6) дает

$$\varepsilon Z = \frac{1}{2}y^2 + (1-x)^2 \int_0^x \frac{\varepsilon' Z}{1-t^2} dt - 2x \int_x^1 \frac{\varepsilon' Z}{1+t} dt + \text{Re}(1-x)^2 \quad (4.11)$$

Покажем, что при $\text{Re} \geq 0$ функция $Z(x)$ не имеет нулей внутри интервала $(0, 1)$. Пусть это не так, и $Z(x)$ имеет один нуль: $Z(x_0) = 0$. Тогда, полагая в (4.11) $x = x_0$, с очевидностью приходим к противоречию, поскольку справа все члены положительны. Пусть теперь $Z(x)$ имеет два нуля: $Z(x_1) = Z(x_2) = 0$. Подставив в соотношение (4.11) $x = x_1$ и $x = x_2$ и взяв разность этих уравнений, легко прийти к противоречию. Аналогично доказывается, что $Z(x)$ не может иметь любого конечного числа нулей. В предположении аналитичности это означает, что $Z(x) \geq 0$.

Из определения (2.8) функции $Z(x)$ можно получить

$$(1 - x^2)^2 [y/(1 - x^2)]' = Z \geq 0$$

Следовательно, $y(x) \geq 0$. Таким образом, в отсутствие массовых сил сходящееся движение вещества плоскости, когда $u_R(0) < 0$, или согласно (2.2) $y'(0) = \text{Re} > 0$, вызывает лишь восходящее движение жидкости с $y(x) > 0$. Отсюда, в частности, вытекает невозможность удовлетворения условиям прилипания: $y(0) = y'(0) = \text{Re} = 0$. Действительно, в этом случае должно быть $y''(0) > 0$, причем равенство $y''(0) = 0$ недопустимо, поскольку тогда согласно (2.10) $y \equiv 0$. Значит, в соответствии с (4.8) $C_2 > 0$. Но это противоречит равенству (4.10).

Заметим, что из приведенных рассуждений следует также невозможность двухсторонней струи с условием симметрии $y''(0) = 0$. Действительно, для такой струи согласно (4.8) $C_2 = 0$, тогда как в соответствии с (4.7) и (4.9) $C_1 = 2C_3 > 0$. Но в таком случае из (4.6) следует невозможность выполнения условия $Z(1) = 0$.

5. Слабое самовращение в модели турбулентной автомодельной струи. Пусть движение вязкой жидкости порождается стоком обильности Q на плоскости, так что $u_R = -Q/R$ при $x = 0$. Тогда $y(0) = 0$, $y'(0) = Re$. Если жидкость однородна, то течение описывается аналитическим решением Сквайра [4], которое характеризуется приосевой индуцированной струей с интенсивностью, обращающейся в бесконечность, когда величина Re достигает критического значения $Re_* = 7,67$ [11]. Рассмотрим неоднородную жидкость с кусочно-постоянной вязкостью

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq x < x_k \text{ (зона 1)} \\ \varepsilon_2, & x_k < x \leq 1 \text{ (зона 2)} \end{cases}$$

Предполагая течение в зоне 1 ламинарным, примем $\varepsilon_1 = 1$, тогда как в приосевой зоне 2 положим $\varepsilon_2 = \text{const} = \beta = 1 + \nu_t/\nu \geq 1$. В этом случае во всех предыдущих соотношениях надо считать $\varepsilon' = 0$ всюду, кроме точки $x = x_k$. В этой точке необходимо поставить условия непрерывности скоростей u_ξ и компонент тензора потока импульса $\Pi_{\theta\xi}$, где

$$\Pi_{\xi\eta} = \rho u_\xi u_\eta + p \delta_{\xi\eta} - \rho \nu D_{\xi\eta}; \quad \xi, \eta = R, \theta, \varphi \quad (5.1)$$

Для зон 1 и 2 удобно ввести свои переменные, положив

$$\begin{aligned} y = y_1, \quad \Gamma = \Gamma_1, \quad H = H_1, \quad 0 \leq x < x_k \\ y = \beta y_2, \quad \Gamma = \beta \Gamma_2, \quad H = \beta H_2, \quad x_k < x \leq 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тогда уравнения (4.6) и (2.6) при учете (2.8) можно записать в форме

$$\begin{aligned} (1 - x^2) y_i' + 2xy_i = 1/2 y_i^2 + Ax - A_1 x^2 + A_2 + H_i \\ (1 - x^2) \Gamma_i'' = y_i \Gamma_i'; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

С использованием соотношений (2.2), (2.4), (5.3) в соответствии с (5.1) получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{R\theta} &= -\Pi (1 - x^2)^{-1/2} (H_i' + A - 2A_1 x), \\ \Pi_{\theta\theta} &= -\Pi (1 - x^2)^{-1} [H_i - 1/2 (1 - x^2) H_i'' + 1/2 \Gamma_i^2 + Ax + \\ &\quad + A_1 (1 - 2x^2) + A_2] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\Pi_{\varphi\theta} = \Pi (1 - x^2)^{-1} [(1 - x^2) \Gamma_i' + 2x\Gamma_i - y_i \Gamma_i]; \quad \Pi = \rho \nu^2 / R^2$$

В зоне 2 требования регулярности при $x = 1$ при учете (2.9) приводят к соотношениям $A = 2A_1$, $A_2 = -A_1$. Следовательно, в соответствии с (5.3) имеем

$$(1 - x^2) y_2' + 2xy_2 = 1/2 y_2^2 - A_1 (1 - x)^2 + H_2 \quad (5.5)$$

После дифференцирования равенства (5.5) видно, что при условии $y_2(1) = 0$ величина $y_2'(1)$ принципиально неопределима. Она наряду с A_1 и $\Gamma_2'(1)$ должна быть задана в качестве произвольного параметра, необходимого для интегрирования уравнения (5.5) от точки $x = 1$ до $x = x_k$.

