Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.36

Ф. Д. Байрамов, Т. К. Сиразетдинов

УСЛОВИЕ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ И УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Предлагается при исследовании устойчивости систем с распределенными параметрами, описываемых линейными уравнениями в частных производных, путем введения новых переменных исходные уравнения свести к системе уравнений первого порядка по времени и пространственным координатам. При этом функции Ляпунова строятся в виде однократных интегральных форм. Получены новые необходимые и достаточные условия знакоопределенности таких форм. Эти условия в отличие от известного критерия Сильвестра не требуют раскрытия определителей. Проверка знакоопределенности осуществляется последовательно по рекуррентным соотношениям и является обобщением результатов работы [1].

С использованием этих критериев получены достаточные условия устойчивости линейных систем с распределенными параметрами. Более подробно обсуждается задача построения функционалов для одномерного линейного гиперболического уравнения второго порядка. Как пример рассматривается устойчивость крутильных колебаний крыла летательного аппарата.

1. Рассмотрим систему линейных уравнений в частных производных первого порядка следующего вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\sum_{k=1}^{s}\left(A_k(\mathbf{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}+B_k(\mathbf{x})\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)+A_0(\mathbf{x})\varphi+B_0(\mathbf{x})\psi \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{s}\left(C_k(\mathbf{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}+D_k(\mathbf{x})\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)+C_0(\mathbf{x})\varphi+D_0(\mathbf{x})\psi=0 \tag{1.2}$$

где $t\in I=(0,\infty)$ — время, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_s)^T\in X\subset E^s$ — вектор пространственных координат, $\varphi=\varphi(\mathbf{x}, t)$ — n-мерный вектор фазовых функций, $\psi=\psi(\mathbf{x}, t)$ — m-мерный вектор фазовых функций, производная которого по времени в систему (1.1), (1.2) не входит, $A_k(\mathbf{x})$, $B_k(\mathbf{x})$, $C_k(\mathbf{x})$, $D_k(\mathbf{x})$ $(k=0, 1, \ldots, s)$ — матрицы, элементы которых — ограниченные измеримые функции.

Отметим, что любое линейное уравнение в частных производных произвольного порядка или система таких уравнений путем введения дополнительных переменных приводится к виду (1.1), (1.2).

Например, для преобразования скалярного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a_1(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+a_2(x)\frac{\partial y}{\partial x}+a_3(x)\frac{\partial y}{\partial t}+a_4(x)\,y \tag{1.3}$$

$$x\in(0, l),\quad a_1(x)\geqslant \text{const}>0$$

к виду (1.1), (1.2) за новые переменные примем функцию $y=y(x, t)$ и ее первые производные:

$$y=\varphi_1,\quad \partial y/\partial t=\varphi_2,\quad \partial y/\partial x=\varphi_3 \tag{1.4}$$

В этих переменных запишем исходное уравнение (1.3), к которому добавим условие интегрируемости [2] и соотношения, следующие из (1.4) при исключении y. Получим систему

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\varphi_2,\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=a_1\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+a_2\varphi_3+a_3\varphi_2+a_4\varphi_1,\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\varphi_3 \quad (1.5)$$

эквивалентную уравнению (1.3). Эту систему, вводя обозначения $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$

$$A_1=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&a_1\\0&1&0\end{Vmatrix},\quad A_0=\begin{Vmatrix}0&1&0\\a_4&a_3&a_2\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad C_1=(1,0,0),\quad C_0=(0,0,1) \quad (1.6)$$

можно записать в виде (1.1), (1.2), где $k=1$, $x_1=x$, $B_k=D_k=0$ $(k=0, 1, \ldots, s)$.

Чтобы линейное уравнение в частных производных высокого порядка свести к виду (1.1), (1.2), следует принять соответствующие низшие производные за дополнительные переменные, в этих переменных записать исходное уравнение и условия интегрируемости. Переменные ψ появляются, если порядки производных по t и x в исходном уравнении будут разные, причем число переменных может оказаться не равным числу уравнений в системе. Эти вопросы обсуждались более подробно [3, 4].

Составляющие начальных значений вектор-функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ принадлежат пространству $L_2(X)$, а граничные условия задаются на некоторой части S_0 границы S области X в виде

$$\alpha\varphi(\mathbf{x},t)=0,\quad \beta\psi(\mathbf{x},t)=0,\quad \mathbf{x}\in S_0\subset S \quad (1.7)$$

где α, β — матрицы, элементы которых ограниченные измеримые функции.

