Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.8 : 534.1 + 62 — 50

Л. Д. Акуленко

КОНСТРУКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуется задача управления движениями механических систем на асимптотически большом фиксированном интервале времени. Рассматриваемые объекты могут содержать элементы с дискретными параметрами (материальные точки, твердые тела, невесомые пружины и т. п.) и колебательные звенья с распределенными параметрами (струны, стержни, упругие брусы и валы, мембраны, пластины, полости со стратифицированной жидкостью и др.), спектр частот которых счетный. Управляющие воздействия кинематического или динамического типов предполагаются сосредоточенными по пространственным переменным. Они могут быть подвижными, приложенными к абсолютно жестким частям системы или (и) фиксированными на границах распределенных элементов (граничное управление). Такая реализация управляющих воздействий имеет прикладное значение. Предполагается, что методами математической физики [1, 2] и моментов [3, 4] получена счетномерная задача управления для коэффициентов Фурье решения по базису краевой задачи. На основе асимптотического подхода строится приближенное управление и приводится обоснование схемы приближенного решения задачи. Исследуется конкретная задача плоского разворота упругого стержня при помощи сосредоточенного на конце момента сил.

1. Исходные предположения и постановка задачи. Не ставя своей целью исследовать максимально общую управляемую механическую систему, рассмотрим случай скалярной управляющей функции $w(t)$ [4—9]. Предположим, что счетная система уравнений для коэффициентов Фурье $s_i(t)$ искомого распределения $z(t, x)$ по ортонормированному с весом $\rho(x)$ базису $\{r_i(x)\}$ имеет вид

$$s_i^{\cdot\cdot} + \omega_i^2 s_i = \alpha_i w, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots; \quad t \in [0, T] \tag{1.1}$$
$$0 \leqslant \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots, \quad \alpha_i \neq 0$$
$$z(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(t) r_i(x), \quad x \in D \subset R^p \quad (r_i, r_j)_\rho = \delta_{ij}$$

Вектор $(s, s^\cdot)$ считается элементом счетномерного евклидова пространства. Собственные частоты колебаний ω_i, $i \geqslant 1$, предполагаются некратными, а параметры влияния α_i, характеризующие эффективность управления для i-й моды, отличными от нуля; $\dim D = p \geqslant 1$.

Для встречающихся в приложениях распределенных колебательных систем частоты ω_i как функции дискретного параметра i при $i \to \infty$ могут иметь асимптотические представления вида

1) $\omega_i \sim \sqrt{i}$, $\omega_{i+1} - \omega_i \sim 1/\sqrt{i}$ (гравитационные волны в полости, содержащей однородную жидкость со свободной поверхностью или дискретно стратифицированную жидкость [9]);

2) $\omega_i \sim i$, $\omega_{i+1} - \omega_i \sim 1$ (поперечные волны в струне, упругом вале; продольные — в распределенной пружине, упругом брусе [4, 7]);

3) $\omega_i \sim \sqrt{i^3}$, $\omega_{i+1} - \omega_i \sim \sqrt{i}$ (гравитационно-капиллярные или капиллярные волны в полости, аналогичные указанным п. 1));

4) $\omega_i \sim i^2$, $\omega_{i+1} - \omega_i \sim i$ (поперечные волны в упругих стержне, балке [8]).

Начальные значения $\{s_i^0, v_i^0\}$ переменных $\{s_i, v_i\}$, $i \geqslant 0$ $(v_i(t) \equiv \equiv s_i^{\cdot}(t))$, при $t = 0$ получаются стандартным образом как коэффициенты Фурье начальных распределений смещений $z(0, x)$ и скоростей $z^{\cdot}(0, x)$ по базису $\{r_i(x)\}$, порождаемому соответствующей самосопряженной краевой задачей [1, 2]. Эти распределения должны удовлетворять краевым условиям в начальный момент времени.

Ставится задача финитного управления [4]: построить функцию $w(t)$ из некоторого допустимого класса W $(w(t) \in W)$, приводящую систему (1.1) из состояния $\{s_i^0, v_i^0\}$ в требуемое $\{s_i^T, v_i^T\}$, $i \geqslant 0$, при $t = T$, $T < \infty$. Допустимый класс функций W характеризуется свойствами физической реализуемости и существования достаточно гладкого решения $z = z(t, x)$. Обычно от $w(t)$ требуется интегрируемость с квадратом, т. е. $w(t) \in W \subseteq L_2[0, T]$, а ряд (1.1) для решения $(z(t, x), z^{\cdot}(t, x))$ должен сходиться по норме энергетического пространства (энергия системы должна быть конечной для всех $t \in [0, T]$, $T < \infty$) [1, 2, 5]. Итак, требуется решить двухточечную краевую задачу по t

$$s_i(0) = s_i^0, \quad v_i(0) = v_i^0; \quad s_i(T) = s_i^T, \quad v_i(T) = v_i^T \tag{1.2}$$

Заметим, что конечные функции распределения смещений и скоростей, определяемые коэффициентами $\{s_i^T, v_i^T\}$, должны удовлетворять граничным условиям. В более общем случае при $t = T$ может быть задана совокупность значений конечного или счетного числа функционалов [7], в частности, заданы лишь некоторые s_i^T, v_i^T $(i \in I$, где I — некоторое множество индексов). Очевидный механический смысл имеют следующие подслучаи:

1. При $\omega_0 = 0$ и $s_0(T) = s_0^T$, $v_0(T) = v_0^T$, $s_i(T) = v_i(T) = 0$ — приведение системы в состояние движения как целого; $z(t, x) = = s_0(t)\, r_0(x)$, $t \geqslant T$, где $s_0(t) = s_0^T + v_0^T(t - T)$, с гашением относительных колебаний. Если при этом потребовать, чтобы амплитуда парциальных колебаний $A_{i^*}^T = [(s_{i^*}^T)^2 + (v_{i^*}^T / \omega_{i^*})^2]^{1/2} \neq 0$, то система будет перемещаться как целое и совершать монохроматические колебания с частотой ω_{i^*}.

2. В подслучае $s_i(T) = s_i^T$, а $v_i(T)$ $(i \geqslant 0)$ — произвольны, это — задача о «жестком» попадании; если требуется, чтобы $A_i^T = 0$ $(i \geqslant 1$, $\omega_0 = 0)$, а s_0^T, v_0^T — произвольны, то имеет место задача о гашении относительных колебаний. Если заданы s_i^T, v_i^T, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, то говорят об n-модовом приближении задачи управления; при $n = 0$, т. е. заданы s_0^T, v_0^T, то это — «грубая» постановка, поскольку в ней относительные колебания системы не учитываются. Если же $\omega_0 > 0$, то управляемая система является чисто колебательной.

Проблема управляемости для счетной колебательной системы (1.1), (1.2) на конечном интервале времени посредством конечного числа (в частности, одной $w(t)$) управляющих функций приводит к значительным, принципиальным трудностям [4—9]. Получающееся управление, как правило, оказывается обобщенной функцией. Представляется однако возможным конструктивное решение соответствующей задачи приближенного управления движением, например удовлетворения конечным условиям (1.2), с требуемой точностью $O(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$.

