Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.36

А. В. Степанов

О ПРИМЕНЕНИИ ФОРМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Приводится метод исследования форм произвольного высокого порядка на знакоопределенность в части пространства R^n, совпадающей с одним из координатных углов. Это позволяет получить ряд модификаций известных результатов теории устойчивости при помощи таких функций. Обобщенная на случай оценок m-й степени теорема Груйича [1] об экспоненциальной устойчивости сложных систем позволяет получить новые области абсолютной устойчивости уравнений продольного движения самолета. Получен ряд результатов, связанных с монотонной устойчивостью систем с полиномиальной правой частью специального вида.

В ряде задач теории устойчивости оказывается достаточным строить функцию Ляпунова, обладающую свойствами знакоопределенности не во всем пространстве, а на некотором его подпространстве — конусе. Например, имеет смысл это делать в задачах о биологических сообществах, так как траектории системы, описывающей динамику таких взаимодействий, не покидают первый координатный угол. Вопросам получения условий знакоопределенности квадратичных форм в конусе, совпадающем с координатным углом, посвящена работа [2]. В работах [3] и [4] приводился критерий знакоопределенности квадратичных форм в некоторой области пространства R^n, в определенной степени схожий с аналогичными условиями, полученными в [2]. Ранее был предложен [5] критерий знакоопределенности формы третьего порядка в одном из координатных углов. Важно также отметить результат [6], связанный с одним из методов исследования знакоопределенности форм произвольного четного порядка во всем пространстве.

Опираясь на понятие конуса, совпадающего с координатным углом, а также результаты работ [5] и [6], можно получить определенный метод исследования свойств знакоопределенности формы произвольного высокого порядка, в том числе нечетного, в одном из ортантов пространства R^n.

1. О знакоопределенности формы произвольного m-го порядка в некотором конусе. Конус пространства R^n, совпадающий с координатным углом, будем обозначать следующим образом [7]: $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$, где α_{i0} — элементы некоторого базиса $\{\alpha_{i0}\}$, принимающие значения $+1$ и -1, и при этом

$$\alpha_{i0} = \operatorname{sign} x_i, \quad x_i \neq 0; \quad \alpha_{i0} x_i > 0$$

Здесь и всюду далее $i = 1, 2, \ldots, n$.

В конусе K области $H = \{x\colon 0 \leqslant \|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n| < \infty\}$ рассмотрим форму m-го порядка

$$W(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{n} A_{i_1 \ldots i_m} x_{i_1} \ldots x_{i_m}, \quad A_{i_1 \ldots i_m} = \text{const}$$

Осуществим последовательно две замены переменных: $y_i = \alpha_{i0} x_i$, где α_{i0} — элементы базиса рассматриваемого конуса, и $y_i = u_i^2$. Тогда получим некоторую форму четного порядка

$$\Omega(u) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{n} B_{i_1 \ldots i_m} u_{i_1}^2 \ldots u_{i_m}^2, \quad B_{i_1 \ldots i_m} = \text{const}$$

свойства знакоопределенности которой во всем пространстве R^n совпадают со свойствами знакоопределенности W в конусе K. Используя результат, полученный в [6], осуществим следующее отображение:

$$z_1 = u_1^{\ m}, \quad z_2 = u_1^{m-1} u_2, \ldots, z_l = u_n^{\ m}$$

которое преобразует $\Omega(u)$ в квадратичную функцию

$$V(z) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} v_{kj} z_k z_j, \quad v_{kj} = \text{const}$$

Таким образом, исследование на знакоопределенность формы m-го порядка W в конусе K сводится к анализу свойств знакоопределенности квадратичной формы $V(z)$ во всем пространстве $Z_l \subseteq R^l$. А это в свою очередь можно осуществлять уже известными методами, например пользуясь критерием Сильвестра. В силу всего сказанного, получаем определенный способ исследования форм произвольного высокого порядка на знакоопределенность в некотором конусе. Однако здесь важно отметить, что для конкретной задачи, например для получения необходимых и достаточных условий знакоопределенности формы третьего порядка в конусе, совпадающем с одним из координатных углов, существует другой подход.