Для зоны 1 запишем

$$(1 - x^2) y_1' + 2xy_1 = 1/2 y_1^2 + Bx - B_1 x^2 + B_2 + H_1 \quad (5.6)$$

Для определения B , B_1 , B_2 воспользуемся условиями сопряжения в точке $x = x_k$. С учетом (5.2) имеем

$$y_1 = \beta y_2, \quad y_1' = \beta y_2', \quad \Gamma_1 = \beta \Gamma_2 \quad (5.7)$$

Используя равенства (5.4) и учитывая (5.7), получаем

$$B - 2x_k B_1 = \beta^2 [2A_1 (1 - x_k) + H_2'] - H_1' \quad (5.8)$$

$$Bx_k + B_1(1 - 2x_k^2) + B_2 = \beta^2 [2A_1x_k(1 - x_k) + H_2 - \frac{1}{2}(1 - x_k^2)H_2''] - H_1 + \frac{1}{2}(1 - x_k^2)H_1'' \quad (5.9)$$

$$(1 - x_k^2)\Gamma_1' + 2x_k\Gamma_1 = \beta^2 [(1 - x_k^2)\Gamma_2' + 2x_k\Gamma_2] \quad (5.10)$$

Кроме того, согласно (5.6) имеем

$$Bx_k - B_1x_k^2 + B_2 = (1 - x_k^2)y_1' + 2x_ky_1 - \frac{1}{2}y_1^2 - H_1 \quad (5.11)$$

Параметры B , B_1 , B_2 находятся из системы уравнений (5.8), (5.9), (5.11) при учете (5.7) после решения уравнения (5.5). Это позволяет интегрировать уравнение (5.6) от x_k до $x = 0$, используя первое из условий (5.7): Пусть параметр A_1 определяется из требования, чтобы $y(0) = 0$. Тогда по данным $y_2'(1)$, $\Gamma_2'(1)$, β , x_k решение полностью определяется, включая величину $Re = y_1'(0)$.

Вопрос о назначении параметров $y_2'(1)$ и x_k требует обращения к опытным данным и физическим моделям. Известно, что турбулентное течение в ядре струи автомодельно и практически не зависит от способа ее создания. По данным [12] продольная скорость на оси турбулентной струи определяется выражением $u_R = 3K/(8\pi\nu_t R)$, где $K = (\nu_t/0,0161)^2$ — импульс струи. Из этих соотношений находим

$$Ru_R/\nu_t = -y_2'(1) = 460,5 \quad (5.12)$$

От параметра x_k можно избавиться, если допустить, что граница x_k совпадает с точкой максимума функции $y(x)$, характеризующей эжекционную способность струи. Во внешней области при $x < x_k$ происходит нарастающая эжекция окружающей жидкости, тогда как внутри конуса $x > x_k$ поток поворачивает в направлении оси, что скорее всего и является причиной его интенсивной турбулизации.

Итак, в качестве пробной гипотезы примем: $y'(x_k) = 0$. Что касается параметра β , то зависимость $\beta(Re)$ определяется соотношением (5.12) и он может изменяться в широких пределах, начиная от единицы в момент турбулизации.

Согласно рассматриваемой модели с ростом числа Рейнольдса $Re = Q/\nu$ струя остается ламинарной, пока не достигается значение $y_2'(1) = -460,5$, чему соответствует значение $Re^* = 7,56$. После этого увеличение Re приводит к росту β при сохранении условия (5.12). Ясно, что в данной модели турбулентной струи кризис исключен.

Как показали расчеты для случая $f \equiv 0$ и малых отрицательных значений $\Gamma_2'(1)$, в интервале значений $1 < \beta < 1,08$ ($Re^* \leq Re < 8,2$) величина $\Gamma_1'(x_k)$ в соотношении (5.10) остается отрицательной. При значениях параметров $\beta = 1,08$; $Re = 8,2$ значение $\Gamma_1'(x_k)$ обращается в нуль, причем в этом случае во всей зоне $1 \Gamma_1' \equiv 0$. Следовательно, уравнение для циркуляции с граничными условиями $\Gamma(1) = 0$, $\Gamma'(0) = 0$ имеет нетривиальное решение. При этих параметрах происходит бифуркация нового стационарного решения с отличной от нуля азимутальной скоростью и нулевым вращательным трением на плоскости, т. е. бифуркация слабого самовращения.

