Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.36 + 532.5

В. А. Владимиров, В. В. Румянцев

К ОБРАЩЕНИЮ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИДЕАЛЬНУЮ ЖИДКОСТЬ

Рассматривается линейная задача устойчивости состояния равновесия твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. Прямым методом Ляпунова показано, что система неустойчива, если вторая вариация потенциальной энергии может принимать отрицательные значения. Получена оценка, гарантирующая экспоненциальное нарастание среднеквадратических отклонений частиц тела и жидкости от положения равновесия. При рассмотрении используется функционал Ляпунова, введенный в [1].

1. Функционал Ляпунова. Ранее был сформулирован [1] критерий неустойчивости для состояния равновесия твердого тела с полостью, частично или целиком заполненной идеальной несжимаемой жидкостью обладающей поверхностным натяжением, и для доказательства неустойчивости предложен функционал ([1], с. 179)

$$V = -(T + \Pi)\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} q_j + \sum_{i=1}^{3} \rho \int_{\tau} \frac{\partial T^\circ}{\partial u_i} \Delta x_i \, d\tau\right\} \tag{1.1}$$

$$\Big(T = T_1 + T_2, \quad \Pi = -U_1 - \rho\int_{\tau} U_2 \, d\tau + \Pi_2', \quad T_1 = T_1(q_j, q_j^{\cdot}),$$

$$T_2 = \rho\int_{\tau} T^\circ d\tau, \quad T^\circ = T^\circ(q_j, q_j^{\cdot}, x_i, u_i), \quad L = T - \Pi\Big)$$

Здесь T и Π — кинетическая и потенциальная энергии системы «тело плюс жидкость», T_1 и $U_1(q_j)$ — кинетическая энергия твердого тела и силовая функция приложенных к нему активных сил; q_j, $q_j^{\cdot}$ ($j = 1, \ldots, n \leqslant 6$) — обобщенные координаты и скорости твердого тела; T_2 и $U_2(q_j, x_i)$ — кинетическая энергия жидкости и силовая функция действующих на нее массовых сил; T° — плотность кинетической энергии жидкости; x_i ($i = 1, 2, 3$) — декартовы координаты частиц жидкости в системе координат, жестко связанной с твердым телом; $u_i = dx_i/dt$ — относительные скорости частиц жидкости; $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$ — смещения частиц жидкости в возмущенном движении от их значений x_{i0} в положении равновесия; τ — область пространства $x_1x_2x_3$, занятая жидкостью; $\partial T^\circ/\partial u_i = v_i$ — проекции абсолютной скорости жидкости; Π_2' — потенциальная энергия сил поверхностного натяжения. Предполагается, что в положении равновесия обобщенные координаты тела $q_j = 0$ ($j = 1, \ldots, n$).

Для удобства рассмотрения функционал, стоящий в фигурных скобках (1.1), перепишем в виде

$$W = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_j^{\cdot}} q_j + \sum_{i=1}^{3} \int_{\tau} \rho v_i \Delta x_i \, d\tau \tag{1.2}$$

Далее будет изучаться задача первого (линейного) приближения. Прежде всего покажем, что функционал W в первом приближении может быть представлен в виде

$$W = \int \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi}\, d\tau \qquad (1.3)$$

Здесь и всюду далее интегрирование ведется по области пространства $\tau_1 \bigcup \tau$, занятой телом (τ_1) и жидкостью (τ); $\boldsymbol{\xi}$ — вектор смещения из положения равновесия частиц твердого тела или жидкости.

Действительно, производная кинетической энергии системы «тело плюс жидкость»

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \int \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j}\, d\tau, \quad T = \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{v}^2 d\tau \qquad (1.4)$$

Радиус-вектор частицы тела относительно начала инерциальной системы координат

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_j) \qquad (1.5)$$

и частицы жидкости

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_j, x_i) \qquad (1.6)$$

так что вектор абсолютной скорости тела

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

и жидкости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} u_i$$

Следовательно, для точек тела и жидкости

$$\partial \mathbf{v} / \partial \dot{q}_j = \partial \mathbf{r} / \partial q_j$$

