УДК 531.36

Р. С. Суликашвили

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЕЛ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ, В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Результаты автора [1—3] по исследованию стационарных движений неизменяемых систем материальных точек равной массы, расположенных в вершинах правильных многогранников, в центральном ньютоновском поле сил в предположении неподвижности центра масс представлены в обобщенной математической форме и распространяются на произвольные неизменяемые системы, распределения масс которых допускают одну из групп симметрий правильных многогранников (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр). Показано, что решения, полученные ранее из рассмотрения первых членов разложения силовой функции в ряд Тейлора, сохраняются и при учете полного выражения силовой функции (потенциала). Исследована устойчивость этих решений.

1. Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой в центральном ньютоновском поле сил. Пусть неподвижная точка G совпадает с центром масс тела, а распределение масс в теле инвариантно относительно преобразований, принадлежащих одной из дискретных групп симметрии: тетраэдра, октаэдра, икосаэдра.

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система координат с началом в притягивающем центре O, $Gxyz$ — система безразмерных координат, жестко связанная с телом (масштабом длины служит характерный размер тела l). Силовая функция ньютоновского тяготения имеет вид

$$U(\gamma)=\frac{fM_0}{R}\iiint\frac{l^3\,dm}{\sqrt{1+2\varepsilon(\gamma\cdot\tau)+\varepsilon^2\tau^2}}\tag{1.1}$$

$$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\mathbf{R}/R,\quad \varepsilon=l/R,\quad \tau=\mathbf{r}/l,\quad \mathbf{R}=\mathbf{OG},\quad \mathbf{r}=\mathbf{GA}$$

где A — произвольная точка тела, f — постоянная тяготения, M_0 — масса притягивающего тела. Здесь и далее интегрирование ведется по объему тела.

Утверждение. Пусть S — преобразование из группы симметрии, допускаемой распределением масс в теле. Тогда $U(\gamma)=U(S^T\gamma)$.

Доказательство. В силу (1.1)

$$U(\gamma)=\frac{fM_0}{R}\iiint\frac{l^3\,dm}{\sqrt{1+2\varepsilon(\gamma\cdot\tau)+\varepsilon^2\tau^2}}=$$
$$=\frac{fM_0}{R}\iiint\frac{l^3\,dm}{\sqrt{1+2\varepsilon(\gamma\cdot S\tau)+\varepsilon^2(S\tau)^2}}=U(S^T\gamma)$$

причем $\det S^T=1$, $(S\tau)^2=\tau^2$ в силу ортогональности матрицы S.

Разлагая подынтегральное выражение по степеням ε, запишем равенство (1.1) в виде

$$U(\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\,\varepsilon^n$$

где $Q_n(\gamma)$ — многочлены по компонентам вектора γ, инвариантные относительно действия группы симметрии: $Q_n(\gamma)=Q_n(S\gamma)$. Согласно теореме о полиномиальных инвариантах дискретных групп [4], коэффициенты $Q_n(\gamma)$ представимы в виде $Q_n(\gamma) = P_n(I_1, I_2, I_3)$, где $I_1(\gamma)$, $I_2(\gamma)$, $I_3(\gamma)$ — полиномиальные инварианты данной группы, P_n — многочлены от I_1, I_2, I_3. Выражения этих инвариантов через γ_1, γ_2, γ_3 имеют следующий вид [5, 6]: $I_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$

для тетраэдра

$$I_2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad I_3 = \gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2$$

для октаэдра и куба

$$I_2 = \gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2, \quad I_3 = \gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_3^2$$

для додекаэдра и икосаэдра

$$I_2 = 4(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + 3(5 - \sqrt{5})(\gamma_1^4\gamma_2^2 + \gamma_2^4\gamma_3^2 + \gamma_3^4\gamma_1^2) + 3(5 + \sqrt{5})(\gamma_1^2\gamma_2^4 + \gamma_2^2\gamma_3^4 + \gamma_3^2\gamma_1^4)$$

$$I_3 = 5(\gamma_1^{10} + \gamma_2^{10} + \gamma_3^{10}) + 9(5 - 2\sqrt{5})(\gamma_1^8\gamma_2^2 + \gamma_2^8\gamma_3^2 + \gamma_3^8\gamma_1^2) + 9(5 + 2\sqrt{5})(\gamma_1^2\gamma_2^8 + \gamma_2^2\gamma_3^8 + \gamma_3^2\gamma_1^8) + 21(5 - \sqrt{5})(\gamma_1^6\gamma_2^4 + \gamma_2^6\gamma_3^4 + \gamma_3^6\gamma_1^4) + 21(5 + \sqrt{5})(\gamma_1^4\gamma_2^6 + \gamma_2^4\gamma_3^6 + \gamma_3^4\gamma_1^6)$$

Таким образом, силовая функция будет иметь вид

$$U_\nu = U_\nu(\varepsilon, I_1, I_2, I_3)$$

Значения $\nu = 1, 2, 3$ отвечают группам тетраэдра, октаэдра и икосаэдра соответственно.