В работе предлагается подход приближенного решения задачи управления на асимптотически большом фиксированном интервале времени, определяемом малым параметром ε следующим образом:

$$t \in [0, T], \quad T = \Theta\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \Theta = O(1) \tag{1.3}$$

Коэффициенты α_i ($i \geqslant 0$) в (1.1) (по отношению к параметру ε) порядка единицы ($\alpha_i \sim 1$); по i они могут убывать или возрастать, или быть ограниченными. Частоты ω_i ($i \geqslant 1$) в (1.1) также по ε порядка единицы; типичная зависимость от i описана выше. Величины s_0^0, s_0^T и $(s_0^0 - s_0^T)$ могут быть асимптотически большими, а амплитуды парциальных колебаний и скорость $v_0^{0,T}$, т. е. энергия системы, порядка единицы. Итак, далее предполагается ($\omega_0 = 0$)

$$s_0^{0,T} \sim 1/\varepsilon, \quad (s_0^0 - s_0^T) \sim 1/\varepsilon, \quad v_0^{0,T} \sim 1 \tag{1.4}$$

$$A_j^{0,T} = [(s_j^{0,T})^2 + (v_j^{0,T}/\omega_j)^2]^{1/2} \sim 1, \quad A_\Sigma^{0,T} = \Big[\sum_{j=1}^{\infty} (A_j^{0,T})^2\Big]^{1/2} \sim 1$$

$$E_i^{0,T} = {}^1/_2 (\omega_i A_i^{0,T})^2 \sim 1, \quad E_\Sigma^{0,T} = \sum_{i=0}^{\infty} E_i^{0,T} \sim 1 \quad \left(E_0 = \frac{1}{2} v_0^2\right)$$

Здесь E_i ($i \geqslant 0$) — значения полной «энергии» мод парциальных колебаний, E_Σ — суммарная «энергия» системы.

Отметим, что в процессе управляемого движения текущие значения $s_i(t)$, $v_i(t)$ ($i \geqslant 0$) для $\forall t \in [0, T]$, где $T \sim \varepsilon^{-1}$, удовлетворяют условию (1.4) при соответствующем выборе функции $w(t)$ (см. п. 2).

Далее система (1.1) рассматривается при $\omega_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$ и трактуется как счетное множество линейных однонаправленных осцилляторов (или плоских маятников на параллельных осях), находящихся на общем основании [6, 7]. К основанию прилагается управляющее воздействие $w(t)$ кинематического или динамического типов. В первом случае $s_0^{\cdot\cdot} = w$ — ускорение некоторой точки основания, а во втором — ускорение центра масс системы. Проблема управляемости счетной системы маятников изучалась в [4—9] и др.

2. Приближенное решение задачи о перемещении счетной системы осцилляторов (маятников) с гашением относительных колебаний. Для определенности (без существенного ограничения общности) ставится задача о приведении системы (1.1) при $t = T$ (1.3) в состояние заданного движения как целого без относительных колебаний, т. е. конечные условия (1.2) и требуемое движение при $t \geqslant T$ принимаются в виде

$$s_0(T) = s_0^T \ (= 0), \quad v_0(T) = v_0^T \ (=0), \quad s_i(T) = v_i(T) = 0 \tag{2.1}$$

$$\forall t > T, \ w(t) \equiv 0\colon \ s_0(t) = s_0^T + v_0^T (t - T), \quad v_0(t) = v_0^T$$

$$s_i(t) = v_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots; \ T = \Theta\varepsilon^{-1})$$

В соотношениях (2.1) можно также положить $s_0^T = v_0^T = 0$, что достигается заменой переменных $s_0^* = s_0 - s_0^T$, $v_0^* = v_0 - v_0^T$ (и начальных значений). Тогда требуемое движение будет состоянием покоя: $z(t, x) = z^{\cdot}(t, x) \equiv 0$, $x \in D$, $t \geqslant T$.

Искомое управление $w(t) \in W$ для задачи (1.1), (1.2), (2.1) ищем в виде ряда

$$w = w(t, \Pi) \equiv a_0 t + b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \sin\omega_j t + b_j \cos\omega_j t)$$

$$\Pi = \{a_i, b_i\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \ldots; \quad \Pi = \text{const} \tag{2.2}$$

в котором $\Pi \in l_2$ — неизвестный вектор счетномерного евклидова пространства l_2, подлежащий определению из условий (2.1). Заметим, что к виду (2.2) приводится выражение для оптимального управления движением системы (1.1) с интегральным квадратическим критерием качества [4, 5, 7]

$$J[w] = \frac{1}{2}\int_0^T w^2(t)\,dt \to \min_{|w|<\infty}, \quad w(t) \in W \subseteq L_2[0, T] \tag{2.3}$$

Подстановка выражения $w(t, \Pi)$ (2.2) в систему (1.1) и интегрирование с учетом начальных условий (1.2) позволяет получить следующее представление для ее решения как задачи Коши:

$$s_0 = s_0(t, \Pi) = s_0{}^0 + v_0{}^0 t + \frac{a_0}{6}t^3 + \frac{b_0}{2}t^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j\varphi_j}{\omega_j^2} + S_0(t, \Pi) \tag{2.4}$$

$$v_0 = v_0(t, \Pi) = v_0{}^0 + {}^1/{}_2 a_0 t^2 + b_0 t + V_0(t, \Pi) \quad (\varphi_i = \omega_i t)$$

$$s_i = s_i(t, \Pi) = s_0{}^0 \cos\varphi_i + (v_i{}^0/\omega_i)\sin\varphi_i -$$

$$- {}^1/{}_2(\alpha_i a_i \varphi_i/\omega_i{}^2)\cos\varphi_i + {}^1/{}_2(\alpha_i b_i \varphi_i/\omega_i{}^2)\sin\varphi_i + S_i(t, \Pi)$$

$$v_i = v_i(t, \Pi) = -s_i{}^0\omega_i \sin\varphi_i + v_i{}^0\cos\varphi_i +$$

$$+ {}^1/{}_2(\alpha_i a_i \varphi_i/\omega_i)\sin\varphi_i + {}^1/{}_2(\alpha_i b_i\varphi_i/\omega_i)\cos\varphi_i + V_i(t, \Pi)$$

В выражениях (2.4) выделены «главные» члены $O(1/\varepsilon)$ и $O(1)$, а малые возмущения $O(\varepsilon)$ для $\forall t \in [0, T]$, $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, отнесены к слагаемым S_i, V_i $(i = 0, 1, \ldots)$. По поводу этого разделения нужно отметить, что $V_i(t, \Pi) = S_i{}^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \Pi)$, $i \geqslant 1$, но $V_0(t, \Pi) \neq S_0{}^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \Pi)$. Указанные оценки предполагают сходимость соответствующих рядов, при помощи которых представляются функции S_i, V_i:

$$S_0(t, \Pi) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j^2}[-a_j\sin\varphi_j + b_j(1-\cos\varphi_j)] \tag{2.5}$$

$$V_0(t, \Pi) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j}[a_j(1-\cos\varphi_j) + b_j\sin\varphi_j] \equiv S^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \Pi) + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{\omega_j}$$

$$S_i(t, \Pi) = \frac{\alpha_i a_0}{\omega_i^3}(\varphi_i - \sin\varphi_i) + \frac{\alpha_i b_0}{\omega_i^2}(1-\cos\varphi_i) + \frac{\alpha_i a_i}{2\omega_i^2}\sin\varphi_i +$$

$$+ \frac{\alpha_i}{\omega_i}\sum_{j=1}^{\infty}{}' \left(a_j\frac{\omega_i\sin\varphi_j - \omega_j\sin\varphi_i}{\omega_i^2-\omega_j^2} - b_j\omega_i\frac{\cos\varphi_i - \cos\varphi_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2}\right)$$

$$V_i(t, \Pi) = S_i{}^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \Pi), \quad i \geqslant 1, \quad t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$$

Символ Σ' означает, что члены с $j = i$ отсутствуют (они отнесены к главным членам).