2. Условия знакоопределенности формы третьего порядка в некотором конусе. В конусе K области H рассмотрим форму третьего порядка

$$W(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k V_k(x), \quad V_k(x) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{kij} x_i x_j \tag{2.1}$$

$$a_{kij} = \text{const} \ (i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Здесь $V_k(x)$ — k-я квадратичная форма с матрицей $A^{(k)}$, составленной из элементов a_{kij}. Пусть $\sigma = (i_1, \ldots, i_r)$ — последовательность из множества Q_{rn} всех строго возрастающих последовательностей, составленных из r чисел множества $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, а $A^{(k)}_{[\sigma/\sigma]}$ — главная подматрица матрицы k-й квадратичной формы $V_k(x)$, составленная из элементов матрицы $A^{(k)}$ с индексами из σ.

Теорема 1. Для положительной (отрицательной) определенности формы $W(x)$ в конусе K необходимо и достаточно, чтобы системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}(A^{(i_k)}_{[\sigma/\sigma]} x_\sigma, x_\sigma) = \alpha_{i_k 0}\lambda, \ i_k \in \sigma, \sigma \in Q_{rn} \\ k = 1, 2, \ldots, r \\ x_\gamma = 0, \ \gamma = N \setminus \sigma, \quad x_\gamma \in R^{n-r} \\ r = 1, 2, \ldots, n\end{gathered} \tag{2.2}$$

не имели ненулевых решений в конусе K при любых $\lambda < 0$ $(\lambda > 0)$. Здесь $\alpha_{i_k 0}$ — элементы базиса рассматриваемого конуса.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий определенные возможности форм третьего порядка. Исследуем в области

$$G = K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\} \times I, \quad I = [0, \infty[$$

свойства монотонной устойчивости модельной системы вида

$$x_k^{\cdot} = -x_k V_k(x), \quad V_k(x) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{kij} x_i x_j \tag{2.3}$$

$$a_{kij} = \text{const}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Подобные системы приводились [8] в качестве модельных при исследовании вопросов устойчивости в случае нейтрального линейного приближения. Заметим, что эта система удовлетворяет условиям леммы М. А. Красносельского в рассматриваемой области. Следовательно, траектории системы (2.3) с начальными данными из конуса K не покидают его пределов. Система (2.3) будет монотонно устойчивой в конусе K если функция

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0} x_i(t)$$

строго монотонно убывает с течением времени вдоль траекторий системы для любых начальных данных из рассматриваемой области.

Таким образом, для монотонной устойчивости системы (2.3) в конусе K необходима и достаточна положительная определенность формы

$$W(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k0} x_k V_k(x)$$

в рассматриваемом конусе. Отсюда видно, что свойства монотонной устойчивости системы вытекают из различных соотношений для элементов базиса $\{\alpha_{i0}\}$ конуса K и коэффициентов системы a_{kij}.

Аналогичные результаты можно получить при исследовании на монотонную устойчивость системы дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью специального вида степени m

$$\dot{x}_{i_1} = -x_{i_1} \sum_{i_2=i_1}^{n} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{n} A_{i_1 \ldots i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$$
$$A_{i_1 \ldots i_m} = \mathrm{const}, \quad i_1 = 1, 2, \ldots, n$$

3. Коэффициентный критерий знакоопределенности формы третьего порядка в конусе, совпадающем с координатным углом. Для определенности будем рассматривать первый квадрант. В области $\{0 \leqslant \|x\| = \sqrt{(x, x)} < \infty,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$ рассмотрим форму

$$W(x_1, x_2) = a_{30}x_1^3 + a_{21}x_2x_1^2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 \qquad (3.1)$$

Очевидно, эту форму можно представить в виде

$$W(x_1, x_2) = x_1(a_{30}x_1^2 + {}^2/_3 a_{21}x_1x_2 + {}^1/_3 a_{12}x_2^2) + x_2({}^2/_3 a_{21}x_1^2 + {}^1/_3 a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2)$$