Отметим, что хотя при больших β получается $\Gamma_1'(0) > 0$ и зависимость $\Gamma(x)$ имеет максимум при $x = x_k$, все же остается $\Gamma_1(0) > 0$, т. е. в рамках модели кусочно-постоянной вязкости нельзя получить сильное самовращение для чисто восходящего течения. Доказать или опровергнуть это свойство для произвольной функции $\varepsilon(x)$ аналитическими методами не удалось.

Случай слабого самовращения, как уже отмечено, характеризуется постоянством циркуляции во всей зоне 1. Это позволяет, используя (5.10) и (5.7), определить параметр β , отвечающий условию слабого самовращения

$$\beta = 2x_k \Gamma_2 / [(1 - x_k^2) \Gamma_2' + 2x_k \Gamma_2] \quad (5.13)$$

Найденная точка бифуркации отвечает условию (5.12), которое теряет силу для вращающейся струи.

Чтобы рассчитать режимы с немалым вращением, откажемся от условия (5.12) и будем рассматривать бифуркационное число Re как произвольный параметр, а β находить при помощи (5.13). Тогда вместо точки получится бифуркационная кривая (кривая 1 на фиг. 1), на которой величина $y_2'(1)$ возрастает от $-\infty$ при $\beta = 1$ и $Re = Re_*$.

Для немалых Γ получается картина, изображенная на фиг. 1, где $\bar{Re} = Re / Re_*$, $\Gamma_0 = \Gamma_1(0)/\beta$. Незакрученным течениям отвечает область левее кривой 1 на плоскости $\Gamma_0 = 0$. На линии 1 происходит бифуркация закрученных режимов (т. е. режимов с $\Gamma \neq 0$), мягкий характер возбуждения которых говорит об их устойчивости и неустойчивости исходного режима [13]. Семейства линий $\beta = \text{const}$ ($\beta = 1, 3, 10, 30$) и $\Gamma_0 = \text{const}$ ($\Gamma_0 = 0, 1, 2, 3$) образуют поверхность, симметричную относительно плоскости $\Gamma_0 = 0$. Эта поверхность ограничена кривой 2 ($\beta = 1$), которая отвечает кризису потери существования ламинарных закрученных струй, индуцированных вихрестокком на плоскости.

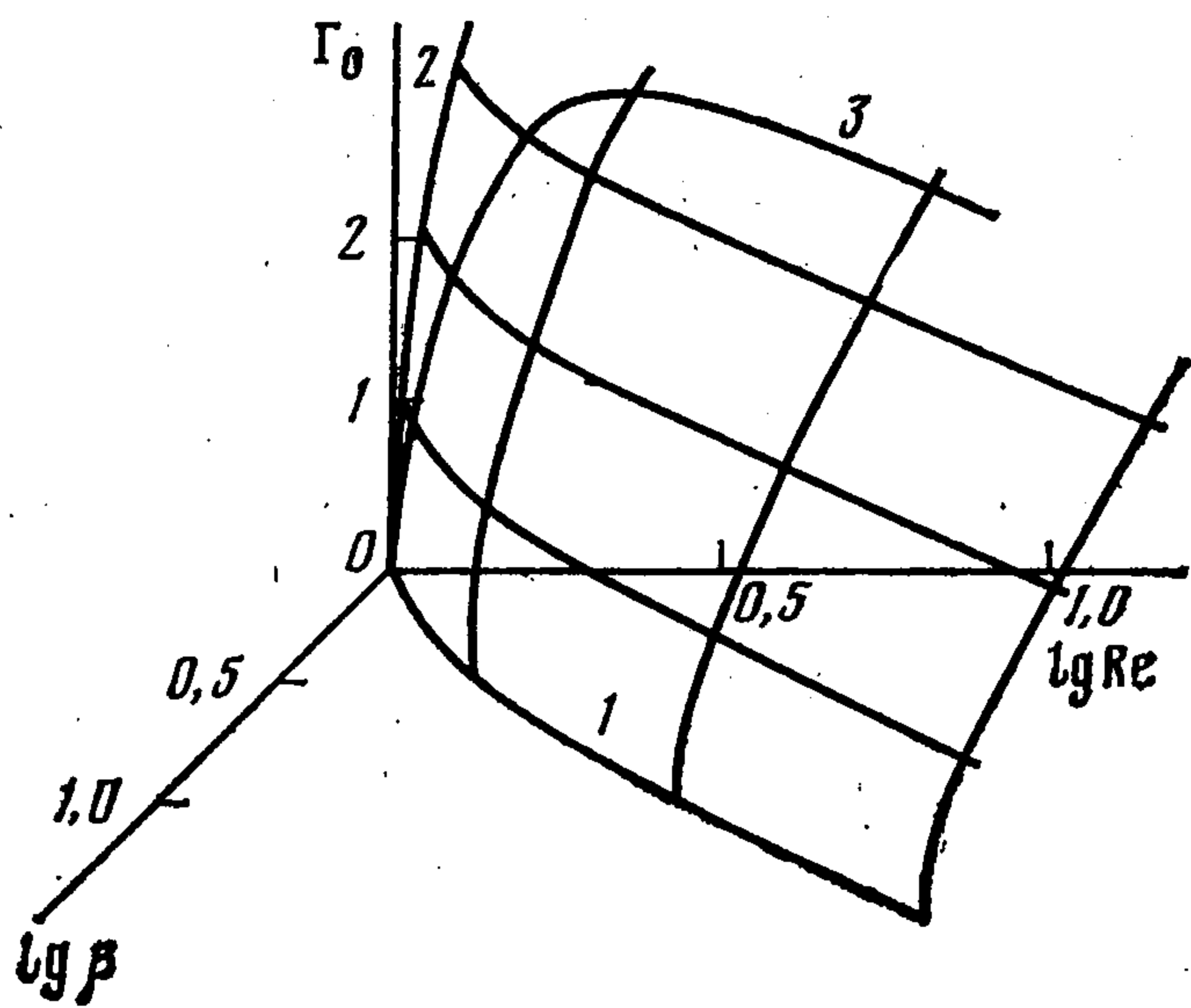
В реальных турбулентных закрученных струях параметры β и Re связаны, но эта связь неизвестна. Для иллюстрации примем простейшее предположение, что связь остается такой же, как и в случае без вращения, когда она определяется соотношением (5.12). Данной гипотезе отвечает кривая 3 на фиг. 1 и результаты, представленные на фиг. 2. С увеличением Re величина Γ_0 возрастает, стремясь к значению $\Gamma_0 \approx 3,8$. Область, занятая турбулентным ядром, расширяется, но не достигает стенки: при $Re \rightarrow \infty$ имеем $x_k \rightarrow 0,33$. Штриховой линии соответствует неустойчивый турбулентный режим без вращения.