Счетная совокупность параметров $\Pi = \{a_i, b_i\}$, $i \geqslant 0$, определяется нулевыми конечными условиями (2.1) для представлений (2.4), (2.5), линейных относительно Π

$$s_i(T, \Pi) = 0, \quad v_i(T, \Pi) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \ldots \tag{2.6}$$

Переходим к приближенному решению системы (2.6), используя введенные в п. 1 порядки величин T, α_i, ω_i, $s_i{}^0$, $v_i{}^0$ по отношению к малому параметру ε. Рассмотрим следующую систему «первого приближения» по ε (2.6), в которой отброшены члены $O(\varepsilon)$ (по предположению)

$$\frac{a_0}{6}T^3 + \frac{b_0}{2}T^2 = -s_0{}^0 - v_0{}^0 T - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{\omega_j}\Phi_j, \quad \frac{a_0^2}{2}T^2 + b_0 T = -v_0{}^0 \tag{2.7}$$

$$a_i \cos \Phi_i - b_i \sin \Phi_i = \frac{2}{T} \frac{\omega_i}{\alpha_i} \left(s_i^0 \cos \Phi_i + \frac{v_i^0}{\omega_i} \sin \Phi_i \right), \quad \Phi_i = \omega_i T$$

$$a_i \sin \Phi_i + b_i \cos \Phi_i = \frac{2}{T} \frac{\omega_i}{\alpha_i} \left(s_i^0 \sin \Phi_i - \frac{v_i^0}{\omega_i} \cos \Phi_i \right), \quad i \geqslant 1$$

Система уравнений (2.7) для $\{a_i, b_i\}$, $i \geqslant 1$, диагональна; разрешая ее, получим значения этих коэффициентов $\{a_i^{(1)}, b_i^{(1)}\}$ в первом приближении по ε. Подставляя их в первое уравнение, получим совместно со вторым замкнутую систему для (a_0, b_0). В итоге получим искомое значение параметра П

$$a_0^{(1)} = (6 / T^3)(2s_0^0 + v_0^0 T + 4\xi), \quad a_i^{(1)} = 2\omega_i s_i^0 / (\alpha_i T) \tag{2.8}$$

$$b_0^{(1)} = -(2 / T^2)(3s_0^0 + 2v_0^0 T + 6\xi), \quad b_i^{(1)} = -2v_i^0 / (\alpha_i T)$$

$$\left(\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j^0}{\alpha_j}, \quad \frac{s_j^0}{\alpha_j} = O(j^{-\gamma}), \quad \gamma > 1 \right)$$

Из выражений (2.8) при учете предположения (1.4) следует, что коэффициенты a_i, b_i $(i \geqslant 0)$ имеют разные порядки малости по ε. При условии сходимости ряда для ξ (2.8) находим

$$a_0^{(1)} = O(\varepsilon^2); \quad b_0^{(1)}, a_i^{(1)}, b_i^{(1)} = O(\varepsilon), \quad i \geqslant 1 \tag{2.9}$$

Подстановка значения (2.8) коэффициента $\Pi^{(1)}$ в (2.2) приводит к искомому выражению для управления w в первом приближении по ε

$$w^{(1)} = w(t, \Pi^{(1)}), \quad \| w^{(1)} \| = O(\varepsilon), \quad t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}] \tag{2.10}$$

Аналогично (2.10) приближенная управляемая траектория $\{s_i(t, \Pi), v_i(t, \Pi)\}$, $i \geqslant 0$, получается при подстановке выражения $\Pi^{(1)}$ (2.8) в (2.4) и отбрасывании слагаемых $O(\varepsilon)$, т. е., приравнивая $S_i(t, \Pi) = V_i(t, \Pi) \equiv 0$.

3. Оценка погрешности и обоснование приближенного решения. Пусть выполнены следующие грубые достаточные условия на коэффициенты $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ вида

$$\omega_i s_i^0 / \alpha_i = O(i^{-\beta}), \quad v_i^0 / \alpha_i = O(i^{-\beta}), \quad \beta > 1 \tag{3.1}$$

Поскольку обычно $\omega_i = O(i^\varkappa)$, $\varkappa > 0$ (см. п. 1), то первое условие (3.1) оказывается более жестким, чем в (2.8). Тогда ряд (2.10) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $w(t, \Pi^{(1)})$, $t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}]$, с указанной оценкой. На практике такая функция может быть достаточно точно реализована при помощи цифровых или аналоговых устройств. Однако в теоретическом отношении класс управлений $w(t, \Pi) \in W$ (2.2) можно расширить и рассматривать такие, для которых допустимыми являются функции $\{s_i(t, \Pi^{(1)}), v_i(t, \Pi^{(1)})\}$, $i \geqslant 0$, (2.4) (а также $\{z(t, x), z^{\boldsymbol{\cdot}}(t, x)\}$ (см. (1.1) и т. д.).

Вычислим теперь погрешность управления первого приближения $w^{(1)}$ (2.10) для искомых переменных s_i, v_i при $t = T$. Согласно (2.4)—(2.8), получим

$$s_i(T, \Pi^{(1)}) = S_i(T, \Pi^{(1)}), \quad v_i(T, \Pi^{(1)}) = V_i(T, \Pi^{(1)}) \tag{3.2}$$

$$S_0(T, \Pi^{(1)}) = -\frac{2}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{s_j^0}{\alpha_j \omega_j} \sin \Phi_j + \frac{v_j^0}{\alpha_j \omega_j^2} (1 - \cos \Phi_j) \right]$$

$$V_0(T, \Pi^{(1)}) = \frac{2}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{s_j^0}{\alpha_j} (1 - \cos \Phi_j) - \frac{v_j^0}{\alpha_j \omega_j} \sin \Phi_j \right] \quad (i = 0)$$

$$S_i(T,\Pi^{(1)}) = \frac{a_0^{(1)}\alpha_i}{\omega_i^3}(\Phi_i - \sin\Phi_i) + \frac{b_0^{(1)}\alpha_i}{\omega_i^2}(1-\cos\Phi_i) +$$

$$+\frac{2}{T}\frac{\alpha_i}{\omega_i}\sum_{j=1}^{\infty}{}' \left(s_j^0\frac{\omega_j}{\alpha_j}\frac{\omega_i\sin\Phi_j-\omega_j\sin\Phi_i}{\omega_i^2-\omega_j^2}+v_j^0\frac{\omega_i}{\alpha_j}\frac{\cos\Phi_i-\cos\Phi_j}{\omega_i^2-\omega_j^2}\right)$$

$$V_i(T,\Pi^{(1)}) = \partial S_i(T,\Pi^{(1)})/\partial T = S_i^{\cdot}(T,\Pi^{(1)})$$

Коэффициенты $a_0^{(1)}$, $b_0^{(1)}$ определены в (2.8); при дифференцировании S_i по T в (3.2) они считаются постоянными (дифференцируются лишь Φ_i, Φ_j согласно (2.7): $\partial\Phi_{i,j}/\partial T = \omega_{i,j}$). При условии сходимости рядов (3.2) в S_i, V_i $(i \geqslant 1)$, которая может быть обеспечена, если коэффициенты s_j^0, v_j^0 достаточно быстро убывают по j, для оценок погрешностей получим

$$|s_i(T,\Pi^{(1)})| \leqslant \varepsilon c_i^s, \quad |v_i(T,\Pi^{(1)})| \leqslant \varepsilon c_i^v, \quad i \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Коэффициенты $c_i^{s,v}$ **определяются** начальными значениями s_i^0, v_i^0, частотами собственных колебаний ω_j $(j \geqslant 1)$ и коэффициентами влияния α_j $(j \geqslant 0)$, а также величиной параметра $\Theta \sim 1$. Отметим, что указанная выше сходимость рядов в (3.2) заведомо имеет место в частных случаях, когда начальные распределения смещений $z(0, x)$ и скоростей $z^{\cdot}(0, x)$ содержат конечное число гармоник, т. е. $A_j^0 = 0$ при $j > N$ $(N < \infty)$. Если начальные относительные смещения и скорости отсутствуют ($A_j^0 = 0$, $j \geqslant 1$), т. е. распределенная система перемещается как целое, то из (3.2) следует, что

$$s_0(T,\Pi^{(1)}) = v_0(T,\Pi^{(1)}) = 0 \tag{3.4}$$
$$s_i(T,\Pi^{(1)}) = O(\varepsilon^2), \quad v_i(T,\Pi^{(1)}) = O(\varepsilon^2), \quad i \geqslant 1$$