Пользуясь необходимыми и достаточными условиями знакоопределенности форм третьего порядка, которые были приведены ранее, можно получить следующий результат. Для того чтобы форма (3.1) была отрицательно определена в первом квадранте, необходимо и достаточно, чтобы в рассматриваемой области системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{30}x_1^2 + {}^2/_3 a_{21}x_1x_2 + {}^1/_3 a_{12}x_2^2 = \lambda \\ {}^2/_3 a_{21}x_1^2 + {}^1/_3 a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2 = \lambda \end{cases} \qquad (3.2)$$
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ a_{03}x_2^3 \geqslant 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ a_{30}x_1^3 \geqslant 0 \end{cases}$$

не имели ненулевых решений в первом координатном углу при любых $\lambda > 0$. Вопрос о разрешимости этих систем решается следующим образом. Для первой системы вычисляется результант и приравнивается нулю в предположении, что решение, вообще говоря, имеется. Очевидно, что при этом a_{03} и a_{30} отрицательны. Таким образом получим биквадратное уравнение с параметром

$$f(y^2) \equiv A_1y^4 + \lambda A_2y^2 + \lambda^2A_3 = 0$$

Для отыскания верхней границы положительных корней $z = y^2$ можно использовать метод Ньютона. Первая система (3.2) будет также неразрешимой, если уравнение $f(z) = 0$ имеет комплексные корни, т. е. при условии, что

$$A_2^2 - 4A_1A_3 < 0$$

Очевидно, все приведенные выше алгебраические выкладки поддаются алгоритмизации. Таким образом, удается численно исследовать форму W в конусе пространства R^2 на знакоопределенность.

4. Модификация теоремы Груйича об экспоненциальной устойчивости сложных систем. В области

$$H = \{t \geqslant 0;\ 0 \leqslant \| x \| = \sqrt{(x,\ x)} < \infty,\ x \in R^n\}$$

рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} x^{\cdot} = f\ (t,\ x),\ f\ (t,\ 0) \equiv 0,\ x \in R^n; \\ f\colon\ I \times R^n \to R^n,\ \ I = [0,\ \infty[\end{gathered} \tag{4.1}$$

распадающуюся на k взаимодействующих подсистем

$$\begin{gathered} x_s^{\cdot} = g_s\,(t, x_s) + h_s\,(t, x^\circ), \quad x_s \in R^{n_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, k \\ g_s : I \times R^{n_s} \to R^{n_s}, \quad n_1 + \ldots + n_k = n \\ x^\circ = (x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \ldots, x_k) \\ h_s : I \times R^n \to R^{n_s} \end{gathered}$$

изолированные подсистемы которых имеют вид

$$x_s^{\cdot} = g_s\ (t,\ x_s),\ g_s\ (t,\ 0) \equiv 0,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k \tag{4.2}$$

Пусть правые части системы (4.1) и систем (4.2) таковы, что обеспечивается существование и единственность решений соответствующих систем для любых начальных данных из рассматриваемой области.

Нулевое решение сложной системы (4.1) будем исследовать на устойчивость при помощи функции Ляпунова

$$V\,(t, x) = \sum_{s=1}^{k} V_s\,(t, x_s)$$

где $V_s\ (t,\ x_s)$ — некоторая функция Ляпунова для s-й изолированной подсистемы исходной системы (4.1). Пусть решения подсистем (4.2) либо экспоненциально устойчивы, либо экспоненциально неустойчивы. В этом случае для каждой изолированной подсистемы (4.2) существует функция Ляпунова $V_s\ (t,\ x_s)$, такая, что

$$\begin{gathered} c_{s1}\,\| x_s \|^m \leqslant V_s\,(t, x_s) \leqslant c_{s2}\,\| x_s \|^m \\ \mu_s c_{s3}\,\| x_s \|^m \leqslant V_s^{\cdot}\,(t, x_s) \leqslant \mu_s c_{s4}\,\| x_s \|^m \end{gathered} \tag{4.3}$$

где $c_{sl} > 0$ ($s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ l = 1,\ \ldots,\ 4$) вещественные постоянные, а μ_s принимают значения -1 либо $+1$ в зависимости от того, будет ли нулевое решение s-й подсистемы (4.2) экспоненциально устойчивым или экспоненциально неустойчивым.