Распределение величин $\bar{y} = y/\beta$ и $\bar{\Gamma} = \Gamma/\beta$ по углу θ для ряда типичных режимов приведено на фиг. 3, кривая 1 отвечает ламинарной ($y_2'(1) = -460,5$), а штриховая кривая 2 — турбулентной ($y_2'(1) = -460,5$, $\beta = 20$, $Re = 268$) незакрученным струям; кривые 3 (\bar{y}) и 4 ($\bar{\Gamma}$) — режиму самовращения ($Re = 140$, $\beta = 12$). Как видно, даже значительная турбулизация слабо меняет течение, тогда как закрутка, напротив, резко деформирует картину: струя становится шире и слабее. Приосевого возвратного движения, характерного для сильно закрученных струй [5], при самовращении не возникает.

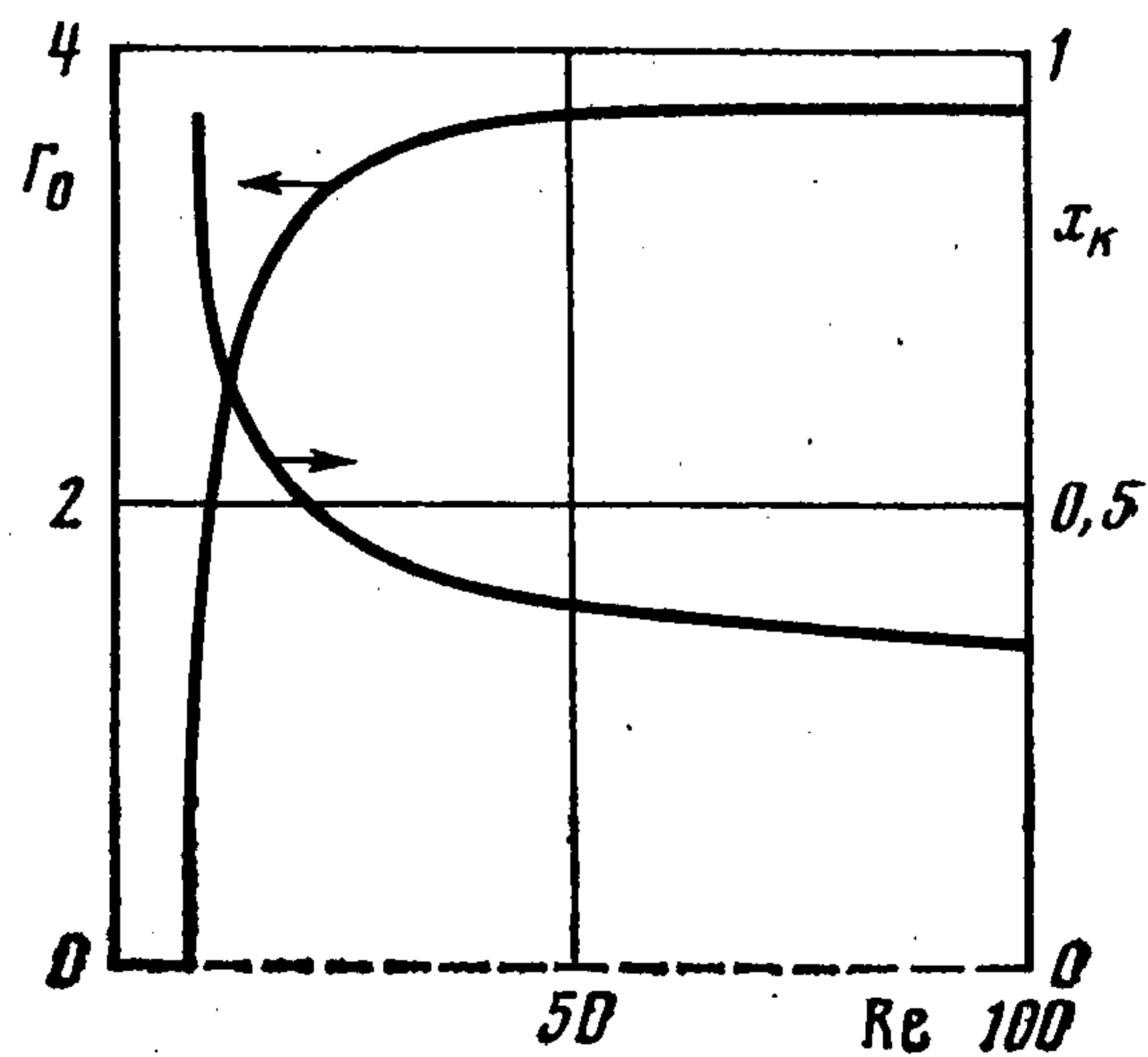
Схема меридионального движения изображена в верхнем углу фиг. 3.