Для приближенного решения исходной задачи и обеспечения требуемой точности определения переменной состояния $z(t, x)$ (1.1) при $t = T$ в некоторой метрике (например, равномерной, сильной или слабой) необходимо, чтобы параметры $c_i^{c,v}$ достаточно быстро убывали при $i \to \infty$. Кроме того, необходимо аналогичное убывание коэффициентов Фурье $s_i(t,\Pi^{(1)})$, $v_i(t,\Pi^{(1)})$ для $\forall t \in [0, T]$, чтобы обеспечить сходимость по указанной норме функциональных рядов для функции $z^{(1)}(t, x)$ и ее производных по t, x:

$$z^{(1)}(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(t,\Pi^{(1)})r_i(x), \quad \frac{\partial z^{(1)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial z^{(1)}}{\partial x}, \ldots \tag{3.5}$$

Обычно для практических целей достаточно обеспечить сходимость по норме гильбертова или энергетического пространства [1, 2, 4, 5]. В указанном частном случае конечного числа мод начальных распределений для оценок текущих (2.5) и конечных (3.2), (3.3) значений коэффициентов S_i, V_i получим выражения

$$|S_0| \leqslant \varepsilon c, \quad |S_i| \leqslant \varepsilon c\,|\alpha_i|/\omega_i^2 \tag{3.6}$$
$$|V_0| \leqslant \varepsilon c, \quad |V_i| \leqslant \varepsilon c\,|\alpha_i|/\omega_i, \quad t \in [0, \Theta\varepsilon^{-1}], \quad c = \text{const}$$

При условии достаточно быстрого убывания по i отношения $|\alpha_i|/\omega_i$ в выражениях для s_i, v_i можно отбросить малые по величинам добавки S_i, V_i. Получающиеся в результате функции $z_{(1)}(t, x)$, $z^{\cdot}_{(1)}(t, x)$, $z'_{(1)}(t, x)$ и др. будут ε-близкими по указанным нормам функциям $z^{(1)}(t, x)$, $\partial z^{(1)}/\partial t$, $\partial z^{(1)}/\partial x$ и др. (см. (3.5)). Соответствующее этому случаю управление (2.10) будет содержать конечное число слагаемых в ряде (2.2)

$(1 \leqslant j \leqslant N)$. Следует также ожидать ε-близость по указанным нормам точного и приближенного решений.

Замечания. 1°. Решение задачи при ненулевых конечных значениях s_i^T, v_i^T, т. е. $A_i^T \neq 0$, $i \geqslant 1$, получается из вышеприведенного, если совершить замену

$$s_i^0 \to s_i^0 - (s_i^T \cos \Phi_i + (v_i^T/\omega_i) \sin \Phi_i) \quad (s_0^0 \to s_0^0 - s_0^T) \tag{3.7}$$
$$v_i^0 \to v_i^0 - (-s_i^T \sin \Phi_i + (v_i^T/\omega_i) \cos \Phi_i)\, \omega_i \quad (v_0^0 \to v_0^0 - v_0^T)$$

2°. Решения задачи гашения относительных колебаний или управления ими без учета $s_0(T)$, $v_0(T)$ можно получить, если положить в $\Pi^{(1)}$ коэффициенты $a_0^{(1)} = b_0^{(1)} = 0$; коэффициенты $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i \geqslant 1)$ имеют вид (2.8), (3.7).

3°. Если требуется остановить систему как целое, т. е. $v_0(T) = A_i^T = 0$ (без учета $s_0(T)$), то следует положить $a_0^{(1)} = 0$, $b_0^{(1)} = v_0^0/T$, а коэффициенты $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ вычисляются согласно (2.8). Приход системы в заданное положение $s_0^T = 0$ с нефиксированной скоростью $v_0(T)$ и гашением относительных колебаний осуществляется при условиях (2.8) для $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$, $i \geqslant 1$, и

$$a_0^{(1)} = (3/T^3)(s_0^0 + v_0^0 T + 2\xi), \quad b_0^{(1)} = -a_0^{(1)} T$$

Аналогично получаются приближенные решения задачи управления при других конечных условиях, приводящих к диагональной системе для (a_i, v_i), $i \geqslant 1$.

4°. Определение параметра $\Pi = \{a_i, b_i\}$, $i \geqslant 0$, в более высоком приближении по степеням малого параметра ε можно получить из (2.4)—(2.6), подставляя в S_i, V_i значения Π, полученные на предыдущих шагах рекуррентной процедуры ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\Pi_i^{(k+1)} = \Pi_i^{(1)} - P^{-1}(\Phi_i) R_i(T, \Pi^{(k)}), \quad \Pi_i = (a_i, b_i)^{\mathrm{tr}} \tag{3.8}$$
$$P^{-1} = P^{\mathrm{tr}}, \quad \det P = 1, \quad R_i = (S_i, V_i/\omega_i)^{\mathrm{tr}}; \quad A_i^{(k+1)} - A_i^{(k)} = O(\varepsilon^{k+1})$$
$$a_0^{(k+1)} = a_0^{(1)} + (6/T^3)[2S_0(T, \Pi^{(k)}) - V_0(T, \Pi^{(k)})\, T]$$
$$b_0^{(k+1)} = b_0^{(1)} - (2/T^2)[3S_0(T, \Pi^{(k)}) - V_0(T, \Pi^{(k)}) T]$$
$$a_0^{(k+1)} - a_0^{(k)} = O(\varepsilon^{k+3}), \quad b_0^{(k+1)} - b_0^{(k)} = O(\varepsilon^{k+2})$$

Здесь $P(\Phi_i)$ — (2×2)-матрица поворота на угол Φ_i. Вопросы сходимости и оценок по ε схемы (3.8), а также выражений для управления $w(t, \Pi^{(k)})$ (2.2) и решения $z^{(k)}(t, x)$ и его производных (3.5) весьма затруднены и требуют отдельного исследования.

5°. Синтез управления $w_s = w_s(T - t, s, v)$ естественно оказывается линейным по переменным $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n)^{\mathrm{tr}}$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)^{\mathrm{tr}}$. В первом приближении по ε синтез управления, согласно (2.2), (2.10), после замены $t \to 0$, $T \to T - t$, $s^0 \to s$, $v^0 \to v$ принимает вид

$$w_s^{(1)} = w_s^{(1)}(T - t, s, v) \equiv$$
$$\equiv -2[3s_0 + 2v_0(T - t)]/(T - t)^2 - \frac{2}{(T-t)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[6 \frac{s_j}{\alpha_j} + \frac{v_j}{\alpha_j}(T - t) \right],$$
$$t \in \left[0, \frac{\Theta}{\varepsilon}\right], \quad s_0 \sim \frac{1}{\varepsilon}; \quad v_0, A_\Sigma \sim 1 \tag{3.9}$$

Отметим особенность синтеза управления (3.9) при $t \to T$, характерную для задач с фиксированным временем.

