Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.8:534.1 + 62 — 50

Е. М. Потапенко

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ УПРУГИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Получены простые критерии наблюдаемости упругих систем. Доказаны теоремы позволяющие судить об асимптотической устойчивости распределенных управляемых линейных и нелинейных систем по результатам исследования модели без учета упругости. Указанные результаты получены без усечения ряда тонов упругих колебаний

Упругость конструкции объектов управления может изменить характеристики системы в такой степени, что система управления, разработанная без учета упругости или при учете нескольких тонов упругих колебаний, не гарантирует устойчивости реальной системы, так как может привести к неустойчивости отброшенных тонов упругих колебаний. Проблема осложняется тем, что динамические схемы реальных объектов управления приближенные; более или менее достоверными могут быть лишь параметры, относящиеся к низшим тонам упругих колебаний. Кроме того, выходные характеристики датчиков и исполнительных органов обычно нелинейны и описываются дифференциальными уравнениями. В связи с этим необходима разработка методов синтеза и анализа нелинейных систем управления объектами с неточно заданными характеристиками, которые гарантируют асимптотическую устойчивость положения равновесия полной системы без усечения ряда тонов упругих колебаний. Ниже дается решение поставленной задачи.

1. Уравнения движения. Рассматривается твердое тело E_0 с массой m_r, к которому присоединены упругие элементы $E_1, E_2, \ldots, E_N$ с массами соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Тогда пространство S, занимаемое всей системой, и масса m всей системы определяются выражениями

$$S = E_0 + E_1 + \ldots + E_N,\quad m = m_r + m_e = m_r + m_1 + m_2 + \ldots + m_N$$

Предполагается, что упругие элементы жестко защемлены и в каждой точке (кроме точек крепления) имеют малые упругие деформации относительно недеформированного состояния.

С твердым телом связывается ортогональный базис $Oxyz$. Пусть $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\theta}$ — векторы линейного перемещения точки O и малого угла поворота вокруг точки O твердого тела относительно инерциального базиса, r — вектор какой-либо точки рассматриваемой механической системы в номинальном (недеформированном) состоянии относительно базиса $Oxyz$, $u(r)$ — упругая деформация системы в точке r. Тогда перемещение какой-либо точки системы относительно инерциального базиса определяется выражением

$$v(r) = v_0 - r_*\theta + u(r) \tag{1.1}$$

записанным в матричном виде через проекции векторов на оси базиса $Oxyz$. Здесь и далее a_* — кососимметрическая матрица, составленная из проекций вектора a, а a_*b — матричное представление векторного умножения векторов a и b.

Вектор абсолютной скорости определяется выражением

$$v^{\cdot}(r) = v_0^{\cdot} - r_*\theta^{\cdot} + u^{\cdot}(r) \tag{1.2}$$

Векторы импульса и момента импульса определяются зависимостями

$$K = \int\limits_m v^{\cdot}\, dm, \quad Q = \int\limits_m r_* v^{\cdot}\, dm \tag{1.3}$$

Подстановка (1.2) в (1.3) дает

$$K = \int\limits_m (v_0^{\cdot} - r_*\theta^{\cdot} + u^{\cdot})\, dm, \quad Q = \int\limits_m r_*(v_0^{\cdot} - r_*\theta^{\cdot} + u^{\cdot})\, dm \tag{1.4}$$

Имеют место соотношения

$$\int\limits_m r_*\, dm = r_{c_*} m, \quad \int\limits_m r_* r_*\, dm = -J_0$$

где r_c — положение центра масс всей системы в базисе $Oxyz$, J_0 — матрица моментов инерции всей системы относительно осей базиса $Oxyz$. С учетом этого имеем

$$K = mv_0^{\cdot} - mr_{c_*}\theta^{\cdot} + \int\limits_{m_e} u^{\cdot}\, dm$$

$$Q_0 = J_0\theta^{\cdot} - mr_{c_*} v_0^{\cdot} + \int\limits_{m_e} r_* u^{\cdot}\, dm$$