6. Сильное самовращение в поле массовых сил. Добиться сильного самовращения с условиями прилипания на плоскости позволяет включение специальных массовых сил, например сил плавучести, связанных с термогравитационным механизмом. Рассмотрим автомодельную задачу о тепловой конвекции в полупространстве $z \geq 0$. В общем случае к уравнениям движения (2.1) необходимо присоединить уравнение теплопроводности, содержащее конвективные члены. Для упрощения задачи рассмотрим случай, когда число Прандтля $Pr = 0$, предположив, что температура удовлетворяет уравнению Лапласа и не зависит от движения жидкости.

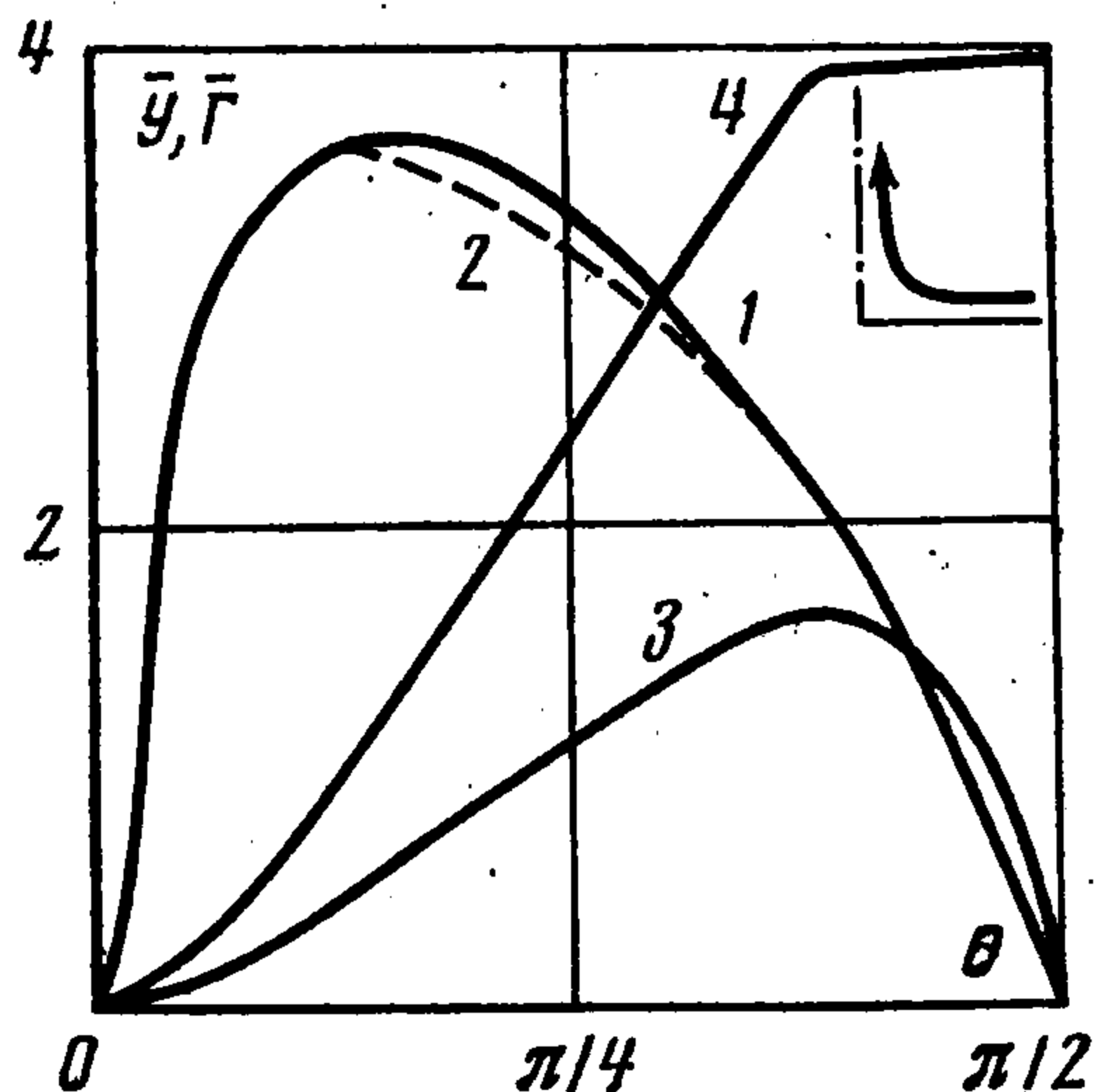
Из определения архимедовой силы $F = (\rho - \rho_\infty)g$ и приближения Буссинеска для плотности (α — коэффициент объемного расширения) $\rho/\rho_\infty = 1 - \alpha(T - T_\infty)$ следует, что автомодельное движение под воздействием