Будем говорить, что вектор взаимосвязей

$$h\ (t,\ x) = \text{col}\ (h_1^T,\ \ldots,\ h_k^T)$$

принадлежит классу H_*, если для любых t и x

$$\sum_{s=1}^{k} (\nabla V_s, h_s) \leqslant \sum_{i_1=1}^{k} \cdots \sum_{i_m=i_{m-1}}^{k} \alpha_{i_1 \ldots i_m}\, \| x_{i_1} \| \cdots \| x_{i_m} \|$$

где $\alpha_{i_1 \ldots i_m}$ — некоторые вещественные постоянные. Из элементов

$$\beta_{i_1 \ldots i_m} = \mu_{i_1} c_{i_1 4} \delta_{i_1 \ldots i_m} + \alpha_{i_1 \ldots i_m}$$

построим форму m-го порядка

$$W(y)=\sum_{i_1=1}^{k}\cdots\sum_{i_m=i_{m-1}}^{k}\beta_{i_1\ldots i_m}y_{i_1}\cdots y_{i_m},$$

где $\delta_{i_1\ldots i_m}=1$, если $i_1=i_2=\ldots=i_m$, в противном случае $\delta_{i_1\ldots i_m}=0$.

Теорема 2. Пусть для каждой s-й подсистемы (4.2) системы (4.1) в области H существует функция $V_s(t, x_s)$, удовлетворяющая неравенствам (4.3), а вектор взаимосвязей $h(t, x)$ принадлежит классу H_*. Тогда, если форма m-го порядка $W(y)$ отрицательно определена в конусе $(y\geqslant 0)$, то нулевое решение сложной системы (4.1) асимптотически устойчиво в целом, равномерно по t_0 и x_0.

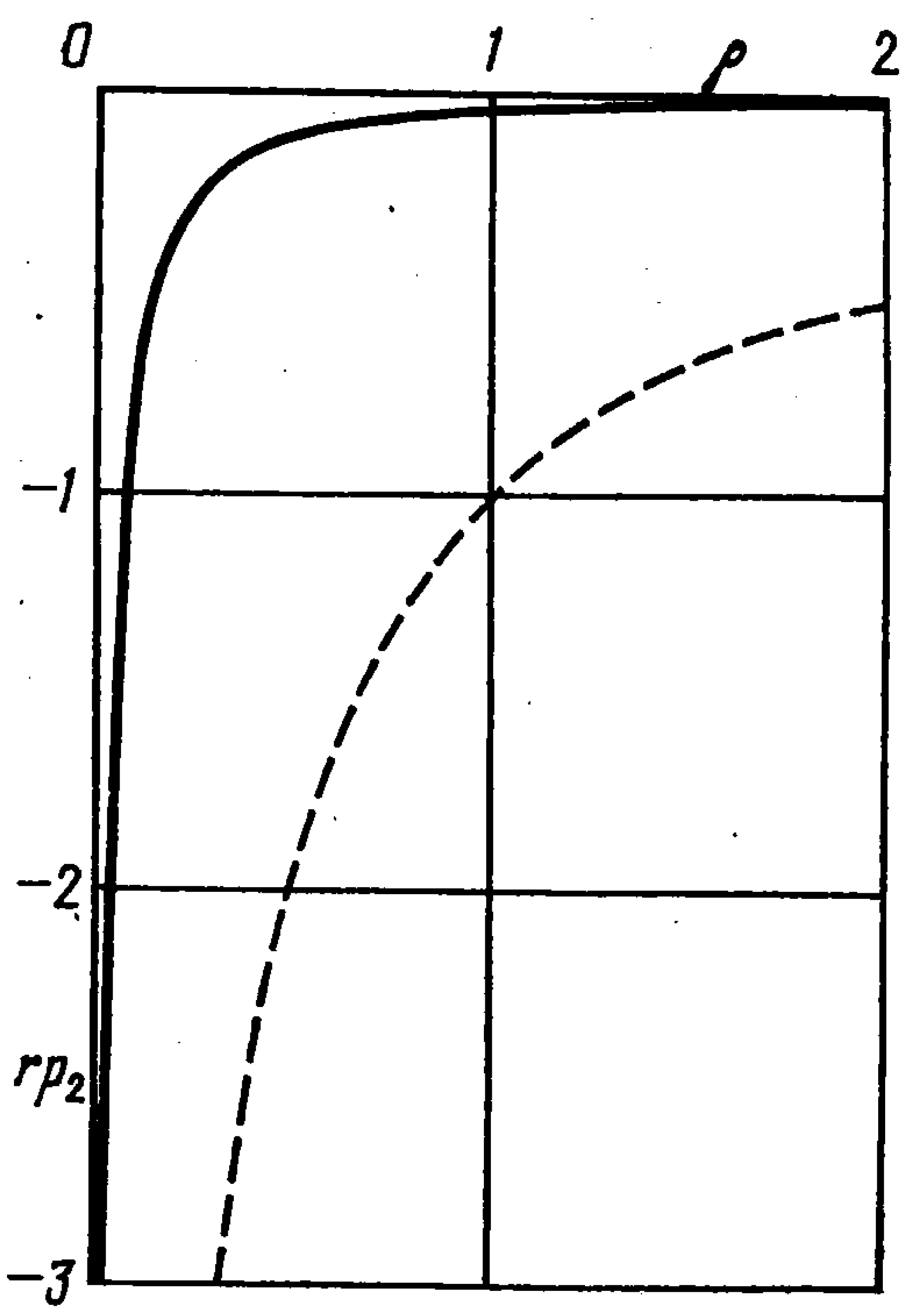
Известная теорема Груйича об экспоненциальной устойчивости сложных систем дифференциальных уравнений [1] основана на использовании существующих для изолированных подсистем функций Ляпунова в виде выражений с квадратичными оценками, а также применении критерия Сильвестра.