Так как поле сил осесимметрично и силовая функция зависит только от γ_1, γ_2, γ_3, все положения равновесия твердого тела безразличны по отношению к повороту вокруг γ.

Уравнения движения тела запишутся в виде

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{\partial U_\nu}{\partial \gamma} \times \gamma, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma \times \omega \tag{1.2}$$

(J — момент инерции, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости). Для рассматриваемых тел центральный тензор инерции второго порядка обладает шаровой симметрией.

Уравнения движения (1.2) допускают интегралы энергии, площадей и геометрический

$$H_\nu = {}^1/_2 J(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - U_\nu = h = \mathrm{const}$$

$$K = J(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3) = k = \mathrm{const}, \quad I_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

На основании теоремы Рауса [7] задача о стационарных движениях тела сводится к определению стационарных значений функции

$$W_\nu = {}^1/_2 J(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) - U_\nu(\varepsilon, 1, I_2, I_3) - \lambda(K - k) + {}^1/_2 \mu(I_1 - 1)$$

где λ и μ — неопределенные множители Лагранжа. Условия стационарности этой функции задаются системой уравнений, которые допускают следующие однопараметрические ($\omega_i = \lambda\gamma_i$) семейства решений:

для тетраэдра

$$\gamma_1 = 0, \ \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = \pm 1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.3}$$

$$\gamma_1 = \pm 1/\sqrt{3}, \ \gamma_2 = \pm 1/\sqrt{3}, \ \gamma_3 = \pm 1/\sqrt{3} \tag{1.4}$$

для куба и октаэдра (1.3), (1.4) и

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \gamma_3 = \pm 1/\sqrt{2} \quad (1\,2\,3) \tag{1.5}$$

для додекаэдра и икосаэдра (1.3) и

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \quad \gamma_3 = \pm\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \quad (1\,2\,3) \tag{1.6}$$

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}},\quad \gamma_3=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}\quad (1\,2\,3) \tag{1.7}$$

$$\mu = J\lambda^2 + 3(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)U_{\nu,2} + 4(\gamma_1^2\gamma_2^2+\gamma_2^2\gamma_3^2+\gamma_3^2\gamma_1^2)U_{\nu,3}$$

(символ (1 2 3) означает круговую перестановку индексов 1, 2, 3).

Эти решения совпадают (с точностью до поворота системы координат $Gxyz$ вокруг оси x на 45°) с решениями, найденными ранее [2, 3].

2. Исследуем устойчивость найденных стационарных движений по отношению к величинам ω_1, ω_2, ω_3, γ_1, γ_2, γ_3. Для этого вычислим вторую вариацию $\delta^2 W_\nu$ $(\nu=1,2,3)$ на линейном многообразии $\delta K=0$, $\delta I_1=0$. Имеем

$$\delta^2W_\nu = B + (\mu - J\lambda^2)\sum_{i=1}^{3}(\delta\gamma_i)^2 - \sum_{i,j=1}^{3}\Big(U_{\nu,22}\frac{\partial I_2}{\partial\gamma_i}\frac{\partial I_2}{\partial\gamma_j} + U_{\nu,23}\frac{\partial I_2}{\partial\gamma_i}\frac{\partial I_3}{\partial\gamma_j} +$$
$$+ U_{\nu,33}\frac{\partial I_3}{\partial\gamma_i}\frac{\partial I_3}{\partial\gamma_j} + U_{\nu,2}\frac{\partial^2 I_2}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j} + U_{\nu,32}\frac{\partial I_3}{\partial\gamma_i}\frac{\partial I_2}{\partial\gamma_j} + U_{\nu,3}\frac{\partial^2 I_3}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}\Big)(\delta\gamma_i)(\delta\gamma_j) \tag{2.1}$$

$$B = J\sum_{i=1}^{3}\Omega_i^2,\quad \Omega_i=\delta\omega_i-\lambda\delta\gamma_i,\quad U_{\nu,i}=\partial U_\nu/\partial I_i$$
$$U_{\nu,ij}=\partial^2U_\nu/\partial I_i\partial I_j$$

Для тетраэдра на решении (1.3) форма (2.1) принимает вид

$$\delta^2W_1 = B - 2\{U_{1,2}(\delta\gamma_1)(\delta\gamma_2) + U_{1,3}[(\delta\gamma_1)^2+(\delta\gamma_2)^2]\} = B +$$
$$+ a_1(\delta\alpha_1)^2 + b_1(\delta\alpha_2)^2 \tag{2.2}$$
$$\delta\gamma_1=\delta\alpha_1+\delta\alpha_2,\ \delta\gamma_2=\delta\alpha_1-\delta\alpha_2,\quad a_1=-2(U_{1,2}+2U_{1,3}),$$
$$b_1 = 2(U_{1,2}-2U_{1,3})$$