При помощи законов изменения импульса и момента импульса получаются уравнения

$$mv_0^{\cdot\cdot} - mr_{c_*}\theta^{\cdot\cdot} + \int\limits_{m_e} u^{\cdot\cdot}\, dm = F_0 \quad J_0\theta^{\cdot\cdot} + mr_{c_*} v_0^{\cdot\cdot} + \int\limits_{m_e} r_* u^{\cdot\cdot}\, dm = G_0 \tag{1.5}$$

Здесь F_0 — вектор внешних сил, действующих на систему в точке O, G_0 — момент действующих на систему внешних сил относительно точки O. Полагается, что силы и моменты приложены только к твердому телу. Тогда сила инерции единичного объема упругой части системы уравновешивается упругими силами $-L(u)$ и силами внутреннего демпфирования, которые можно приближенно описать выражением $-Qu^{\cdot}$. На основании (1.2)

$$\rho(r)\,[v_0^{\cdot\cdot} - r_*\theta^{\cdot\cdot} + u^{\cdot\cdot}(r)] + Q(r)\, u^{\cdot} + L(u) = 0 \tag{1.6}$$

$$Q(r) > 0$$

где $\rho(r)$ — плотность упругой части системы, $L(u)$ — дифференциальный векторный оператор, определяющий упругую силу, вид которого зависит от вида упругих элементов. В частности, для упругой балки, испытывающей плоский изгиб,

$$L(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

где $EI(x)$ — изгибная жесткость, x — продольная координата балки.

Домножив слева первое уравнение (1.5) на $v_0^{\cdot T}$, второе на $\theta^{\cdot T}$ и уравнение (1.6) на $u^{\cdot T}$, интегрируя уравнение (1.6) по объему упругих элементов S_e, а затем складывая все три уравнения, получим закон изменения полной механической энергии системы

$$\frac{d}{dt}\Big\{\Big[\frac{1}{2} mv_0^{\cdot T} v_0^{\cdot} + \frac{1}{2}\theta^{\cdot T} J_0 \theta^{\cdot} - mv_0^{\cdot T} r_{c_*}\theta^{\cdot} + v_0^{\cdot T}\int\limits_{m_e} u^{\cdot}\, dm + \theta^{\cdot T}\int\limits_{m_e} r_* u^{\cdot}\, dm +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{m_e} u^{\cdot T} u^{\cdot}\, dm\Big] + \frac{1}{2}\int\limits_{S_e} u^T L(u)\, dS\Big\} = -\int\limits_{S_e} u^{\cdot T} Q u^{\cdot}\, dS + v_0^{\cdot T} F_0 + \theta^{\cdot T} G_0 \tag{1.7}$$

В (1.7) выражение в квадратных скобках представляет собой кинетическую энергию T. С другой стороны, на основании (1.2)

$$T = {}^1/_2 \int\limits_m (v_0^{\cdot} - r_* \theta^{\cdot} + u^{\cdot})^T (v_0^{\cdot} - r_* \theta^{\cdot} + u^{\cdot})\, dm$$

Взяв интеграл по массе твердого тела, можно записать

$$T = {}^1/_2 m_r v_0^{\cdot T} v_0^{\cdot} + {}^1/_2 \theta^{\cdot T} J_{r0} \theta^{\cdot} + m_r v_0^{\cdot T} \theta_*^{\cdot} r_{rc} + $$
$$+ {}^1/_2 \int\limits_{m_e} (v_0^{\cdot} - r_* \theta^{\cdot} + u^{\cdot})^T (v_0^{\cdot} - r_* \theta^{\cdot} + u^{\cdot})\, dm$$

где J_{r0} — матрица моментов инерции твердого тела относительно базиса $Oxyz$, r_{rc} — радиус-вектор центра масс твердого тела относительно базиса $Oxyz$.