Теорему 2 можно использовать, например, при уточнении границ области допустимых значений параметров уравнений продольного движения самолета [9], при которых эти уравнения абсолютно устойчивы.

5. Исследование уравнений продольного движения самолета при помощи форм третьего порядка. Рассмотрим систему уравнений продольного движения самолета

$$\begin{gathered}x_s^{\cdot}=-\rho_s x_s+\sigma,\quad \sigma^{\cdot}=\sum\beta_s x_s+rp_2\sigma-f(\sigma)\\ \rho_s>0,\ r>0,\ p_2<0\\ 0<\sigma\cdot f(\sigma),\quad \sigma\neq 0;\quad f(0)=0\end{gathered}\tag{5.1}$$

Здесь и далее $m=1, 2, 3, 4$, суммирование ведется по s от $s=1$ до $s=4$.



Декомпозиция уравнений (5.1) приводит к двум изолированным подсистемам

$$x_s^{\cdot}=-\rho_s x_s\tag{5.2}$$

$$\sigma^{\cdot}=rp_2\sigma-f(\sigma)\tag{5.3}$$

Функцию Ляпунова для исходной системы (5.1) будем строить в виде $V=c_1V_1+c_2V_2$, где $V_1=\|x\|^3$ и $V_2=|\sigma|^3$ — соответственно функции Ляпунова для изолированных подсистем (5.2) и (5.3). Можно получить для V_1 и V_2 следующие оценки:

$$V_1^{\cdot}\leqslant -3\rho\|x\|^3,\quad V_2^{\cdot}<3rp_2|\sigma|^3$$

т. е. изолированные подсистемы имеют экспоненциально устойчивые нулевые решения. Полная производная в силу системы (5.1) имеет оценку

$$\begin{gathered}V^{\cdot}\leqslant -3c_1\rho\|x\|^3+3c_1\|x\|^2|\sigma|+12c_2\beta\|x\|\times\\ \times|\sigma|^2+3c_2rp_2|\sigma|^3=W(y);\\ \beta=\max|\beta_s|,\quad y=\mathrm{col}(\|x\|, |\sigma|)\end{gathered}$$