Если $a_1>0$, $b_1>0$, то степень неустойчивости $\chi=0$ и движение устойчиво. Если $a_1>0$, $b_1<0$ или $a_1<0$, $b_1>0$, то степень неустойчивости $\chi=1$ и движение неустойчиво. Наконец, если $a_1<0$, $b_1<0$, то степень неустойчивости $\chi=2$; в этом случае теорема Рауса и ее обращение не позволяют сделать вывод об устойчивости или неустойчивости стационарных движений.

Для решений (1.4)

$$\delta^2W_1 = C[(\delta\gamma_1)^2+(\delta\gamma_1)(\delta\gamma_2)+(\delta\gamma_2)^2] = C[3(\delta\alpha_1)^2+(\delta\alpha_2)^2]$$
$$C = {}^4/_3[\sqrt{3}U_{1,2}+2U_{1,3}]$$

Если $c>0$, то степень неустойчивости $\chi=0$ и движение устойчиво, а если $c<0$, то $\chi=2$.

Форма (2.1) для куба и октаэдра $(\nu=2)$, икосаэдра и додекаэдра $(\nu=3)$ принимает вид

$$\delta^2W_\nu = B + C_\nu(\delta\gamma_1)^2 + d_\nu(\delta\gamma_2)^2 \tag{2.3}$$
$$\delta^2W_2 = B + a_2(\delta\alpha_1)^2 + b_2(\delta\alpha_2)^2 \tag{2.4}$$

причем выводы относительно устойчивости или неустойчивости движения в зависимости от знака C_ν, d_ν или a_2, b_2 идентичны сделанным выше.

Для решений (1.3) имеем форму (2.3) при

$$C_2=d_2=-2U_{2,2},\quad C_3=2l^-,\quad d_3=2l^+$$
$$l^\pm = 3(\sqrt{5}\pm1)U_{3,2} + 2(9\sqrt{5}\pm10)U_{3,3}$$

Для решений (1.4) имеем форму (2.4) при

$$a_2=b_2={}^8/_9(3U_{2,2}+U_{2,3})$$

для решений (1.5) имеем форму (2.3)

$$C_2=-(U_{2,2}+{}^1/_2U_{2,3}),\quad d_2=4U_{2,2}$$

для решений (1.6)

$$C_3 = -{}^4/_{25}\,(605-252\sqrt{5})U_{3,3}, \quad d_3 = -{}^3/_{25}\,\{9\,(5+\sqrt{5})[4U_{3,22} + 48U_{3,23} + 144U_{3,33} + 35U_{3,2}]\} + 2\,(3064 + 487\sqrt{5})U_{3,3}$$

для решений (1.7)

$$C_3 = \frac{4}{9}\,[102U_{3,2} + (155-28\sqrt{5})\,U_{3,3}], \quad d_3 = \frac{1}{2}\Big\{10\,(3-\sqrt{5}\Big[27U_{3,22} + 340U_{3,23} - \frac{38900}{27}U_{3,33} + \frac{243}{5}U_{3,2}\Big] - 9\,(447\sqrt{5}-935)\,U_{3,3}\Big\}$$

3. Рассмотрим на примере тетраэдра вопрос о несуществовании в общем случае других стационарных движений, кроме движений (1.3), (1.4). Согласно результатам разд. 1, измененная потенциальная энергия записывается в виде $U_1 = U_1\,(\varepsilon, I_1, I_2, I_3)$.

Сделаем замену переменных: вместо переменных γ_1, γ_2, γ_3 возьмем переменные I_1, I_2, I_3. Такая замена корректна в области, где якобиан $|\,\partial I/\partial\gamma\,| \neq 0$, т. е. вне множества

$$M = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3;\ (\gamma_1^2-\gamma_2^2)(\gamma_2^2-\gamma_3^2)(\gamma_3^2-\gamma_1^2) = 0\}$$

представляющего собой набор плоскостей. Инвариант I_1 совпадает с геометрическим интегралом и равен единице. Следовательно, стационарные движения вне множества M определяются соотношениями

$$U_{1,2}' = 0,\ U_{1,3}' = 0;\ U_1' = (\varepsilon, 1, I_2, I_3) \tag{3.1}$$

Решение уравнений (3.1) зависит от конкретного распределения масс в теле. Дополнительные условия, при которых такие решения существуют, в общем виде здесь не рассматриваются. Заметим, что все полученные ранее решения (1.3), (1.4) лежат в множестве M.