Полная механическая энергия системы определяется выражением

$$V' = {}^1/_2 m_r v_0^{\cdot T} v_0^{\cdot} + {}^1/_2 \theta^{\cdot T} J_{r0} \theta^{\cdot} + m_r v_0^{\cdot T} \theta_*^{\cdot} r_{rc} + $$
$$+ {}^1/_2 \int\limits_{m_e} (v_0^{\cdot} - r_* \theta^{\cdot} + u^{\cdot})^T (v_0^{\cdot} - r_* \theta^{\cdot} + u^{\cdot})\, dm + {}^1/_2 \int\limits_{S_e} u^T L(u)\, dS \qquad (1.8)$$

В соответствии с (1.7)

$$V'^{\cdot} = v_0^{\cdot T} F_0 + \theta^{\cdot T} G_0 - \int\limits_{S_e} u^{\cdot T} Q u^{\cdot}\, dS \qquad (1.9)$$

Система (1.5), (1.6) состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных (частные производные содержат оператор $L(u)$). Наряду с этой системой будет рассматриваться эквивалентная ей бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого вводится преобразование

$$u_n(r, t) = \Phi_n(r)\, q_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N \qquad (1.10)$$

где n — номер упругого элемента, $\Phi_n(r)$ — $(3 \times \infty)$-матрица нормированных допустимых функций, удовлетворяющих условиям ортогональности, а $q_n(t)$ — бесконечный вектор обобщенных «упругих» координат. Подстановка (1.10) в уравнения (1.5), (1.6) дает систему [1]

$$\begin{gathered} m v_0^{\cdot\cdot} - m r_{c*} \theta^{\cdot\cdot} + P^T q^{\cdot\cdot} = F_0 \\ J_0 \theta^{\cdot\cdot} + m r_{c*} v_0^{\cdot\cdot} + H^T q^{\cdot\cdot} = G_0 \\ P v_0^{\cdot\cdot} + H \theta^{\cdot\cdot} + q^{\cdot\cdot} + R q^{\cdot} + \Omega^2 q = 0 \end{gathered} \qquad (1.11)$$

$$P = [P_1^T, \ldots, P_N^T]^T, \quad H = [H_1^T, \ldots, H_N^T]^T, \quad \Omega^2 = \operatorname{diag}[\Omega_1^2, \ldots, \Omega_N^2],$$
$$R = \operatorname{diag}[R_1, \ldots, R_N]$$

$$P_n^T = \int\limits_{m_n} \Phi_n\, dm, \quad H_n^T = \int\limits_{m_n} r_* \Phi_n\, dm$$

$$\Omega_n^2 = \operatorname{diag}[\Omega_{n1}^2, \Omega_{n2}^2, \ldots], \quad R_n = \int\limits_{E_n} \Phi_n^T Q \Phi_n\, dE_n > 0$$

где P_n, H_n — матрицы коэффициентов влияния, Ω_n — матрица собственных частот упругих элементов при неподвижном твердом теле, R_n — матрица коэффициентов естественного демпфирования.

В качестве допустимых функций можно взять собственные функции, получающиеся путем решения краевой задачи с неподвижным твердым телом [1—5], т. е. из уравнения $\rho(r) u^{\cdot\cdot} + L(u) = 0$.

Для случая, когда $\Phi_n(r)$ удовлетворяют условиям полноты, на основании теоремы Парсеваля получены соотношения [1]

$$P^T P = m_e E_3, \quad H^T P = m_e r_{ce*}, \quad H^T H = J_e \tag{1.12}$$

где индекс e относится к упругому телу, $E_3 = \mathrm{diag}\,[111]$, r_{ce} — вектор центра масс упругой части системы в базисе $Oxyz$, J_e — матрица моментов инерции упругой части системы в базисе $Oxyz$.

Домножив слева в системе (1.11) первое уравнение на $v_0^{\cdot T}$, второе на $\theta^{\cdot T}$, третье на $q^{\cdot T}$ и сложив полученные уравнения, придем к закону изменения полной энергии

$$V^{\cdot\cdot} = v_0^{\cdot T} F_0 + \theta^{\cdot T} G_0 - q^{\cdot T} R q^{\cdot} \tag{1.13}$$

Здесь с учетом соотношения (1.12)

$$2V' = m_r v_0^{\cdot T} v_0^{\cdot} + \theta^{\cdot T} J_{r0} \theta^{\cdot} + 2m_r v_0^{\cdot T} \theta_*^{\cdot} r_{rc} + q^T \Omega^2 q +$$
$$+ (Pv_0^{\cdot} + H\theta^{\cdot} + q^{\cdot})^T (Pv_0^{\cdot} + H\theta^{\cdot} + q)$$

Уравнения (1.5) и (1.11) существенно упрощаются, если базис $Oxyz$ совместить с главными центральными осями системы в номинальном состоянии.