6°. Изложенная процедура построения приближенного решения и обоснования оценок справедлива в более общем случае систем (1.1). Например, она может содержать конечное или счетное количество групп переменных с кратными частотами ω_j конечной кратности $k_j \leqslant k^*$, $k^* < \infty$, при условии, что w — векторное управление соответствующей (достаточно высокой) размерности и выполнены условия управляемости в каждой подгруппе.

7°. Для приложений могут также представить интерес другие постановки задач управления, например, близких к оптимальным по быстродействию. Главное требование к таким управлениям состоит в возможности гашения относительных колебаний. Аналогичные вышеизложенному подходы, основанные на асимптотическом разделении переменных, могут быть применены в случае, когда $T/T_1 = O(\varepsilon^{-1})$.

4. Анализ управляемого движения в первом приближении. Согласно (2.4), (2.8), (3.6), изменение колеблющихся переменных s_i, v_i, с погрешностью $O(\varepsilon)$ приводится к виду $(i \geqslant 1)$

$$s_i^{(1)}(t) = A_i^{(1)}(\tau)\cos(\varphi_i - \varphi_i^0), \quad \cos\varphi_i^0 = s_i^0/A_i^0 \tag{4.1}$$
$$v_i^{(1)}(t) = -\omega_i A_i^{(1)}(\tau)\sin(\varphi_i - \varphi_i^0), \quad \sin\varphi_i^0 = v_i^0/(\omega_i A_i^0)$$
$$A_i^{(1)}(\tau) = A_i^0(1-\tau), \quad A_\Sigma^{(1)}(\tau) = A_\Sigma^0(1-\tau), \quad t/T = \tau \in [0,1]$$

Изменение переменных s_0, v_0, определяющих движение системы как целого, с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon)$ описывается соотношениями

$$s_0^{(1)}(t) = s_0^0(1 - 3\tau^2 + 2\tau^3) + v_0^0 T(1-\tau)^2 + 2\xi\tau(1 - 3\tau + 2\tau^2) \tag{4.2}$$
$$v_0^{(1)}(t) = -6(s_0^0/T)\tau(1-\tau) + v_0^0(1 - 4\tau + 3\tau^2) + 2(\xi/T)(1 - 6\tau + 6\tau^2)$$

Рассмотрим сперва глобальное поведение переменных $s_0^{(1)}$, $v_0^{(1)}$ с относительной погрешностью $O(\varepsilon)$. С этой целью нормируем $s_0^{(1)}$ на $s_0^0 = O(\varepsilon^{(-1)})$ и $v_0^{(1)}$ на $s_0^0/T = O(1)$; получим с ошибкой $O(\varepsilon)$ выражения

$$s_0^{(1)}/s_0^0 \equiv s_0^{(*)}(\tau) = 1 - 3\tau^2 + 2\tau^3 + \nu\tau(1-\tau)^2 \tag{4.3}$$
$$v_0^{(1)}T/s_0^0 \equiv v_0^{(*)}(\tau) = -6\tau(1-\tau) + \nu(1 - 4\tau + 3\tau^2)$$
$$\nu = v_0^0 T/s_0^0 = O(1), \quad s_0^{(*)}(1) = v_0^{(*)}(1) = 0$$

Из (4.3) следует, что при $\nu < -3$ и $\nu > -3/2$ существует точка $\tau_* \in (0, 1)$ перегиба функции $s_0^{(*)}(\tau)$ по τ $(\tau_* = 1/3\,(2\nu + 3)(\nu + 2)^{-1})$. В этой точке переменная $v_0^{(*)}(\tau)$ имеет экстремум: при $\nu < -3$ — максимум, а при $\nu > -3/2$ — минимум. Несмотря на простоту, семейство кривых (ν — параметр семейства, $v_0^{(*)}(0) = \nu$) (4.3) представляет определенный интерес, поскольку характеризует качество управления движением распределенной системы как целого. Так, при $\nu < -3$ имеет место перерегулирование по $s_0^{(*)}$ и $v_0^{(*)}$; при $\nu > -3/2$ меняет знак ускорение, т. е. $w^{(1)}$, а функция $v_0^{(*)}(\tau)$ немонотонна; при $\nu > 0$ оказывается также немонотонной $s_0^{(*)}(\tau)$, а $v_0^{(*)}(\tau)$ изменяет знак. Соответствующие характерные кривые приведены на фиг. 1 для $s_0^{(*)}(\tau)$ и фиг. 2 — для $v_0^{(*)}(\tau)$ (для каждой кривой указано значение ν).

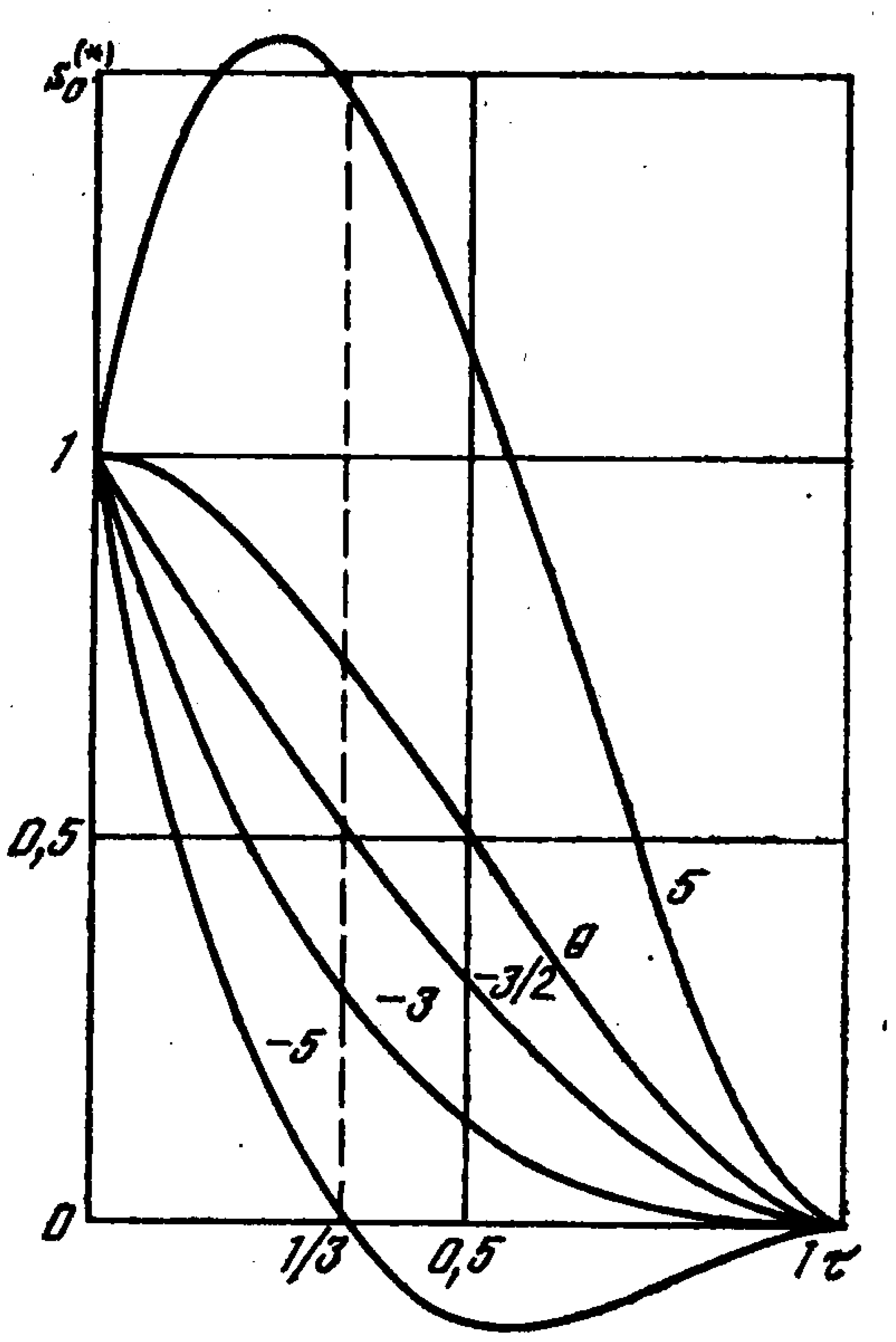
Исследуем теперь переменные s_0, v_0 с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon)$. Из (4.2) следует, что при $(T - t) \sim 1$, т. е. $(1 - \tau) \sim \varepsilon$ функции $s_0^{(1)}$, $v_0^{(1)} \sim \varepsilon$. В асимптотически большом до окончания процесса промежутке времени $(T - t) \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$, т. е. для $1 - \tau = \sqrt{\varepsilon}\theta$, где $\theta \in [0, \theta^*]$, $\theta^* \sim 1$, получим $(s_0^0 \sim \varepsilon^{-1})$