Решение системы (1.1), (1.2) рассматривается в классе функций из пространства

$$W_2^1(X\times I)=\{\varphi_i,\psi_i\,|\,\varphi_i\in L_2(X\times I),\quad \psi_i\in L_2(X\times I)\}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\in L_2(X\times I),\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\in L_2(X\times I),\quad \frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\in L_2(X\times I),\quad \{k=1,2,\ldots,s\}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, $i=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим устойчивость решения $\varphi\equiv\psi\equiv 0$ системы (1.1), (1.2), (1.7) по мере

$$\rho=\int_X \varphi^T(\mathbf{x},t)\,\varphi(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} \quad (1.8)$$

Функцию Ляпунова будем строить в виде интегральной квадратичной формы

$$V=\int_X \varphi^T(\mathbf{x},t)\,v(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} \quad (1.9)$$

где $v(\mathbf{x})$ — симметричная матрица, элементы которой ограниченные и почти всюду на X непрерывно дифференцируемые функции.

Найдем производную функции V в силу уравнения (1.1)

$$\frac{dV}{dt}=\int_X\Big[\sum_{k=1}^{s}\Big(\varphi^T vA_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+\frac{\partial\varphi^T}{\partial x_k}A_k^T v\varphi+\varphi^T vB_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+$$
$$+\frac{\partial\psi^T}{\partial x_k}B_k^T v\varphi\Big)+\varphi^T(vA_0+A_0^T v)\varphi+\varphi^T vB_0\psi+\psi^T B_0^T v\varphi\Big]\,d\mathbf{x} \quad (1.10)$$

Используя уравнение (1.2), к этому выражению прибавим равенство

$$\int_X\Big\{(\varphi^T\Gamma_1+\psi^T\Gamma_2)\Big[\sum_{k=1}^{s}\Big(C_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}+D_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\Big)+C_0\varphi+D_0\psi\Big]+$$
$$+\Big[\sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\partial\varphi^T}{\partial x_k}C_k^T+\frac{\partial\psi^T}{\partial x_k}D_k^T\Big)+\varphi^T C_0^T+\psi^T D_0^T\Big](\Gamma_1^T\varphi+\Gamma_2^T\psi)\Big\}\,d\mathbf{x}=0$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_1(\mathbf{x})$, $\Gamma_2 = \Gamma_2(\mathbf{x})$ — пока произвольные матрицы с элементами из пространства почти всюду на X непрерывно дифференцируемых функций. Выполняя интегрирование по частям, получим

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_X \Bigg\{ -\varphi^T\omega\varphi + \psi^T\Big[-\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial(\Gamma_2 D_k)}{\partial x_k} + \Gamma_2 D_0 + D_0^T\Gamma_2\Big]\psi +$$

$$+ \varphi^T\Big[-\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial(vB_k + \Gamma_1 D_k)}{\partial x_k} + vB_0 + \Gamma_1 D_0 + C_0^T\Gamma_2^T\Big]\psi +$$

$$+ \psi^T\Big[-\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial(B_k^T v + D_k^T\Gamma_1^T)}{\partial x_k} + B_0^T v + D_0^T\Gamma_1^T + \Gamma_2 C_0\Big]\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s}\Big[\frac{\partial\varphi^T}{\partial x_k}(A_k^T v + C_k^T\Gamma_1^T - vA_k - \Gamma_1 C_k)\varphi + \frac{\partial\psi^T}{\partial x_k}(D_k^T\Gamma_2^T - \Gamma_2 D_k)\psi +$$

$$+ \frac{\partial\varphi^T}{\partial x_k}(C_k^T\Gamma_2^T - vB_k - \Gamma_1 D_k)\psi + \psi^T\Big(\Gamma_2 C_k - B_k^T v - D_k^T\Gamma_1^T\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\Big]\Bigg\}d\mathbf{x} +$$

$$+ \int\limits_S \Big[\sum_{k=1}^{s}(\varphi^T(vA_k + \Gamma_1 C_k)\varphi + \psi^T\Gamma_2 D_k\psi + \varphi^T(vB_k + \Gamma_1 D_k)\psi +$$

$$+ \psi^T(B_k^T v + D_k^T\Gamma_1^T)\varphi)\cos(n, x_k)\Big]d\mathbf{x}$$

Здесь

$$\omega = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial(vA_k + \Gamma_1 C_k)}{\partial x_k} - vA_0 - A_0^T v - \Gamma_1 C_0 - C_0^T\Gamma_1^T, \quad x \mathrel{\dot\in} X \tag{1.11}$$

где n — внешняя нормаль к S, выражение $\mathbf{x} \mathrel{\dot\in} X$ означает выполнение равенства (1.11) почти всюду на X.