2. Наблюдаемость. Пусть на твердом теле рассматриваемой механической системы установлены измерительные устройства (датчики) с вектором выходных сигналов

$$y = C\,[v^T \theta^T]^T \tag{2.1}$$

причем существует обратная матрица C^{-1}. Для анализа наблюдаемости системы (1.11), (2.1) воспользуемся критерием, согласно которому указанная система наблюдаема тогда и только тогда, когда она при нулевых выходных сигналах имеет только нулевое решение. Из выражения $0 \equiv \equiv C\,[v^T\theta^T]^T$ следует $[v^T\theta^T]^T \equiv [v^{\cdot T}\theta^{\cdot T}]^T \equiv [v^{\cdot\cdot T}\theta^{\cdot\cdot T}]^T \equiv 0$. Учитывая эти тождества, рассматриваемую систему запишем в виде

$$P^T q^{\cdot\cdot} = 0, \quad H^T q^{\cdot\cdot} = 0, \quad q^{\cdot\cdot} + Rq^{\cdot} + \Omega^2 q = 0 \tag{2.2}$$

Последнее уравнение эквивалентно бесконечной системе осцилляторов. В практически важных случаях они слабодемпфированные и их характеристические уравнения имеют комплексные корни. Пусть отсутствуют кратные корни. Это будет по крайней мере при отсутствии в матрице Ω кратных частот и при $R = 0$ или при диагональной матрице R. Тогда решение последнего уравнения в (2.2) представляет собой бесконечный ряд линейно независимых функций, образующих вектор q. Линейно независимыми будут и координаты вектора $q^{\cdot\cdot}$. Первые два уравнения в системе (2.2) эквивалентны системе шести алгебраических уравнений с нулевыми правыми частями. Вследствие линейной независимости координат вектора $q^{\cdot\cdot}$ каждое из шести уравнений при неравенстве нулю всех элементов соответствующих строк матриц P^T и H^T возможно только при $q \equiv 0$. Отсюда вытекает следующий критерий наблюдаемости.

Критерий 1. Для слабодемпфированных упругих элементов при отсутствии в матрице Ω кратных частот и $R = 0$ или $R = \mathrm{diag}$ ненаблюдаемыми могут быть те и только те координаты, для которых соответствующие строки матриц P и H одновременно равны нулю. Если в указанных строках хотя бы один элемент отличен от нуля, то соответствующая координата будет наблюдаемой.

Частный случай сформулированного критерия получен в [2].

Пусть теперь третье уравнение в (2.2) имеет равные корни в количестве s пар. Это возможно при наличии в матрице Ω s равных частот. В этом случае имеет место следующий критерий.

Критерий 2. Если третье уравнение в (2.2) имеет равные корни в количестве s пар, то для наблюдаемости координат вектора q, соответствующих кратным корням, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}[P_s H_s]_{s\times 6} = s \tag{2.3}$$

где P_s, H_s — матрицы, составленные из элементов матриц P и H, соответствующих координатам вектора q с кратными корнями. В рассматриваемой системе $s \leqslant 6$. Это ограничение обусловлено тем, что матрица $[P_s H_s]$ в рассматриваемой системе имеет шесть столбцов и ее ранг не может быть больше шести. Если имеется несколько множеств кратных корней, то проверка наблюдаемости по формуле (2.3) проводится для каждого множества отдельно.

Критерий 1 получен для системы, более общей по сравнению с системами в [3, 4], и по форме отличается от них. Можно показать, что эти критерии эквивалентны.

Равенство (2.3) справедливо и при кратности корня, равной единице. Пусть i означает индекс рассматриваемой координаты. Тогда для наблюдаемой координаты

$$\operatorname{rank}[P_i H_i] = \operatorname{rank}[P_i H_i][P_i H_i]^T = \operatorname{rank}[P_i H_i]^T[P_i H_i] = 1$$

На основании этих равенств для $i = 1, 2, \ldots$ можно записать условия наблюдаемости

$$\begin{gathered} P_i P_i^T + H_i H_i^T \neq 0 \\ \begin{bmatrix} P_i^T P_i & P_i^T H_i \\ H_i^T P_i & H_i^T H_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{2.4}$$

которые являются обобщением критериев из [3, 4]. Критерий 1 проще критериев (2.4), так как не требует никаких математических операций.