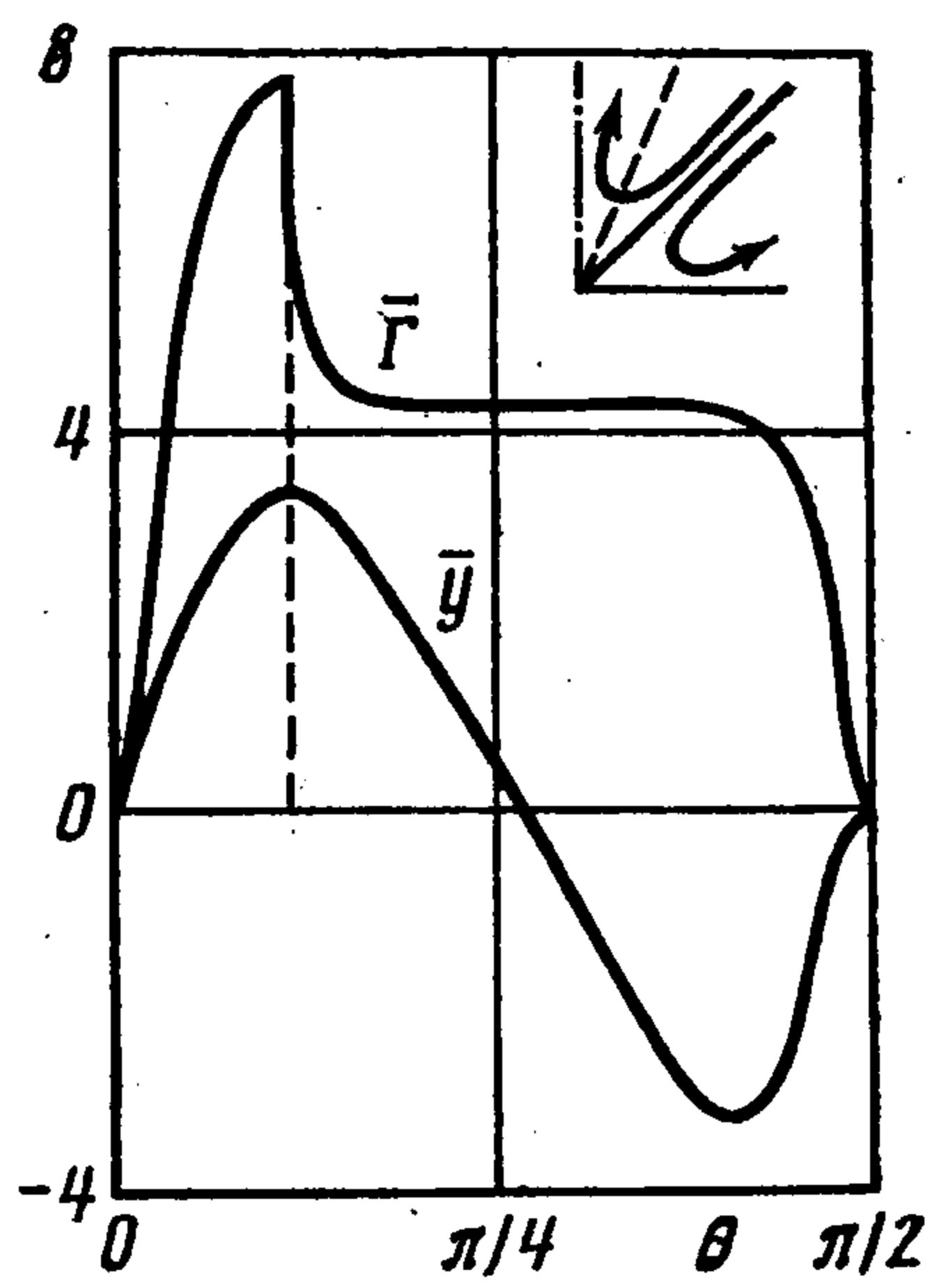
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

силы (2.3) возможно в случае теплового квадруполь (см. вторую из работ, указанных в сноске 2 на с. 614), которому для однородной жидкости отвечает поле температур $T = T_{\infty} + \gamma (3x^2 - 1)R^{-3}$, имеющее знакопеременный перегрев $T - T_{\infty}$ с нулевым тепловым потоком. Интенсивность теплового квадруполь характеризуется параметром γ или критерием Грасгофа $Gr = \alpha \gamma g / \nu^2$. При $\gamma > 0$ приосевая зона нагрета ($T > T_{\infty}$), а пристенная охлаждена ($T < T_{\infty}$).