откуда в первом приближении для (1.4) имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \int \rho \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right)_0 d\tau \qquad (1.7)$$

(нулевой индекс означает, что функция взята в положении равновесия). С другой стороны, из (1.5), (1.6) следует, что в линейном приближении вектор смещения $\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ из положения равновесия $\mathbf{r}_0$ частицы тела

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right)_0 q_j \qquad (1.8)$$

и частицы жидкости

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \right)_0 \Delta x_i \qquad (1.9)$$

Но для вектора $\boldsymbol{\xi}_s$ смещения точек системы как одного твердого тела имеем

$$\boldsymbol{\xi}_s = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right)_0 q_j$$

причем $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_s$ для твердого тела и $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_s + \Delta \mathbf{x}$ для жидкости. Поэтому из (1.7) получаем представление для первого члена в правой части (1.2)

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \int \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi}_s\, d\tau$$

из которого сразу следует, что функционал (1.2) приводится к виду (1.3).

2. Оценка роста возмущений. Пусть система «тело плюс жидкость» находится в состоянии равновесия (покоя), причем потенциальная энергия П в этом состоянии не имеет минимума. Покажем, что в силу уравнений первого (линейного) приближения система неустойчива и дадим оценку скорости нарастания возмущений.

Пусть величины u_i, Δx_i, q_j, $\dot{q}_j$, v_i, ξ_i удовлетворяют линеаризованным уравнениям движения и граничным условиям, просто получающимся из приведенных в [1, 2]. Интеграл энергии для линейной задачи имеет вид

$$E = T + \Pi^{(2)} = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

Здесь T дается тем же выражением (1.4), в котором интегрирование ведется по невозмущенной области $\tau \cup \tau_1$, соответствующей состоянию равновесия $q_j = 0$, $\Delta x_i = 0$; $\Pi^{(2)}$ — первый (квадратичный) член в разложении потенциальной энергии П по степеням смещений Δx_i и ξ_i. Форма $\Pi^{(2)}$ при подходящем выборе обозначений совпадает со второй вариацией потенциальной энергии П [1, 2].

Примем, что отсутствие минимума у П имеет такой характер, что существует поле смещений q_j^*, Δx_i^*, для которого вторая вариация П отрицательна, т. е.

$$\Pi^{(2)} = \Pi^* < 0 \quad \text{при} \quad q_j = q_j^*, \quad \Delta x_i = \Delta x_i^* \tag{2.2}$$

Основным в оценке роста возмущений является представление для производной W (1.3) по времени ([1], с. 180)

$$\dot{W} = 2\,(T - \Pi^{(2)}) \tag{2.3}$$

Комбинируя (2.1) и (2.3), получаем

$$\dot{W} = 4T - 2E \tag{2.4}$$

С другой стороны, используя неравенство Коши — Буняковского и представление (1.3), имеем оценку

$$W^2 \leqslant \int \rho \mathbf{v}^2\, d\tau \int \rho \xi^2\, d\tau = 2TM, \quad M \equiv \int \rho \xi^2\, d\tau \tag{2.5}$$

Учитывая связь $\dot{M} = 2W$ и соотношение (2.4), из (2.5) можно получить дифференциальное неравенство

$$d\,(\dot{M}/M)/dt \geqslant -4E/M \tag{2.6}$$

которое при учете (2.1) может быть точно проинтегрировано. Начальные данные при этом определяются по двум независимым векторным функциям

$$\xi\,(\mathbf{x}, 0) = \xi^\circ(\mathbf{x}),\ \mathbf{v}\,(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^\circ(\mathbf{x}) \tag{2.7}$$

Поля $\xi^\circ(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})$ должны удовлетворять очевидным для несжимаемой жидкости ограничениям, которые наиболее просто выписываются при переформулировке начальных данных в терминах q_j, $\dot{q}_j$, Δx_i, u_i 1.6)—(1.9). Возникающее после интегрирования (2.6) соотношение довольно громоздко. Для целей настоящей работы достаточна более грубая оценка роста M, получающаяся следующим образом.