Можно показать, что при управляемости системы без учета упругости условия управляемости системы при учете упругости будут совпадать с условиями наблюдаемости этой же системы.

3. Уравнения регулятора. Предполагается, что датчики и исполнительные органы расположены на твердом теле. Работа исполнительных органов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} F_0^{\cdot} + \alpha F_0 &= f(g, p, d, s, w) \\ G_0^{\cdot} + \beta G_0 &= \varphi(g, p, d, s, w) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь α, β — положительно определенные матрицы, характеризующие постоянные времени исполнительных органов, $f(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ — нечетные векторные функции, описывающие нелинейности исполнительных органов и аргументов управления, причем $f(0, 0, 0, 0, 0) = \varphi(0, 0, 0, 0, 0) = 0$; g, p, d, s — векторы выходных сигналов датчиков:

$$\begin{aligned} g^{\cdot} + \gamma g = \psi(v_0), \quad p^{\cdot} + \delta p = \omega(v_0^{\cdot}) \\ d^{\cdot} + \eta d = \chi(\theta), \quad s^{\cdot} + \varepsilon s = \zeta(\theta^{\cdot}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\psi(v_0)$, $\omega(v_0^{\cdot})$, $\chi(\theta)$, $\zeta(\theta^{\cdot})$ — нечетные векторные функции, характеризующие нелинейности датчиков, причем $\psi(0) = \omega(0) = \chi(0) = \zeta(0) = 0$; γ, δ, η, ε — положительно определенные матрицы, описывающие постоянные времени датчиков, w — вектор состояния компенсатора, определяемый уравнением

$$w^{\bullet} = Fw + K_1 g + K_2 p + K_3 d + K_4 s \tag{3.3}$$

Здесь F, $K_1, \ldots, K_4$ — постоянные матрицы.

В отношении функций f, φ, ψ, ω, χ, ζ предполагается, что они непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения системы (1.11), (3.1)—(3.3).

4. Устойчивость движения. Сумма первых трех слагаемых в правой части равенства (1.14) при $m_r > 0$, $J_{r0} > 0$ является определенно положительной функцией по отношению к координатам векторов $v_0^{\bullet}$, $\theta^{\bullet}$ как квадратическая составляющая кинетической энергии твердого тела. Функция $q^T \Omega^2 q$ при оговоренном выше соединении упругих элементов с твердым телом — определенно положительная функция по отношению к q. На основании этого можно утверждать, что V' в (1.14) при $m_r > 0$, $J_{r0} > 0$ — определенно положительная функция по отношению к координатам системы (1.11). При $m_r = 0$ и (или) $J_{r0} = 0$ эта функция не является определенно положительной.

Для получения суждения об определенной положительности функционала (1.8) достаточно показать определенную положительность его плотности [6, 7]. Для этого с n-м упругим элементом в недеформированном состоянии связывается базис $Ox_n y_n z_n$, который выбран так, что упругие перемещения вдоль осей этого базиса независимы друг от друга. На основании отношения Релея для потенциальной энергии упругих сил можно записать [6, 7]

$$\int_{S_n} u^T L(u)\, dS = \int_{S_n} u_n{}^T L(u_n)\, dS \geqslant \int_{S_n} \rho(r)\, u_n{}^T \Omega_{1n}^2 u_n\, dS,$$

$$\Omega_{1n}^2 = \operatorname{diag}[\Omega_{1x}^2, \Omega_{1y}^2, \Omega_{1z}^2] \tag{4.1}$$