Пусть матрицы Γ_1, Γ_2 удовлетворяют уравнениям

$$vA_k + \Gamma_1 C_k = A_k^T v + C_k^T\Gamma_1^T, \quad \Gamma_2 D_k = D_k^T\Gamma_2^T, \quad C_k^T\Gamma_2^T = vB_k + \Gamma_1 D_k$$

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial(\Gamma_2 D_k)}{\partial x_k} - \Gamma_2 D_0 - D_0^T\Gamma_2^T = 0 \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial(vB_k + \Gamma_1 D_k)}{\partial x_k} - vB_0 - \Gamma_1 D_0 - C_0\Gamma_2^T = 0, \quad \mathbf{x} \mathrel{\dot\in} X, \quad k = 1, 2, \ldots, s$$

$$\sum_{k=1}^{s}[\varphi^T(vA_k + \Gamma_1 C_k)\varphi + \psi^T\Gamma_2 D_k\psi + \varphi^T(vB_k + \Gamma_1 D_k)\psi +$$

$$+ \psi^T(B_k^T v + D_k^T\Gamma_1^T)\varphi]\cos(n, x_k) = 0, \mathbf{x} \mathrel{\dot\in} S \tag{1.13}$$

Тогда для производной получим выражение

$$\frac{dV}{dt} = -\int\limits_X \varphi^T(\mathbf{x}, t)\,\omega(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x} \tag{1.14}$$

т. е. квадратичную форму того же вида, что и для V (1.9).

Согласно методу функций Ляпунова [5], решение $\varphi = \psi \equiv 0$ системы (1.1), (1.2), (1.7) будет асимптотически устойчивым по мере ρ (1.8), если функционал (1.9) непрерывен и определенно положителен по мере ρ, а его производная dV/dt (1.14) определенно отрицательна по этой мере. При исследовании на устойчивость условие определенной отрицательности производной dV/dt (1.14) заменяется условием ее неположительности.

Непрерывность функционала V (1.9) по мере ρ (1.8) непосредственно следует из ограниченности матрицы $v(\mathbf{x})$. Таким образом, задача исследования устойчивости сводится к проверке знакоопределенности интегральных квадратичных форм вида (1.9).

Полученные результаты позволяют также ставить и решать задачу построения функционала V (1.9) по заданной симметричной матрице $\omega(\mathbf{x})$. Для этого следует решить уравнения (1.11), (1.12) относительно матриц $v(\mathbf{x})$, $\Gamma_1(\mathbf{x})$, $\Gamma_2(\mathbf{x})$ при граничных условиях, вытекающих из (1.13), (1.7). Однако в отличие от задачи построения квадратичных форм для обыкновенных дифференциальных уравнений здесь не всегда все элементы матрицы $\omega(\mathbf{x})$ могут быть заданы произвольно. Эта задача более подробно обсуждается в п. 4 для одномерного гиперболического уравнения второго порядка.

2. Рассмотрим условия знакоопределенности. Сначала получим необходимые и достаточные условия знакоопределенности интегральной квадратичной формы вида

$$F = \int_X \varphi^T(\mathbf{x}) f^T(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{2.1}$$

по мере ρ (1.8). Здесь $\varphi(\mathbf{x})$ — n-мерная вектор-функция с произвольными компонентами $\varphi_i(\mathbf{x}) \in L_2(X)$, а $f(\mathbf{x}) = \| f_{ij}(\mathbf{x}) \|$ — квадратичная треугольная матрица, элементы которой ограниченные измеримые функции, а под главной диагональю ее элементы почти всюду на X равны нулю, т. е. $f_{ij}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in^{\cdot} X$ $(j < i,\ j = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Теорема 1. Для определенной положительности интегральной квадратичной формы F (2.1) по мере ρ (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$|f_{ii}(\mathbf{x})| > 0, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} X \tag{2.2}$$

т. е. чтобы для любого множества $\tau \subset X$ конечной меры существовало положительное число ε, такое, что

$$\int_\tau |f_{ii}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \geqslant \varepsilon > 0 \tag{2.3}$$

Доказательство. Необходимость. Допустим, что форма F (2.1) определенно положительная по ρ (1.8) форма, т. е. если $\rho \geqslant \varepsilon > 0$, то найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $F \geqslant \delta(\varepsilon)$. Далее, пусть для всех значений индекса i, меньших s, где $s \in [1, 2, \ldots, n]$ — какой-нибудь фиксированный индекс, выполняются неравенства $|f_{ii}(\mathbf{x})| > 0$, $\mathbf{x} \in^{\cdot} X$, а при $i = s$ существует множество $\tau \subset X$ конечной меры, где $f_{ss}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in^{\cdot} \tau$. Поведение $f_{ss}(\mathbf{x})$ на множестве $X \setminus \tau$ и других элементов f_{ij} (x на X несущественно.