Пусть в общем случае $T = T_{\infty} + \gamma \vartheta(x)R^{-3}$. Тогда, учитывая, что массовая сила \mathbf{F} имеет единственную ненулевую компоненту F_z и используя (2.3), находим $f_z = Gr \vartheta$. Величины f_R и f_{θ} , входящие в (2.8), определяются по формулам: $f_R = x f_z$, $f_{\theta} = -\sqrt{1-x^2} f_z$. С учетом этого получаем

$$f''' = Gr (x \vartheta' + 3 \vartheta) \quad (6.1)$$

Функция $\vartheta(x)$ определяется уравнением

$$(1 - x^2) \vartheta'' - 2x \vartheta' + 6 \vartheta = 0$$

Используя его общее решение, найдем решение уравнения (6.1)

$$f = \frac{1}{4} Gr (1 - x^2)^2 \left[Mx + N \left(x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \right) \right] \quad (6.2)$$

К условиям сопряжения (5.7)–(5.10) добавляются требования непрерывности температуры и теплового потока в предположении, что отношение коэффициентов теплопроводности $\lambda_2/\lambda_1 = \beta$. Последнее предположение, по-видимому, физически не реализуется, но позволяет температурную задачу решить аналитически до конца. В более реалистической поста-

новке, учитывающей эмпирические данные по турбулентному теплопереносу, необходимо численно решать полную зацепленную систему уравнений движения и энергии, отказавшись от условия $Pr = 0$.

Имея в виду получить лишь оценочные результаты, положим при $x = x_k$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2, \quad \vartheta_1' = \beta \vartheta_2' \quad (6.3)$$

Параметры M и N имеют различные значения в зонах 2 и 1. Из условия регулярности на оси $N_2 = 0$. Положив по произволу $M_2 = 1$, величины M_1 и N_1 найдем при помощи (6.3)

$$N_1 = \frac{9}{4} (\beta - 1) x_k (1 - x_k^2) \left(x_k^2 - \frac{1}{3} \right),$$

$$M_1 = 1 - N_1 \left(\ln \frac{1 + x_k}{1 - x_k} - \frac{2x_k}{x_k^2 - 1/3} \right)$$

После этого решение строится тем же методом, что и в п. 5.

Имея в виду лишь обнаружить бифуркацию самовращения, величины Γ и G (см. (4.5)) будем считать бесконечно малыми, так что примем $H = f$. Задача сводится к решению уравнений (5.5), (5.6), где величины H_i определены при помощи (6.2)' и (5.2). При $x = 1$ фиксируются величины: $y_2(1) = \Gamma_2(1) = 0$, $y_2'(1) = -460,5$, $\Gamma_2'(1) = -\delta^2$, $\delta^2 \ll 1$. Параметры A_1 и β находятся путем удовлетворения условиям прилипания $y_1(0) = y_1'(0) = 0$ методом двумерных секущих.

Результаты расчетов показывают, что при $Gr < 61,09$ режим ламинарный и $\beta = 1$. При больших значениях Gr режим турбулентный ($\beta > 1$), но без вращения. При $Gr = 280$ происходит отрыв и далее режим становится двухъячейстым (см. схему в верхней части фиг. 4). При $Gr = 3920$, $\beta = 4,69$ осуществляется бифуркация сильного самовращения. Наличие двух ячеек в меридиональном течении, по-видимому, является необходимым условием сильного самовращения.

Зависимости $\bar{y}(\theta)$ и $\bar{\Gamma}(\theta)$, отвечающие бифуркационным параметрам, показаны на фиг. 4. Штрихами обозначена граница турбулентного ядра ($\theta_k \approx 20^\circ$). Циркуляция, резко изменяясь в ядре и вблизи него, затем выходит на константу. При отсутствии области с $y < 0$ величина Γ так и остается постоянной. Изменение знака y согласно (5.3) меняет знак Γ'' , в результате чего у стенки возникает пограничный слой, где Γ падает до нуля. Заметим, что двухъячейстый режим возможен и при $Pr > 0$.

7. Обсуждение. В связи с явлением самовращения возникает вопрос о механизме генерации ненулевого момента импульса. Анализ стационарных решений указывает лишь на то, что с увеличением числа Рейнольдса от исходного режима, в котором вращение отсутствовало, ответвляется устойчивый режим с ненулевой вращательной скоростью, хотя момент внешних сил по-прежнему остается равен нулю. В случае сильного самовращения на плоскости действует момент сил трения и существует поток момента импульса, идущий вместе с жидкостью из бесконечности, т. е. бесконечность служит постоянно действующим источником момента. В случае слабого самовращения суммарный поток момента импульса через полусферу произвольного радиуса равен нулю. Но наличие момента импульса косвенно свидетельствует, что такой поток присутствует в переходном процессе установления нового режима, хотя этот нестационарный процесс здесь не рассматривался.