$$s_0^{(1)}/(\varepsilon s_0^0) \equiv s_0^*(\theta) = (3+\nu)\theta^2 + \sqrt{\varepsilon}\,[(\nu - 2)\theta^3 + \zeta\theta] \tag{4.4}$$
$$v_0^{(1)}T/s_0^0 \equiv v_0^*(\theta) = -2\sqrt{\varepsilon}\,(3+\nu)\theta \quad (\zeta = -2\xi/(\varepsilon s_0^0))$$

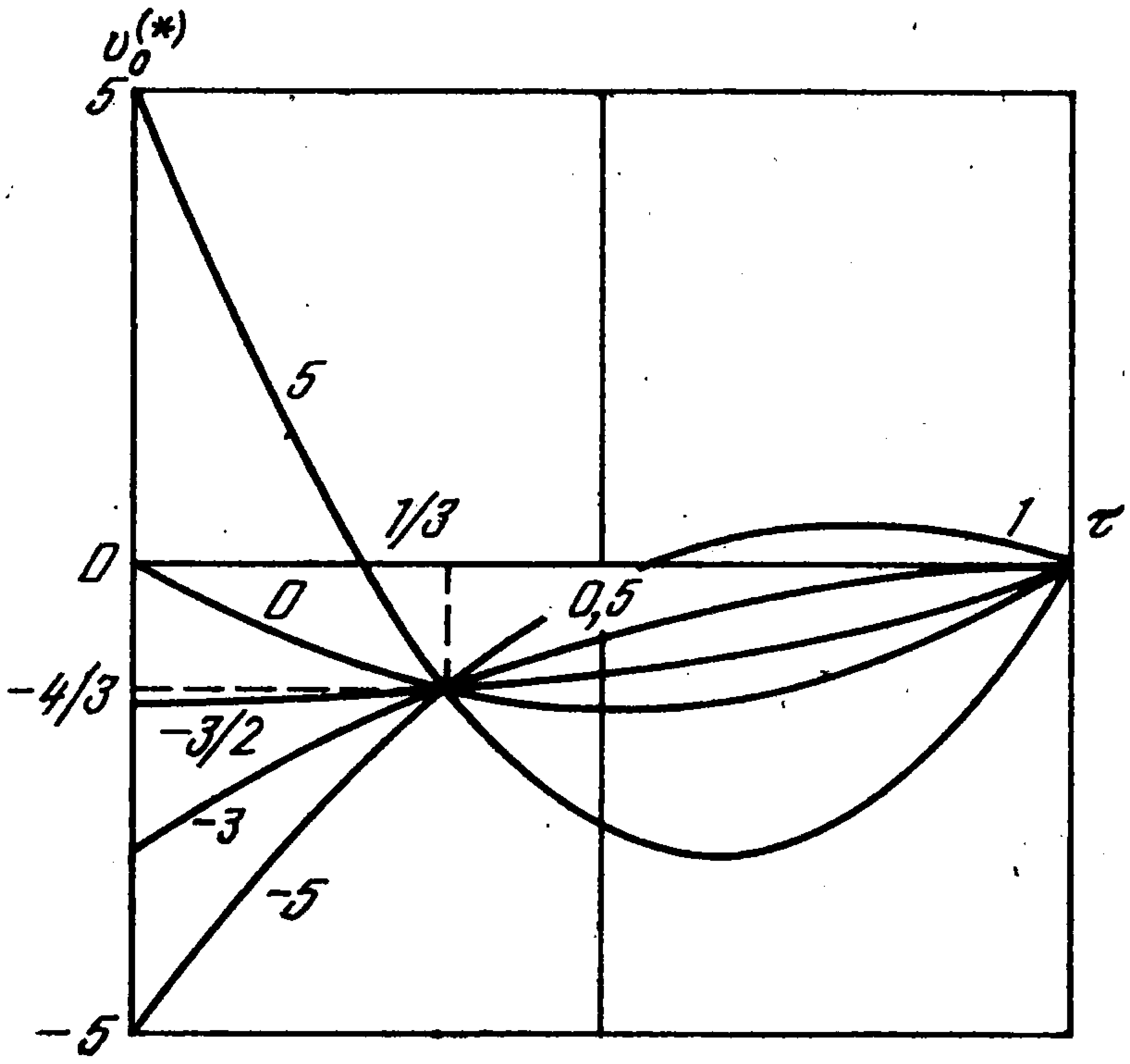
При $\nu \neq -3$ и ε достаточно малом переменная s_0^* (и $s_0^{(1)}$) изменяется сильно (на $O(1)$), а v_0^* (и $v_0^{(1)}$) — слабо (на $O(\sqrt{\varepsilon})$). Прецизионное управление с погрешностью $O(\varepsilon)$ требует учета членов $O(\sqrt{\varepsilon})$ для $(T - t) \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$. Траектория на плоскости (s_0^*, v_0^*) приближенно представляется половиной сильно сжатой параболы, отвечающей $v_0^*/(3 + \nu) < 0$. При $\nu = -3 + \sqrt{\varepsilon}\sigma$, где $\sigma \sim 1$, с погрешностью $O(\varepsilon)$ имеем

$$s_0^*(\theta) = \sqrt{\varepsilon}\,(\zeta\theta + \sigma\theta^2 - 5\theta^3), \quad v_0^*(\theta) \equiv 0, \quad \theta \geqslant 0 \tag{4.5}$$