Воспользуясь произвольностью выбора функции $\varphi(\mathbf{x})$, назначим их так, чтобы

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} X \quad (i = s+1, s+2, \ldots, n); \quad \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} X \setminus \tau$$
$$(i = 1, 2, \ldots, s)$$

$$\sum_{i=j}^{s} f_{ij}(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} \tau \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$$

$$|\varphi_s(\mathbf{x})| \geqslant \varepsilon_1 > 0, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} \tau_1 \subset \tau \subset X; \quad |\varphi_s(\mathbf{x})| \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} \tau \setminus \tau_1$$

Тогда

$$\rho = \int_\tau \sum_{i=1}^{s} \varphi_i^2 d\mathbf{x} \geqslant \int_{\tau_1} \varphi_s^2 d\mathbf{x} \geqslant \varepsilon_1 |\tau_1| = \varepsilon > 0$$

где $|\tau_1|$ — мера множества τ_1. Но в силу условий, наложенных на f_{ss} и φ_i, получим

$$F = \int_\tau (f_{ss}\varphi_s)^2 \, d\mathbf{x} = 0$$

что противоречит определенной положительности формы F (2.1) по мере ρ (1.8), т. е. при $\rho \geqslant \varepsilon > 0$ не существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, чтобы было $F \geqslant \delta(\varepsilon)$. Следовательно, условие $|f_{ss}(\mathbf{x})| > 0$, $\mathbf{x} \in^{\cdot} X$ необходимое. Повторяя эти рассуждения для всех $s = 1, 2, \ldots, n$, докажем необходимость условий (2.2).

Достаточность. Пусть выполняются условия (2.2). Убедимся, что форма F (2.1) определенно-положительная по мере ρ (1.8), т. е., если $\rho \geqslant \varepsilon > 0$, то существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $F \geqslant \delta(\varepsilon)$.

Итак, пусть условие (2.2) выполняется и $\rho \geqslant \varepsilon > 0$. Но, если $\rho \geqslant \varepsilon > 0$, то хотя бы для одного значения индекса i, например, $i = s$ выполняется условие $|\varphi_s(\mathbf{x})| \geqslant \gamma_s(\varepsilon) > 0$ по крайней мере на некотором множестве $\tau_s \subset X$ конечной меры. Так как, если не существует такое множество, т. е. если $|\tau_s| \to 0$, где $|\tau_s|$ — мера множества τ_s, то $\rho \to 0$ в силу $\varphi_s \in L_2(X)$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега [6], что противоречит неравенству $\rho \geqslant \varepsilon > 0$.

Теперь убедимся, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $F \geqslant \delta(\varepsilon)$. Сначала допустим, что $|\varphi_n(\mathbf{x})| \geqslant \gamma_n > 0$ на $\tau_n \subset X$, т. е. $s = n$. Тогда

$$F \geqslant \int_{\tau_n} (f_{nn}\varphi_n)^2 \, d\mathbf{x} \geqslant \gamma_n^2 \int_{\tau_n} f_{nn}^2 d\mathbf{x} \geqslant \gamma_n^2 \varepsilon_1 = \delta_n > 0$$

Если же $\varphi_n(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in^{\cdot} X$, но $|\varphi_{n-1}(\mathbf{x})| \geqslant \gamma_{n-1} > 0$ на $\tau_{n-1} \subset X$, то снова получим

$$F \geqslant \int_{\tau_{n-1}} (f_{n-1,\, n-1}\varphi_{n-1})^2 \, d\mathbf{x} \geqslant \delta_{n-1} > 0$$

Продолжая далее эти рассуждения шаг за шагом для $s = n - 2, n - 3, \ldots, 1$, убедимся, что если $\rho \geqslant \varepsilon > 0$, то $F \geqslant \delta(\varepsilon) > 0$, где $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, т. е. F — определенно-положительная форма. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь интегральную квадратичную форму

$$V = \int_X \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ — n-мерная вектор-функция с произвольными компонентами $\varphi_i \in L_2(X)$, $v(\mathbf{x}) = \| v_{ij}(\mathbf{x}) \|$ — симметричная матрица, элементы которой — ограниченные измеримые функции. Обозначим

$$v_x = \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

Теорема 2. Для определенной положительности интегральной квадратичной формы V (2.4) по мере ρ (1.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$v_{ii}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ji}^2(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} X \tag{2.6}$$