Таким образом, обмен моментом импульса с бесконечностью существен для обоих типов самовращения. Подобные явления уже известны в гидромеханике. В какой-то степени аналогичный процесс происходит при обтекании крылового профиля. В рамках модели идеальной жидкости, соглас-

но механизму Жуковского — Чаплыгина, при установлении стационарного режима на бесконечность уносятся вихри, а вокруг крыла остается компенсирующая циркуляция. В вязкой жидкости для поддержания постоянного значения циркуляции необходим стационарный поток завихренности на бесконечность. В первом случае имеется аналогия со слабым, а во втором — с сильным самовращением. В задаче о самовращении в струе [2] нестационарный процесс установления вполне определенного момента импульса, присущего вторичному режиму, был прослежен явно.

В отличие от ранее известных примеров здесь необходимым условием для бифуркации вращательного режима является турбулентный характер исходного невращающегося потока. В связи с этим можно говорить об обнаружении нового эффекта — турбулентного вихревого динамо.

В пользу реальности сильного самовращения может свидетельствовать эксперимент [14], в котором восходящая струя от точечного источника тепла при внешней устойчивой стратификации (что напоминает рассмотренную здесь квадрупольную модель) начинала вращаться при достаточно больших числах Грасгофа.

С целью проверки возможности эффекта слабого самовращения, авторами совместно с Т. В. Ли был поставлен следующий эксперимент. В цилиндрическом баке диаметром 0,6 м, вмещающем 200 л воды, движение возбуждалось радиальным течением воздуха в 5 мм зазоре между поверхностью воды и крышкой, в центре которой осуществлялся отсос воздуха через отверстие диаметра 5 мм. Наблюдения показали, что при малых расходах воздуха жидкость в баке совершает меридиональное движение и не вращается. Но если расход достаточно велик, то жидкость постепенно закручивается и часами совершает вращательное движение, направление которого обусловлено начальной малой закруткой. Поскольку вращательное трение воды о воздух мало, то условия эксперимента близки к рассмотренной в п. 5 задаче. Эти результаты могут свидетельствовать в пользу реальности вихревого динамо. Следует, однако, подчеркнуть, что требуется более тщательное экспериментальное исследование.

Из числа возможных объектов приложения полученных результатов укажем на астрофизические струи, природа которых остается загадочной. С точки зрения приведенного анализа не исключено, что причиной возникновения астрофизических струй является стягивающийся к центру гравитации диск аккреции, который увлекает окружающий межзвездный газ, образуя приосевую струю. Турбулизация приводит к формированию высоковязкого ядра и слабому самовращению вместе с диском. Таким образом, получается, что астрофизические струи способны не только сбрасывать из системы момент импульса, но и генерировать новый. Не исключено также, что данный механизм важен для объяснения столь широкого распространения вращения в космосе.

Теория сильного самовращения скорее всего имеет приложения и в атмосферных процессах. Необходимость двухъячеистой структуры делает условия возникновения сильного самовращения довольно специальными и в естественных условиях достаточно редкими. Тем не менее в [15] описанию огненных смерчей посвящен специальный раздел, где, в частности, указано, что подобное явление возникло в результате пожара в Хиросиме, вызванного атомной бомбардировкой. Восходящий поток нагретого воздуха над водной поверхностью также способен породить смерч. Рассмотрение модельной задачи показывает, что в этих условиях возникают две струи — в воздухе и воде. Последняя турбулизируется раньше, но это не приводит к самовращению. Оно наступает, когда турбулизируется и воздушная струя.

Традиционная точка зрения, объясняющая широкое распространение и иногда наблюдаемое резкое усиление вращательных движений в природе (метеорология, космос), заключается либо в привлечении постоянно действующих внешних причин, либо в наличии начального рассеянного момента импульса. Однако возможны альтернативные механизмы генерации вращения в результате неустойчивости, и в частности рассмотренное здесь турбулентное вихревое динамо.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морфат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 340 с.
2. *Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.* Возникновение вращательного движения в результате гидродинамической неустойчивости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 51—59.
3. *Ландау Л. Д.* Об одном точном решении уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР. 1984. Т. 43. № 7. С. 299—301.
4. *Squire H. B.* Some viscous fluid flow problems. I Jet emerging from a hole in a plane wall // Phil. Mag. 1952. V. 43. № 7. P. 942—945.
5. *Гольдштик М. А.* О закрученных струях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 26—35.
6. *Yih C.-S., Wu F., Garg A. K., Leibovich S.* Conical vortices: A class of exact solutions of the Navier — Stokes equations // Phys. Fluids. 1982. V. 25. № 12. P. 2147—2158.
7. *Гольдштик М. А.* Одно парадоксальное решение уравнений Навье — Стокса // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 610—621.
8. *Serrin J.* The swirling vortex // Phil. Trans. Roy Soc. London. Ser. A., 1972. V. 271. № 1214. P. 325—360.
9. *Wu J. Z.* Conical turbulent swirling vortex with variable eddy viscosity // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1986. V. 403. P. 235—268.
10. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
11. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
12. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
13. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
14. *Torrance K. E.* Natural convection in thermally stratified enclosures with localized heating from below // J. Fluid Mech., 1979. V. 95. Pt 3. P. 477—495.
15. *Наливкин Д. В.* Смерчи. М.: Наука, 1984. 110 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.VII.1988