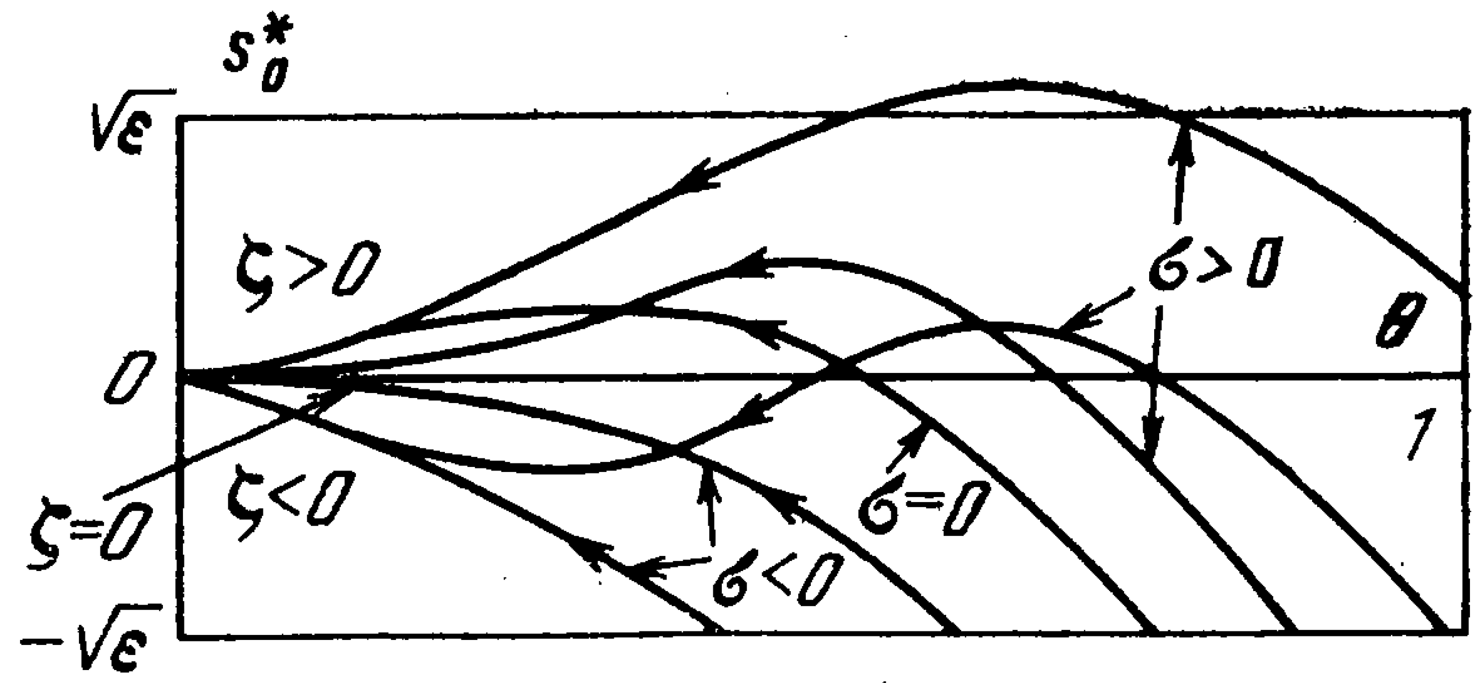
Качественное поведение переменной $s_0^*(\theta)$ (4.5) при $\theta \sim 1$ $(\theta \to 0)$ для различных значений (знаков) параметров ζ, σ приведено на фиг. 3.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

5. **Управление плоскими вращениями упругого стержня.** Рассмотрим задачу управления для прямолинейного неоднородного стержня при помощи сосредоточенного на его левом конце момента сил; правый конец свободен. Уравнения движения можно получить на основе принципа Даламбера и теоремы об изменении кинетического момента; в линейном приближении получим [8]

$$\rho(x)\, u^{\cdot\cdot} + [EI(x)\, u'']'' = -\rho(x)\, x\varphi^{\cdot\cdot}, \quad 0 < x < l \tag{5.1}$$

$$u(t, 0) = u'(t, 0) = u''(t, l) = u'''(t, l) = 0$$

$$\int_0^l \rho(x)\, x\, [x\varphi^{\cdot\cdot}(t) + u^{\cdot\cdot}(t, x)]\, dx = M, \quad M(t) \in \mathbf{M}$$

$$u = u(t, x), \quad \varphi = \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty, \; 0 \leqslant x \leqslant l$$

Здесь u — относительные упругие смещения точек x нейтральной линии стержня в системе, вращающейся вместе с касательной к стержню в точке $x = 0$ приложения момента сил M. Точками обозначается дифференцирование по t, а штрихами — по x. Поворот касательной относительно некоторой невращающейся оси определяется углом φ. Линейная плотность $\rho(x)$ и жесткость на изгиб $EI(x)$ предполагаются достаточно гладкими функциями x, отделенными от нуля. Классы управлений $M(t) \in \mathbf{M}$ и решений $u = u(t, x) \in U$ определяются ниже.

Для системы (5.1) ставится задача управления (см. п. 1). Требуется выбором допустимого управления $M(t)$ перевести ее из произвольного заданного состояния в момент времени $t = 0$ в требуемое конечное состояние вращения как целого (с гашением относительных колебаний) при

$t = T$

$$u(0, x) = f^0(x), \quad u^{\cdot}(0, x) = g^0(x), \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi^{\cdot}(0) = \omega^0$$
$$u(T, x) = f^T(x) \quad (\equiv 0), \quad u^{\cdot}(T, x) = g^T(x) \quad (\equiv 0)$$
$$\varphi(T) = \varphi^T \ (= 0), \quad \varphi^{\cdot}(T) = \omega^T \quad (= 0) \tag{5.2}$$

Предполагается, что соответствующая самосопряженная краевая задача на собственные значения и функции решена

$$[EI(x)X'']'' - \lambda^4\rho(x)X = 0, \quad X = X(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$
$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0 \tag{5.3}$$
$$\lambda \in \{\lambda_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \lambda_n = O(n)$$
$$X(x) \in \{X_n(x)\}, \qquad (X_n, X_m)_\rho \equiv \int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho(x)\, dx = \delta_{nm}$$

Решение начальной задачи (5.1), (5.2) для $u(t, x)$ строится на основе полной ортонормированной системы функций $\{X_n(x)\}$ (5.3) при помощи метода Фурье [4, 7—9]

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\Theta_n(t), \qquad \Theta_n = (u, X_n)_\rho \tag{5.4}$$
$$\Theta_n^{\cdot\cdot} + \omega_n^2\Theta_n = -\mu_n\varphi^{\cdot\cdot}, \qquad \omega_n = \lambda_n^2, \qquad \mu_n = (x, X_n)_\rho, \qquad n \geqslant 1$$

Уравнение моментов (4.1) с использованием уравнения состояния и граничных условий можно привести к виду $EI(0)\,u''(t, 0) = -M(t)$ и при заданной функции $M(t)$ записать в форме интегрального уравнения Вольтерры первого рода относительно неизвестной $\gamma = \varphi^{\cdot\cdot}$

$$\int_0^t G(t-\tau)\gamma(\tau)\, d\tau = N(t) + F(t), \qquad t \in [0, T] \tag{5.5}$$
$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\omega_n} X_n''(0) \sin\omega_n t, \qquad N(t) = \frac{M(t)}{EI(0)}$$
$$F(t) = u_0''(t, 0)/(EI(0)); \qquad u(t, x) = u_0(t, x) + u_\gamma(t, x)$$
$$u_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left(f_n^0 \cos\omega_n t + \frac{g_n^0}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$
$$f_n^0 = (f^0, X_n)_\rho, \qquad g_n^0 = (g^0, X_n)_\rho$$
$$u_\gamma(t, x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\omega_n} X_n(x) \int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\gamma(\tau)\, d\tau$$

Следует отметить необходимость согласования классов функций $G(t)$, $N(t)$ и $F(t)$, входящих в уравнение (5.5) (см. [10]).