где функции $b_{ji}(\mathbf{x})$ ($j \leqslant i$, $j = 1, 2, \ldots, n$) вычисляются по рекуррентным формулам

$$b_{ii}(\mathbf{x}) = \pm \left[v_{ii}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}^2(\mathbf{x}) \right]^{1/2}, \quad \mathbf{x} \in^{\cdot} X \tag{2.7}$$

$$b_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{b_{ii}(\mathbf{x})}\left[v_{ij}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}(\mathbf{x})\, b_{kj}(\mathbf{x})\right], \mathbf{x} \in^{\boldsymbol{\cdot}} X \quad (j = i+1, i+2, \ldots, n)$$

$$b_{ij}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in^{\boldsymbol{\cdot}} X \quad (i > j, j = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.8}$$

Доказательство. Необходимость. Допустим, что форма (2.4) определенно положительна по мере ρ (1.8). Тогда для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $V > \delta(\varepsilon)$, если $\rho > \varepsilon$. Сначала убедимся, что при этом квадратичная форма (2.5) определенно положительна при $\mathbf{x} \in^{\boldsymbol{\cdot}} X$, т. е. $v_x > 0$ при $\varphi^T\varphi > 0$ почти всюду на X.

Предположим противное, т. е. $v_x \leqslant 0$ хотя бы на некотором множестве $\tau \subset X$ конечной меры $|\tau|$. В силу произвольности функций $\varphi(\mathbf{x})$, а следовательно, и $\varphi^T\varphi$ положим $\varphi^T\varphi > 0$ на $\tau \subset X$ и $\varphi^T\varphi = 0$ на $X \setminus \tau$ при выполнении условия $\rho \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда $V = \int\limits_\tau v_x d\mathbf{x} \leqslant 0$, что противоречит определенной положительности V (2.4) по ρ (1.8). Отсюда следует, что форма v_x (2.5) также определенно положительна почти всюду на X.

Определенно-положительная форма v_x (2.5) при фиксированном $\mathbf{x} \subset^{\boldsymbol{\cdot}} X$ допускает представление

$$v_x = \varphi^T(\mathbf{x})\, B^T(\mathbf{x})\, B(\mathbf{x})\, \varphi(x) \tag{2.9}$$

где $B(\mathbf{x}) = \| b_{ij}(\mathbf{x}) \|$ — треугольная матрица, элементы под главной диагональю которой равны нулю. При этом имеют место неравенства

$$|b_{ii}(\mathbf{x})| > 0, \quad \mathbf{x} \in^{\boldsymbol{\cdot}} X \tag{2.10}$$

В самом деле, если $b_{ii}(\mathbf{x}) = 0$ на множестве $\tau \subset X$ конечной меры, то в силу теоремы 1 форма V (2.4), где подынтегральная функция представлена в виде (2.9), не может быть определенно-положительной по мере ρ (1.8). Это противоречит исходному предположению. Следовательно, неравенства (2.10) выполняются.

Теперь, сопоставляя (2.5) и (2.9), получим $v(\mathbf{x}) = B^T(\mathbf{x})B(\mathbf{x})$, или в скалярном виде

$$v_{ii}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{i} b_{ki}^2(\mathbf{x}), \quad v_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{i} b_{ki}(\mathbf{x})\, b_{kj}(\mathbf{x}) \quad (j = i+1, i+2, \ldots, n) \tag{2.11}$$

Разрешая систему (2.11) при различных значениях индексов i и j, начиная с $i = 1$, $j = 1$, получим формулы (2.7) и (2.8). Подставляя (2.7) в (2.10), убедимся, что неравенства (2.6) выполняются. Необходимость условий (2.6) доказана.

Достаточность. Пусть неравенства (2.6), где функции $b_{ij}(\mathbf{x})$ вычисляются по формулам (2.7), (2.8) выполняются. Тогда заданная квадратичная форма V (2.4) представляется в виде

$$V = \int\limits_X \varphi^T(\mathbf{x})\, B^T(\mathbf{x})\, B(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

и в соответствии с (2.6), (2.7) удовлетворяет условиям (2.10). Следовательно, согласно теореме 2 форма V (2.4) определенно положительна по мере ρ (2.2). Теорема доказана.