где Ω_{1x}, Ω_{1y}, Ω_{1z} — наименьшие собственные значения, соответствующие упругим колебаниям вдоль осей Ox_n, Oy_n, Oz_n при фиксированном твердом теле, а матрица-столбец u_n записана через проекции на оси базиса $Ox_n y_n z_n$. Векторы u и u_n связаны матрицей направляющих косинусов между базисами $Oxyz$ и $Ox_n y_n z_n$. Аналогичные соотношения можно записать и для остальных упругих элементов. Тогда на основании равенства (1.8) для плотности V_d' функционала имеет место равенство

$$2V_d' = m_e^{-1}[m_r v_0^{\bullet T} v_0^{\bullet} + \theta^{\bullet T} J_{r0} \theta^{\bullet} + 2m_r v_0^{\bullet T} \theta_*^{\bullet} r_{rc}] +$$
$$+ (v_0^{\bullet} - r_* \theta^{\bullet} + u^{\bullet})^T (v_0^{\bullet} - r_* \theta^{\bullet} + u^{\bullet}) + \rho^{-1}(r)\, u^T L(u) \tag{4.2}$$

На основании (4.1) можно убедиться, что плотность (4.2) будет определенно положительной при $m_r > 0$, $J_{r0} > 0$. Следовательно, при этих условиях определенно положительным будет и функционал (1.8).

Наряду с системой (1.5), (1.6) и (1.11) будет рассматриваться система без учета упругости

$$mv_0^{\bullet\bullet} - mr_{c*}\theta^{\bullet\bullet} = F_0, \qquad J_0\theta^{\bullet\bullet} + mr_{c*}v^{\bullet\bullet} = G_0 \tag{4.3}$$

для которой справедливы соотношения

$$V_0'^{\bullet} = v_0^{\bullet T} F_0 + \theta^{\bullet T} G_0 \tag{4.4}$$

$$2V_0' = mv_0^{\bullet T} v_0^{\bullet} + \theta^{\bullet T} J_0 \theta^{\bullet} - 2mv_0^{\bullet} r_{c*} \theta^{\bullet} \tag{4.5}$$

Теорема 1. Если для системы (4.3), (3.1)—(3.3), не учитывающей упругости, существует определенно положительная функция V_0, в которую векторы $v_0^{\bullet}$, $\theta^{\bullet}$ входят только через слагаемое V_0' из (4.5) и полная производная по времени $V_0^{\cdot}$, найденная в силу системы (4.3), (3.1)—(3.3), будет определенно отрицательной, то положение равновесия системы (1.5), (1.6), (3.1)—(3.3) или системы (1.11), (3.1)—(3.3), которые описывают систему с учетом упругости, будет асимптотически устойчивым при $m_r > 0$, $J_{r0} > 0$.

Доказательство для системы (1.5), (1.6), (3.1)—(3.3). Замена в V_0 слагаемого V_0' из (4.5) на V' из (1.8) дает определенно положительный для системы (1.5), (1.6), (3.1)—(3.3) функционал V. Функционал $V^{\cdot}$ будет знакоотрицательным (видно из сравнения (1.9) и (4.4)), обращающимся в нуль при $v_0 = v_0^{\cdot} = \theta = \theta^{\cdot} = 0$, $u^{\cdot} = 0$. Если $V^{\cdot} \equiv 0$, то $v_0^{\cdot\cdot} \equiv \equiv \theta^{\cdot\cdot} \equiv 0$, $u^{\cdot} \equiv u^{\cdot\cdot} \equiv 0$, а это, как следует из уравнений (1.5), (1.6), соответствует неподвижному положению твердого тела, относительно которого упругая часть находится в покое. При жесткой заделке упругих элементов единственной точкой, в которой $V^{\cdot} \equiv 0$, будет точка с $u \equiv \equiv u^{\cdot} \equiv 0$, т. е. точка положения равновесия. Тогда из теоремы работы [7] следует асимптотическая устойчивость положения равновесия системы (1.5), (1.6), (3.1)—(3.3).

Доказательство для системы (1.11), (3.1)—(3.3). Замена в V_0 слагаемого V_0' из (4.5) на V' из (1.14) дает определенно положительную для исследуемой системы функцию V. Функция $V^{\cdot}$ из (1.13) для исследуемой системы будет знакоотрицательной. При наличии в упругих элементах естественного демпфирования доказательство проводится аналогично предыдущему. В случае пренебрежимо малого демпфирования в последнем уравнении (1.11) и в (1.13) надо положить $R = 0$.