Изложенный подход приводит к задаче управления движением счетномерной системы, описываемой дифференциальными (5.4) и интегральным (5.5) уравнениями. К данной задаче указанный в п. 1—3 подход непосредственно применить не удается. Однако ее решение можно приближенно построить полуобратным методом, полагая функцию γ управлением и используя интегральное соотношение (5.5) для определения требуемых значений момента $M(t)$ [8]

$$\varphi^{\cdot} = \omega, \quad \omega^{\cdot} = \gamma, \quad \gamma(t) \in \Gamma \tag{5.6}$$
$$\Theta_n^{\cdot\cdot} + \omega_n^2\Theta_n = -\mu_n\gamma, \quad t \in [0, T], \quad n \geqslant 1$$
$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \omega(0) = \omega^0, \quad \Theta_n(0) = f_n^0, \quad \Theta_n^{\cdot}(0) = g_n^0$$
$$\varphi(T) = \varphi^T, \quad \omega(T) = \omega^T, \quad \Theta_n(T) = \Theta_n^{\cdot}(T) = 0$$

Решение задачи управления (5.6), совпадающей по постановке с приведенной в п. 1, 2, при $T/T_1 \sim \varepsilon^{-1}$ $(0 < \varepsilon \ll 1,\ T_1 = 2\pi/\omega_1,\ \omega_1^2 \sim EI_*/(\rho_* l^4))$ приближенно построено и исследовано в п. 2—4. Соответствующие случаю однородного стержня построения и выражения содержатся в [8]. Управляющий момент сил $M(t)$, вычисленный согласно (5.5), есть более сложная функция t, чем функция вида (2.2) или (2.10). Она содержит интеграл от произведения функции указанного вида на ядро $G(t-\tau)$, которое представляет собой почти периодическую функцию с тем же частотным базисом $\{\omega_n\}$. В результате интегрирования функция $M(t)$ будет содержать произведения линейных функций t и квазипериодических функций.

Рассмотрим проблему прямого построения управления $M(t)$. Для этого введем переменную — «абсолютное» перемещение точек стержня $z = u + x\varphi$: получим управляемую систему для z [8]

$$\rho(x) z^{\cdot\cdot} + [EI(x) z'']'' = 0, \quad z = z(t, x) = u(t, x) + x\varphi(t) \tag{5.7}$$
$$z(t, 0) = z''(t, l) = z'''(t, l) = 0, \ -EI(0) z''(t, 0) = M(t)$$
$$\varphi(t) = z'(t, 0), \quad u(t, x) = z(t, x) - xz'(t, 0)$$

Вычислим начальные и конечные значения переменной z на основе «естественных» условий (5.2) для u, φ и определения (5.7). Эти «обобщенные» условия имеют вид

$$z(t, x)|_{0, T} = f^{0, T}(x) + \varphi^{0, T}x, \qquad z^{\cdot}(t, x)|_{0, T} = g^{0, T}(x) + \omega^{0, T}x \tag{5.8}$$

Решение задачи (5.7) с начальными условиями (5.8) и известной функцией $M(t)$ сводится при помощи метода разделения переменных и метода Фурье к построению системы собственных значений и функций соответствующей самосопряженной краевой задачи, аналогичной (5.3)

$$[EI(x) X'']'' - \lambda^4\rho(x) X = 0, \quad X = X(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$
$$X(0) = X''(0) = X''(l) = X'''(l) = 0 \tag{5.9}$$
$$\lambda \in \{\lambda_n\}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots; \ \lambda_n = O(n), \quad n \to \infty$$
$$X(x) \in \{X_n(x)\}, \quad (X_n, X_m)_\rho = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots; \quad X_0 = x/\sqrt{J_0}$$

Здесь постоянная J_0 имеет смысл момента инерции абсолютно жесткого стержня. Пусть система собственных значений $\{\lambda_n\}$ и полная система ортонормированных функций (базис) $\{X_n(x)\}$ построены (случай однородного стержня рассмотрен в [8]). Тогда искомое решение $z(t, x)$ представимо в виде ряда Фурье с коэффициентами $\Theta_n(t)$, $n \geqslant 0$:

$$z(t, x) = \frac{x}{\sqrt{J_0}}\Theta_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\Theta_n(t) \quad \left(J_0 = \int_0^l x^2\rho(x)\,dx\right) \tag{5.10}$$

Для неизвестных функций $\Theta_n(t)$, $n \geqslant 0$, получаем систему дифференциальных уравнений вида (1.3) и начальных и конечных условий (1.4), (1.5)

$$\Theta_0^{\cdot\cdot} = M/\sqrt{J_0}, \quad \Theta_n^{\cdot\cdot} + \omega_n^2\Theta_n = \mu_n M \quad (\mu_n = X_n'(0)) \tag{5.11}$$
$$\Theta_0|_{0, T} = \sqrt{J_0}\,\varphi^{0, T} - \sqrt{J_0}\sum_{n=1}^{\infty} X_n'(0) f_n^{0, T}, \quad \Theta_n|_{0, T} = f_n^{0, T} = (f^{0, T}, X_n)_\rho$$
$$\Theta_0^{\cdot}|_{0, T} = \sqrt{J_0}\,\omega^{0, T} - \sqrt{J_0}\sum_{n=1}^{\infty} X_n'(0) g_n^{0, T}, \quad \Theta_n^{\cdot}|_{0, T} = g_n^{0, T} = (g^{0, T}, X_n)_\rho$$

Решение двухточечной задачи по t и выбор допустимого управления $M(t)$ проводятся на основе построений п. 2—4. В частности, для однородного стержня (ρ, $EI = \text{const}$) введением безразмерных аргументов $x_* = x/l$, $t_* = \Omega t$, $\Omega^2 = EI/(\rho l^4)$; переменных: $z_*(t_*, x_*) = z(\Omega^{-1}t_*, x_* l)/l$, $z_*^{\cdot}(t_*, x_*) = z^{\cdot}(\Omega^{-1}t_*, x_* l)/(l\Omega)$ и управляющего момента сил $M_* = M_*(t_*) = M(\Omega^{-1}t_*)\, l/(EI)$ получим искомое решение (индекс $*$ далее опускается)

$$X_n(x) = \frac{\sin\lambda_n x}{\sin\lambda_n} + \frac{\operatorname{sh}\lambda_n x}{\operatorname{sh}\lambda_n} \quad (X_n, X_m) = \delta_{nm}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{th}\lambda, \quad \lambda \in \{\lambda_n\}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \tag{5.12}$$

$$\lambda_{n+1} = \pi n + \pi/4 + O(e^{-\pi n})$$

$$z(t, x) = 3x \int_0^t (t - \tau) M(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\lambda_n \sin\lambda_n x + \sin\lambda_n \operatorname{sh}\lambda_n x}{\lambda_n(\operatorname{sh}\lambda_n - \sin\lambda_n)} \int_0^t \sin\omega_n(t - \tau) M(\tau)\, d\tau$$

Здесь, полагая $M = M^{(1)}(t)$ (2.10), получим искомое решение первого по ε приближения $z^{(1)}(t, x)$ вида (3.5), где $t \in [0, T]$, $T = 1/\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $x \in [0, 1]$. Если функция $M^{(1)}(t)$ — кусочно-гладкая, то ряд в выражении $z(t, x)$ (5.12) равномерно сходится, поскольку он мажорируется числовым, члены которого убывают как n^{-3}; ряд для $z'(t, x)$ также сходится абсолютно и равномерно как числовой с членами $O(n^{-2})$. Сходимость более высоких производных по x и t требует отдельного рассмотрения и может быть обеспечена в неравномерной метрике [1, 2, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с
2. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
6. *Полтавский Л. Н.* О финитной управляемости бесконечных систем маятников // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 318—321.
7. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1095—1103.
8. *Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.* Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 33—41.
9. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Управление колебаниями неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 27—35.
10. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303 с.

Москва

Поступила в редакцию 17.V.1988