Отметим, что при доказательстве необходимости условий теорем 1 и 2 существенно использовалась произвольность функций φ_i. Если же последние не все являются независимыми, то (2.3) и (2.6) будут только достаточными условиями определенной положительности интегральных форм (2.1) и (2.4) соответственно, так как при доказательстве достаточности произвольность функций φ_i не используется.

Например, функционал $V = \int (\varphi_1^2 - a\varphi_2^2)\,dx$ (здесь и далее интегрирование по x ведется в пределах от нуля до единицы), где $a = \mathrm{const} > 0$, $\varphi_1 = \partial\varphi_2/\partial x$, $\varphi_2(0, t) = 0$, в силу неравенства [5] $\int \varphi_2^2 dx < {}^1/_2 \int \varphi_1^2 dx$ допускает оценку

$$V = \int (\beta\varphi_1^2 + (1-\beta)\,\varphi_1^2 - a\varphi_2^2)\,dx \geqslant \int (\beta\varphi_1^2 + (2\,(1-\beta) - a)\,\varphi_2^2)\,dx$$

где β — число, удовлетворяющее условию $0 < \beta < 1$. Число β выберем так, чтобы выполнялось соотношение $\beta = 2\,(1-\beta) - a$. Отсюда получим $\beta = {}^1/_3\,(2 - a)$. Условие $0 < \beta < 1$ выполняется, если $a < 2$. При этом

$$V \geqslant {}^1/_3\,(2-a) \int (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,dx$$

Таким образом, функционал V определенно положителен по мере $\rho = \int (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)dx$, если $a < 2$, хотя форма $\varphi_1^2 - a\varphi_2^2$ и не является определенно-положительной по φ_1 и φ_2.

3. Применяя доказанные условия знакоопределенности интегральных квадратичных форм, получим достаточные условия асимптотической устойчивости решения $\varphi = \psi \equiv 0$ системы (1.1), (1.2), (1.7) по мере ρ (1.8).

Теорема 3. Пусть существуют матрицы $v(\mathbf{x})$, $\Gamma_1(\mathbf{x})$, $\Gamma_2(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям (1.12), (1.13), и выполняются неравенства (2.6) и

$$\omega_{ii}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{i-1} d_{ji}^2(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in X \tag{3.1}$$

где $\omega_{ii}(\mathbf{x})$ — элементы матрицы $\omega(\mathbf{x})$ (1.11), а функции $d_{ji}(\mathbf{x})$ ($j \leqslant i$, $j = 1, 2, \ldots, n$) вычисляются по рекуррентным формулам, аналогичным (2.7), (2.8) при замене v_{ij} на ω_{ij}. Тогда решение $\varphi = \psi \equiv 0$ системы (1.1), (1.2), (1.7) асимптотически устойчиво по мере ρ (1.8).

Доказательство теоремы следует из того, что согласно теореме 2 здесь форма V (1.9) определенно положительна, а производная dV/dt (1.14) в силу уравнений процесса (1.1), (1.2), (1.7) определенно отрицательна по мере ρ (1.8).

Аналогичные условия асимптотической устойчивости решения $\varphi = \psi \equiv 0$ по мере ρ (1.8) могут быть сформулированы и при помощи интегральной квадратичной формы (2.1). В этом случае в теореме 3 неравенства (2.6) заменяются на более простые неравенства (2.2), а матрица $v(\mathbf{x})$ в выражениях (1.11)—(1.13) — на матрицу $f^T(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$, где $f(\mathbf{x})$ — матрица, фигурирующая в (2.1).

4. Рассмотрим задачу построения функционала V (1.9) для уравнения (1.3) с линейными однородными граничными условиями, например вида

$$b_1 y + b_2 \partial y/\partial x + b_3 \partial y/\partial t = 0; \quad x = 0; \quad l, t \geqslant 0 \tag{4.1}$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0$$

где b_1, b_2, b_3 — постоянные. Вводя новые переменные, уравнения (1.3), (4.1) заменим эквивалентной системой (1.5) и

$$b_1\varphi_1 + b_2\varphi_3 + b_3\varphi_2 = 0; \quad x = 0; \quad l, t \geqslant 0 \tag{4.2}$$