Форма $W(y)$ отрицательно определена в положительном ортанте $(y\geqslant 0)$ тогда и только тогда, когда система нелинейных уравнений

$$\begin{gathered}-3\rho c_1y_1^2+2c_1y_1y_2+4c_2\beta y_2^2=\lambda\\ c_1y_1^2+8c_2\beta y_1y_2+3c_2rp_2y_2^2=\lambda\end{gathered}$$

не имеет решений в рассматриваемом конусе $(y\geqslant 0)$ пространства R^2 для любых $\lambda>0$. Исходя из коэффициентных критериев знакоопределенности формы третьего порядка от двух переменных в первом ортанте, ранее приводившихся в п. 3, получим следующие оценки области допустимых значений:

$$81c_1\rho^2 (rp_2)^2 - 72c_1c_2\beta\rho rp_2 - 768c_2{}^2\beta^3\rho - 1728c_2{}^2\beta^3\rho^2 rp_2 + 6c_1 rp_2 + 72c_2\beta\rho rp_2 > 0$$

$$4c_1c_2\beta - 9c_1c_2\rho rp_2 + 12c_1c_2\rho\beta + 96c_2^2\beta^2\rho - 27c_1c_2\rho^2 rp_2 + 288c_2{}^2\beta^2\rho^2 - c_1 > 0) \quad (5.4)$$

Исследованием устойчивости системы (5.1) занимались многие авторы ([9—12] и др.) с использованием различных методов, что давало различные результаты. В последнее время для подобных исследований систем автоматического регулирования применяются скалярные функции, составленные из компонент соответствующей векторной функции Ляпунова. Таким образом были получены следующие оценки [9]:

$$\frac{(\max_s | c_1 + c_2\beta_s |)^2}{c_1 + c_2\rho r \mid p_2 \mid} < 1, \quad \frac{c_1 + c_2\beta}{c_1 c_2 \rho r \mid p_2 \mid} < 1$$

Предлагаемые оценки (5.4) дают новые области допустимых значений параметров системы (5.1), при которых она абсолютно устойчива в целом (сплошная линия на фигуре, где $\beta_s = 0$, $c_1 = c_2 = 1$), по сравнению с полученными ранее [9] (штриховая линия).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grujic L. T.* Stability analisis of large — scale systems with stable and unstable subsystems // Intern. J. Control. 1974. V. 20. № 3. P. 453—463.
2. *Житников С. А.* К вопросу о знакоопределенности и знакопостоянстве квадратичных форм в некотором конусе // Дифференц. уравнения и их приложения. Алма-Ата: Казахск. ун-та, 1979. С. 25—34.
3. *Рапопорт Л. Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе // ПММ. 1986. Т. 50, № 4. С. 674—679.
4. *Рапопорт Л. Б.* О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 5. С. 66—74.
5. *Степанов А. В.* О знакоопределенности форм третьего порядка в некотором конусе // Динамические системы. Киев: Вища шк., 1985. Вып. 4. С. 20—25.
6. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Условия знакоопределенности четных форм и устойчивость в целом нелинейных однородных систем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 339—347.
7. *Персидский С. К.* К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5—11.
8. *Искендер-Заде З. А.* Монотонная устойчивость движения в случае нейтральности линейного приближения // Докл. АН АзССР. 1966. Т. 22. № 3. С. 13—16.
9. *Житников С. А.* О некоторых достаточных условиях устойчивости одной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения и их приложения. Алма-Ата: Казахск. ун-та, 1980. С. 25—32.
10. *Лётов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962. 483 с.
11. *Пионтковский А. А., Рутковская Л. Д.* Исследование некоторых задач теории устойчивости с помощью векторной функции Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1967. № 10. С. 23—31.
12. *Земляков А. С.* О способах построения вектор-функции Ляпунова для нелинейных систем и получение некоторых оценок // Проблемы аналитической механики. теории устойчивости и управления. Казань: Казан. авиац. ин-т, 1976. Т. 2. С. 145—163.

Симферополь

Поступила в редакцию
9.III.1988