Покажем, при каких условиях система будет асимптотически устойчивой. Из сравнения $V^{\cdot\cdot}$ (1.13) и $V_0'^{\cdot}$ (4.4) при учете (3.1)—(3.3) следует, что $V^{\cdot} \equiv 0$ при $F_0 = G_0 = v_0 = v_0^{\cdot} = \theta = \theta^{\cdot} = 0$, откуда $v^{\cdot\cdot} = \theta^{\cdot\cdot} = 0$. Подстановка последних тождеств в уравнения (1.11) дает систему (2.2) при $R = 0$. Отсюда следует, что условия отсутствия целых траекторий, отличных от тривиальной, где $V^{\cdot} \equiv 0$, совпадают с условиями наблюдаемости рассматриваемой системы. При этих условиях на основании теоремы Барбашина — Красовского можно сделать заключение об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.11), (3.1)—(3.3).

Теорема 2. Если для системы (4.3), (3.1)—(3.3), не учитывающей упругости, существует определенно положительная функция V_0, в которую векторы $v_0^{\cdot}$, $\theta^{\cdot}$ входят только через слагаемое V_0' из (4.5) и полная производная по времени $V_0^{\cdot}$, найденная в силу системы (4.3), (3.1)—(3.3), будет знакоотрицательной, причем множество $V_0^{\cdot} = 0$ для системы с учетом упругости не составляет целых траекторий кроме точки нуль, то положение равновесия будет асимптотически устойчивым и при учете упругости системой (1.5), (1.6), (3.1)—(3.3) или системой (1.11), (3.1)—(3.3) при $m_r > 0$, $J_{r0} > 0$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Замечания. 1°. Для выполнения условий теорем необходимо, чтобы система без учета упругости была асимптотически устойчивой.

2°. Формулировка теорем не изменится, если работа датчиков и исполнительных органов будет описываться другими по сравнению с (3.1)—(3.3) уравнениями, удовлетворяющими условиям теорем второго метода Ляпунова.

3°. Устойчивость или неустойчивость системы не зависит от расположения базиса $Oxyz$. Соотношение же между слагаемыми в V_0' из (4.5) определяется выбором базиса

Поэтому требование к структуре функции V_θ не является очень сильным ограничением.[1]

4°. Полученные результаты по наблюдаемости и устойчивости легко распространяются и на дискретизированные каким-либо способом модели упругих систем.

5°. Синтез систем управления с помощью доказанных теорем обеспечивает робастность систем управления по отношению к параметрам упругих элементов, а также по отношению к массово-инерционным характеристикам объекта управления.

Для линейных систем поиск квадратичных функций V_0 и $V_0^{\cdot}$ можно формализовать при помощи уравнения Ляпунова. С этой целью систему (4.3), (3.1)—(3.3) надо привести к форме Коши $x^{\cdot} = Ax$ (x — вектор состояния системы), а функции V_0 и $V_0^{\cdot}$ отыскивать в виде $V_0 = x^T Bx$, $V_0^{\cdot} = x^T Cx$. Тогда уравнение Ляпунова принимает вид $A^T B + BA = C$. То, что функция V_0 должна иметь определенную структуру, накладывает ограничения на структуру матрицы B. Другой метод построения функций V_0 и $V_0^{\cdot}$ приведен в примере.

Замечательно, что применение теорем не требует знания модели системы с учетом упругости. Теоремы сводят исследование устойчивости решений систем бесконечного порядка к исследованию устойчивости систем низкого порядка. Аналогичная задача была решена [8] методом корневого годографа для регулятора частного вида и поставлен вопрос о применимости такого упрощения исследования для регуляторов более широкого класса. Доказанные теоремы дают положительный ответ на этот вопрос.