В данном случае матрицы B_k, D_k, Γ_2 в уравнениях (1.12) равны нулю. Поэтому остается только первое из этих уравнений, которое вместе с (1.11), где $k = 1$ и $x_1 = x$, запишем в скалярной форме. Получим следующую систему конечных и обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\gamma_{21} = v_{13}, \ \gamma_{31} = a_1 v_{12}, \ a_1 v_{22} = v_{33} \tag{4.3}$$

$$d\gamma_{11}/dx - 2a_4 v_{12} = \omega_{11}, \quad d\,(a_1 v_{23})/dx + 2a_1 v_{12} - 2a_2 v_{23} = \omega_{33}$$

$$d(a_1v_{12})/dx - a_2v_{12} - a_4v_{23} + \gamma_{11} = \omega_{13}, \quad d(a_1v_{22})/dx - a_2v_{22} - a_3v_{23} = \omega_{23}, \quad (4.4)$$
$$dv_{13}/dx - v_{11} - a_3v_{12} - a_4v_{22} = \omega_{12}, \quad dv_{23}/dx - 2v_{12} - 2a_3v_{22} = \omega_{22}$$

где $v_{ij} = v_{ij}(x)$, $\gamma_{i1} = \gamma_{i1}(x)$, $\omega_{ij} = \omega_{ij}(x)$ — элементы матриц $v(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\omega(x)$ соответственно.

Условие (1.13) запишется в виде

$$\varphi^T(l, t)[v(l)A_1(l) + \Gamma_1(l)C_1(l)]\varphi(l, t) - \varphi^T(0, t)[v(0)A_1(0) + \\ + \Gamma_1(0)C_1(0)]\varphi(0, t) = 0 \qquad (4.5)$$

Для построения функционала V следует решить систему (4.4) относительно γ_{11}, v_{ij} при граничных условиях, вытекающих из (4.5) с учетом условий (4.2) и соотношений (4.3), задавшись значениями функций ω_{ij}. Однако, как видно из уравнений (4.4), функции ω_{22} и ω_{33} не всегда могут быть заданы независимо одна от другой, так как второе и четвертое уравнения (4.4) и будут совместны только тогда, когда ω_{22} и ω_{33} удовлетворяют соотношению

$$\omega_{22} = (\omega_{33} - ((da_1/dx) - 2a_2)v_{23} - 4a_1v_{12} - 2a_1a_3v_{22})/a_1 \qquad (4.6)$$

Вместе с тем во многих случаях ω_{22} из уравнения (4.6) определяется с точностью до произвольной постоянной, что позволяет варьировать ее значение.

Заметим, что функции v_{11} и v_{13} входят только в предпоследнее уравнение (4.4). Чтобы определить эти функции по отдельности, одна из них считается произвольной, но удовлетворяющей соответствующим граничным условиям, если таковые имеются для выбираемой функции.

Таким образом, задача построения функционала V решается в следующей последовательности:

1) задаемся значениями ω_{11}, ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}, ω_{33};

2) решая первые четыре уравнения (4.4) при граничных условиях, вытекающих из (4.5), (4.2), (4.3), определяем γ_{11}, v_{12}, v_{23}, v_{22};

3) находим v_{33}, как это следует из соотношений (4.3), по формуле $v_{33} = a_1v_{22}$;

4) из пятого уравнения (4.4) определяем функции v_{11} или v_{13}, выбирая одну из них произвольно;

5) по уравнению (4.6) вычисляем ω_{22}.

Функционал V (1.9) и его производная dV/dt (1.14) в силу системы (1.5), (4.2) полностью определяются.

Пример. Рассмотрим устойчивость крутильных колебаний крыла летательного аппарата, которые описываются уравнениями

$$Il^2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(R\frac{\partial y}{\partial x}\right) - hl^2\frac{\partial y}{\partial t} - Ml^2y, \quad x \in (0, 1) \qquad (4.7)$$
$$y(0, t) = \partial y/\partial x\,|_{x=1} = 0$$

где l — полуразмах крыла, x — координата, нормированная на l, $y = y(x, t)$ — угол закручивания сечения с координатой x; $I = I(x)$, $R = R(x)$, $h = h(x)$ — погонный момент инерции, крутильная жесткость, коэффициент демпфирования в этом сечении соответственно; слагаемое $M(x)l^2y$ представляет собой погонный момент аэродинамических сил.