Выбираем начальные данные (2.7) так, чтобы значение интеграла энергии (2.1) было отрицательным. Для этого, используя (2.2), берем $\Pi^{(2)}(0) < 0$, $T(0) < |\Pi^{(2)}(0)|$. Теперь из (2.6) вытекает неравенство

$d(M^{\cdot}/M)/dt > 0$, интегрирование которого дает

$$M^{\cdot}/M > 2\lambda; \quad \lambda \equiv W(0)/M(0) \tag{2.8}$$

Повторное интегрирование приводит к неравенству

$$M(t) > M(0)\exp(2\lambda t) \tag{2.9}$$

В силу того что $W(0)$ — билинейная форма от полей (2.7), значение постоянной λ всегда может быть выбрано положительным. Действительно, если после выбора начальных данных (2.7) оказывается, что $\lambda < 0$, то достаточно в них сменить знак одной из функций $\xi^{\circ}(\mathbf{x})$ или $\mathbf{v}^{\circ}(\mathbf{x})$, оставив вторую неизменной. Значение E при такой операции не меняется. Тем самым по построению обеспечивается существование начальных данных, соответствующих (2.9) с $\lambda > 0$.

Таким образом показано, что при выполнении условия (2.2) состояние равновесия тела с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость, обладающую поверхностным натяжением, неустойчиво по линейному приближению. Характер нарастания — не медленней, чем экспоненциальный. Оценка снизу инкремента роста возмущений дается величиной λ (2.8), зависящей только от начальных данных.

Основной интерес составляет оценка значений величины λ. Для ее получения полезно рассмотреть более узкий, чем (2.7), класс начальных данных, содержащих функцию $\xi^*(\mathbf{x})$ (соответствующую Δx_i^*, q_j^* (2.2), (1.8), (1.9)) и произвольную постоянную k:

$$\xi(\mathbf{x}, 0) = \xi^*(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \xi_t(\mathbf{x}, 0) = k\xi^*(\mathbf{x}) \tag{2.10}$$

Для этих начальных данных из определения величины λ (2.8) вытекает $\lambda = k$, а условия $\lambda > 0$, $E < 0$ приводят к ограничениям

$$0 < \lambda < \Lambda \equiv \sqrt{-2\Pi^{(2)}(0)/M(0)} \tag{2.11}$$

Тем самым для оценки (2.9) в случае начальных данных из класса (2.10) гарантируется наличие любых значений λ из интервала (2.11).

Класс (2.10) замечателен тем, что ему соответствуют наибольшие возможные значения λ. Действительно, для возмущений с произвольными начальными данными (2.7) из определения величины λ (2.8), неравенства Коши — Буняковского и условия $E < 0$ вытекает оценка сверху $\lambda < \Lambda$.

Замечания. 1°. Поскольку математические вопросы существования решений здесь не рассматривались, неравенство (2.9) имеет характер априорной оценки.

2°. Замечательной особенностью приведенной оценки роста возмущений является независимость способа ее получения от конкретного вида второй вариации потенциальной энергии $\Pi^{(2)}$. Для справедливости (2.9) требуется только существование возмущения с отрицательной $\Pi^{(2)}$ (2.2) и выполнение равенства (2.3).

3°. Представляет интерес задача нахождения наибольшего значения Λ^+ величины Λ (2.11) на всех кинематически допустимых полях $\xi^*(\mathbf{x})$ (2.2). Ее решение позволило бы определить не только наибольшие значения величины λ, но и выявить конкретный вид наиболее опасных с этой точки зрения начальных данных (2.10). Возникающая здесь вариационная задача сводится к поискам минимума функционала $\Pi^{(2)}$ при условии $M = 1$.

4°. Доказательства неустойчивости рассматриваемой системы методами спектральной теории в различных частных случаях даны в [3, 4]. В [3] изучалась та же постановка задачи, что и в настоящей статье, но без учета сил поверхностного натяжения. В [4] рассмотрена задача с поверхностным натяжением, но для случая неподвижного сосуда. В [3, 4] проведены доказательства существования собственных чисел, дающих экспоненциальный рост возмущений. Оценок величин этих чисел в [3, 4] не проводилось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Румянцев В. В.* К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 51—66.
3. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 169—174.
4. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.

Москва, Новосибирск

Поступила в редакцию
13.XII.1988