5. Пример. Синтез динамического регулятора без учета упругости, обеспечивающего асимптотическую устойчивость системы с учетом упругости. Рассматривается одномерное движение твердого тела и доступны измерению его координата θ и скорость $\theta^{\cdot}$. Уравнения движения объекта регулирования и уравнения регулятора имеют вид

$$\begin{gathered} J\theta^{\cdot\cdot} + \sum_{i=1}^{\infty} H_i q_i^{\cdot\cdot} = G, \quad H_i\theta^{\cdot\cdot} + q_i^{\cdot\cdot} + \Omega_i^2 q_i = 0 \\ G = -k_1\theta^{\cdot} - k_2\theta - k_3 u_0 - Bu \\ u_0^{\cdot} = -f u_0 + \theta, \quad u^{\cdot} = Fu + K\theta \end{gathered} \tag{5.1}$$

где k_1, k_2, k_3, f — постоянные коэффициенты, B, F, K — постоянные матрицы. При малом f переменная u_0 близка к $\int \theta dt$, что делает систему практически астатической.

Вводятся новые переменные

$$u_0 - f^{-1}\theta = z_0, \quad u + F^{-1}K\theta = z \tag{5.2}$$

(предполагается, что матрица F невырожденная). При обозначениях (5.2) система (5.1) без учета упругости имеет вид

$$\begin{gathered} J\theta^{\cdot\cdot} = k_1\theta^{\cdot} - (k_2 + k_3 f^{-1} - BF^{-1}K)\theta - k_3 z_0 + Bz \\ z_0^{\cdot} = -f z_0 - f^{-1}\theta^{\cdot}, \quad z^{\cdot} = Fz + F^{-1}K\theta^{\cdot} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Умножим в системе (5.3) первое уравнение на $\theta^{\cdot}$, второе на $\rho_0 z_0$, третье на $z^T H$, где $\rho_0 > 0$ — скаляр, H — симметрическая матрица, и результаты сложим. Тогда можно записать

$$2V_0 = J\theta^{\cdot 2} + (k_2 + k_3 f^{-1} - BF^{-1}K)\,\theta^2 + \rho_0 z_0^2 + z^T Hz$$

$$V_0^{\cdot} = -k_1\theta^{\cdot 2} - \rho_0 f z_0^2 + z^T HFz - (k_3 + \rho_0 f^{-1})\,\theta^{\cdot} z_0 + \theta^{\cdot} z^T (HF^{-1}K - B^T)$$

При выполнении условий

$$k_2 + k_3 f^{-1} - BF^{-1}K > 0, \ \rho_0 > 0, \ H > 0 \tag{5.4}$$

функция V_0 определенно положительна. Одним из сочетаний достаточных условий

знакоотрицательности $V_0^{\cdot}$ являются условия

$$k_1 > 0, f > 0, \quad \rho_0 > 0, \quad 2\sqrt{k_1\rho_0 f} > |k_3 + \rho_0 f^{-1}| \tag{5.5}$$

$$HF^{-1}K - B^T = 0, \; HF > 0$$

При $H_i \neq 0$ и выполнении условий (5.4), (5.5) выполняются все условия теоремы 2 и система (5.1) асимптотически устойчива.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hughes P. C.* Modal Identities for Elastic Bodies with Application to Vehicle Dynamics and Control // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1980. V. 47. № 1. P. 177—184.
2. *Ткаченко В. А.* Стабилизация углового положения космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей динамическим регулятором // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 4. С. 520—530.
3. *Охами Ю., Ликинз П.* Влияние упругости КЛА на управляемость и наблюдаемость системы. // Управление в пространстве. М.: Наука, 1976. Т. 2. С. 275—285.
4. *Highes P. C., Skelton R. E.* Contrallability and observability for flexible spacecraft// J. Guidance and Control. 1980. V. 3. № 5. P. 452—459.
5. *Hughes P. C., Skelton R. E.* Modal truncation for flexible spacecraft // J. Guidance and Control. 1981. V. 4. № 3. P. 291—297.
6. *Мирович Л.* Исследование устойчивости вращающегося тела, содержащего упругие части, прямым методом Ляпунова // Ракет. техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 7. С. 11—20.
7. *Мирович Л., Калико Р. А.* Сравнение методов исследования устойчивости для нежестких спутников // Ракет. техника и космонавтика. 1973. Т. 11. № 1. С. 108—117.
8. *Хьюз П. С., Абдель-Рахман Т. М.* Устойчивость трехчленного линейного управления гибким КЛА // Ракет. техника и космонавтика. 1980. Т. 18. № 1. С. 151—157.

Запорожье

Поступила в редакцию 19.I.1988