Уравнения (4.7) запишем в виде системы (1.5), где

$$a_1 = R/(Il^2), \; a_2 = (dR/dx)/(Il^2), \; a_3 = -h/I, \; a_4 = -M/I \qquad (4.8)$$

и

$$\varphi_1(0, t) = \varphi_3(1, t) = 0 \qquad (4.9)$$

Из (4.9) следует

$$\partial\varphi_1(0, t)/\partial t = \varphi_2(0, t) = 0 \qquad (4.10)$$

С учетом (4.9), (4.10), (4.3) из (4.5) получим

$$\gamma_{11}(1) = v_{23}(0) = v_{23}(1) = v_{13}(1) = 0 \qquad (4.11)$$

Построим функционал V. Положим $\omega_{12} = \omega_{13} = \omega_{23} = 0$, $\omega_{11} = -2a_4v_{12}$, $\omega_{33} = 2a_1v_{12}$. Решая систему первых четырех уравнений (4.4) при граничных условиях (4.11), с учетом значений $a_1, \ldots, a_4$ (4.8) получим

$$\gamma_{11} = 0, \; v_{12} = c_1Il^2, \; v_{23} = 0, \; v_{22} = c_2Il^2, \; v_{33} = a_1v_{22} = c_2R$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Следовательно, $\omega_{11} = 2c_1Ml^2$, $\omega_{23} = 2c_1R$. Полагая $v_{13} = 0$, из пятого уравнения (4.4) найдем $v_{11} = -a_3v_{12} - a_4, v_{22} = (c_1h + c_2M)l^2$.

Из уравнения (4.6) следует $\omega_{22} = 2(c_2h - c_1I)l^2$.

Пусть $c_1 = 1$. Тогда функционал V (1.9) и его производная dV/dt (1.14) в силу системы (1.5), (4.8), (4.9) запишутся в виде (интегрирование по x всюду далее ведется в пределах от нуля до единицы)

$$V = \int [(h + c_2M) l^2\varphi_1^2 + 2Il^2\varphi_1\varphi_2 + c_2Il^2\varphi_2^2 + c_2R\varphi_3^2]\, dx \tag{4.12}$$

$$dV/dt = -2\int [Ml^2\varphi_1^2 + (c_2h - I) l^2\varphi_2^2 + R\varphi_3^2]\, dx \tag{4.13}$$

Используя неравенство [1] $\int \varphi_1^2 dx \leqslant {}^1/_2 \int \varphi_3^2 lx$, получим оценки

$$V \geqslant \int \{[(h + c_2M) l^2 + 2c_2 (1 - \theta_1) \min R]\, \varphi_1^2 + c_2Il^2\varphi_2^2 + 2Il^2\varphi_1\varphi_2 + c_2\theta_1 \min R\varphi_3^2\}\, dx \tag{4.14}$$

$$dV/dt \leqslant -2\int\{ [Ml^2 + 2(1 - \theta_2) \min R]\varphi_1^2 + (c_2h - I)l^2\varphi_2^2 + \theta_2 \min R\varphi_3^2\}\, dx \tag{4.15}$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, операция min берется по всем $x \in [0, 1]$.

Из неравенства (4.15), (3.1) следует, что форма dV/dt (4.13) определенно отрицательна по мере

$$\rho = \int (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)\, dx \tag{4.16}$$

если

$$2 \min R + \min Ml^2 > 0, \quad c_2 > \max I/\min h \tag{4.17}$$

А условия определенной положительности функционала V (4.12) по этой мере согласно критериям (2.6) запишутся в виде неравенств

$$c_2 > 0, \; c_2 (2 \min R + \min Ml^2) + \min hl^2 > 0$$
$$c_2 [c_2 (2 \min R + \min Ml^2) + \min hl^2] > \max Il^2 \tag{4.18}$$

Справедливость первых двух неравенств (4.18) непосредственно следует из неравенств (4.17), а последнее получается из (4.17) после его представления в виде

$$c_2^2 (2 \min R + \min Ml^2) \geqslant l^2 (\max I - c_2 \min h)$$

Здесь в силу условий (4.17) левая часть положительна, а правая отрицательна.

Таким образом, решение $\varphi \equiv 0$ системы (1.5), (4.8), (4.9) будет асимптотически устойчивым по мере ρ (4.16), если выполняется первое неравенство (4.17). Второе неравенство (4.17) не является условием устойчивости. Оно представляет условие, согласно которому должна выбираться постоянная c_2, чтобы V (4.12) и dV/dt (4.13) были знакоопределенными по мере ρ (4.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиразетдинов Т. К., Аминов А. Б.* К задаче построения функций Ляпунова при исследовании устойчивости в целом решения систем с полиноминальной правой частью // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск: Наука, 1984. С. 72—87.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.
3. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
4. *Арман Ж.-Л. П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977. 142 с.
5. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

Казань

Поступила в редакцию
24.X.1988