Рассмотрим одну из плоскостей, образующих множество M, например $M_{12} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3;\ \gamma_1 = \gamma_2\}$. Тогда на множестве $M_{12} \cap \{I_1 = 1\}$ инварианты I_2, I_3 представим в виде

$$I_2 = f\,(\gamma_3) = {}^1/_2\,(1-\gamma_3^2)\,\gamma_3,\ I_3 = g\,(\gamma_3) = {}^1/_4\,(-3\gamma_3^4 + 2\gamma_3^2 + 1)$$

При этом на множестве

$$M_{12} \setminus \{\gamma_1 = \gamma_2 = 0\} \tag{3.2}$$

необходимое условие существования условного экстремума измененной потенциальной энергии W_1 пдиводится к уравнениям

$$\begin{gathered}\partial U''/\partial\gamma_3 = (1-3\gamma_3^2)\,({}^1/_2 U_{1,2}'' + \gamma_3 U_{1,3}'') = 0\\ U_1''\,(\gamma_3) = U_1\,[\varepsilon, 1, f\,(\gamma_3),\ g\,(\gamma_3)]\end{gathered} \tag{3.3}$$

Приравнивая нулю первый сомножитель уравнения (3.3), получим уже найденные решения (1.4). Условия существования других решений уравнений (3.3), связанных с обращением в нуль второго сомножителя, зависят от конкретного распределения масс и здесь не рассматриваются. Наконец, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = \pm 1$ — также решение уравнений равновесия (1.3), в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Таким образом, кроме решений (1.3) и (1.4) других общих решений, не зависящих от конкретного распределения масс, выдерживающего преобразования из группы симметрий тетраэдра, не существует.

Рассмотрим пример. Исследовалось [2] движение тетраэдра, в вершинах которого помещены материальные точки равных масс, в ньютоновском поле сил в предположении, что центр масс тетраэдра совпадает с неподвижной точкой. Потенциал был представлен рядом по степеням ε и записывался в виде

$$U_1 = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + A_3 I_2 \varepsilon^3 + A_4 I_3 \varepsilon^4 + \ldots$$

В этом случае уравнения (3.1) принимают форму $A_3\varepsilon^3 + \ldots = 0$, $A_4\varepsilon^4 + \ldots = 0$ и при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ не имеют решений. Следовательно, решения могут находиться только на плоскостях, принадлежащих множеству M.

Рассмотрим, например, плоскость M_{12}. На множестве $M_{12} \cap \{I_1 = 1\}$ потенциал записывается в виде

$$U_1' = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + A_3\varepsilon^3 f(\gamma_3) + A_4\varepsilon^4 g(\gamma_3) + \ldots$$

тогда на множестве (3.2) уравнение (3.3) запишется в виде $A_3 \cdot {}^1/_2 (1 - 3\varepsilon_3^2)\,\varepsilon^3 + \ldots = 0$, и следовательно, при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ на плоскости нет других решений, кроме (1.3) и (1.4).

Рассматривая другие плоскости из множества M, можно убедиться, что при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, задача, сформулированная в [2], не имеет решений, отличных от (1.3), (1.4).

Аналогичные рассуждения справедливы и для других тел, обладающих симметриями правильных многогранников.

4. Все полученные результаты сохраняются и для тел указанного вида на круговой орбите, так как вследствие равенства всех главных моментов инерции тела моменты центральных и кориолисовых сил в орбитальной системе координат отсутствуют.

Для рассматриваемых задач в случае, когда нет стационарных движений, отличных от (1.3), (1.4), бифуркационная диаграмма на плоскости констант интегралов энергии h и площадей k представляет собой три параболы. Эти параболы образуют множество, на котором происходит перестройка областей возможного движения [8], определяемых соотношением $-U_\nu^* \leqslant h$.

Если в задаче имеются и другие стационарные движения, то на бифуркационной диаграмме появляются дополнительные ветви.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суликашвили Р. С.* О влиянии моментов инерции третьего и четвертого порядков на движение твердого тела // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 268—274.
2. *Суликашвили Р. С.* О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 57—66.
3. *Суликашвили Р. С.* О стационарных движениях икосаэдра и додекаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1988. С. 93—100.
4. *Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. С. 1—240.
5. *Goursat E.* Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symetrie d'un polyedre regulier // Ann. del'Ecole norm 1887. Vo. 4. P. 159—200; 241—312; 317—340.
6. *Игнатенко В. Ф.* Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М., ВИНИТИ, 1984. Т. 16. С. 195—229.
7. *Рубановский В. Н., Степанов С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнения движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904—912.
8. *Смейл С.* Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 77—133.

Тбилиси

Поступила в редакцию 22.VI.1988