Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.36 : 534

М. Б. Эпендиев

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуются колебания в слабонелинейных системах с медленно меняющимися параметрами. Для периодически меняющихся параметров производится спектральный анализ установившихся колебаний с целью получения достаточно простых в аналитическом плане результатов. Особое внимание уделяется случаям, когда какие-либо собственные частоты меняются в пределах много больших частоты изменения параметров.

Известные основные методы анализа подобных задач [1—3] недостаточно эффективны для поставленной цели, особенно если параметры меняются в широких пределах. Ниже предлагается несколько иная схема анализа системы дифференциальных уравнений. Матрицант (функция Грина) линейной задачи представляется в такой форме, которая обеспечивает более быструю, чем в методе ВКБ и [1, 2], сходимость процедуры асимптотического расчета искомых величин. Уже в первом приближении результаты отличаются от [1, 2] и тем существеннее, чем больше пределы изменения параметров. Нелинейные силы учитываются последовательным приближением при частичной линеаризации на каждом этапе. Медленно меняющиеся коэффициенты линеаризованной части корректируют параметры линейного оператора и являются функционалами соответствующего приближенного решения. В ряде случаев эту функциональную задачу можно свести к обыкновенным уравнением относительно нескольких неизвестных. Детальнее в этом плане исследуется одномерная колебательная система с периодически меняющейся жесткостью и кубичной нелинейностью, находящаяся под одночастотным силовым воздействием.

1. Линейное приближение. Рассматривается уравнение

$$L_{kn}x_n(t) = F_k(t), \quad x_k(0) = x_k^{\cdot}(0) = 0 \tag{1.1}$$

$$L_{kn} = \delta_{kn}\frac{d}{dt}m_k\frac{d}{dt} + \sqrt{m_k m_n}\left(2R_{kn}\frac{d}{dt} + U_{kn}\right)$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad k, n = 1, 2, \ldots, N, \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам, пробегающим значения от 1 до N, подразумевается суммирование. Матрицы R и U положительно определенные и симметричные (хотя для существа метода это не обязательно), а функции $R_{nk}(t)$, $U_{nk}(t)$, $m_k(t) \geqslant m_0 > 0$, далее часто обозначаемые через $C(t)$, дифференцируемы достаточное число раз (т. е. все используемые ниже производные от этих функций ограничены). Функции $F_k(t)$ ограничены. Чтобы уменьшить число индексов, положим $F_k = \delta_{k1}F_1$ и будем искать обратные операторы L_{k1}^{-1}.

Пусть $\lambda_\alpha(t)$ и $\Psi_k^\alpha(t)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ — собственные значения и собственные векторы матрицы U, причем $\lambda_\alpha \geqslant \lambda_0 > 0$, $|\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \geqslant \lambda_0$ для всех $\alpha \neq \beta$. Векторы Ψ_k^α определим при помощи алгебраических дополнений матриц $(U - \lambda_\alpha)$:

$$P_k^\alpha = \left.\frac{\partial U(\lambda)}{\partial U_{k1}}\right|_{\lambda=\lambda_\alpha}, \quad P_{kn}^\alpha = \left.\frac{\partial^2 U(\lambda)}{\partial U_{kn}\partial U_{11}}\right|_{\lambda=\lambda_\alpha}, \quad U(\lambda) = \det(U - \lambda)$$

Будем считать $|P_1^\alpha(t)| \geqslant P_0 > 0$. Положим

$$\Psi_k^\alpha = P_k^\alpha \Psi_\alpha / P_1^\alpha, \quad \Psi_\alpha = \left[P_1^\alpha \Big/ \left(\prod_{\beta\neq\alpha}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)\right)\right]^{1/2}$$

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$x_k = L_{k1}^{-1} F_1 = \sum_{1\leqslant\alpha\leqslant N} (m_k\omega_\alpha)^{-1/2} \left\{\int_0^t dt' \left[A_k^\alpha(t) \sin\left(\int_{t'}^t \omega_\alpha\, dt\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_k^\alpha(t)\cos\left(\int_{t'}^t \omega_\alpha\, dt\right)\right] \exp\left(-\int_{t'}^t \gamma_\alpha\, dt\right) \frac{W_\alpha(t') F_1(t')}{[m_1(t')\,\omega_\alpha(t')]^{1/2}}\right\} \tag{1.2}$$

где A_k^α, B_k^α, W_α, ω_α, λ_α — совокупность $2N^2 + 3N$ неизвестных функций, обозначаемых далее $Y(t)$. Подставляя (1.2) в (1.1), получим $2N^2 + 2N$ уравнений

$$\sum_\alpha W_\alpha \left[A_k^\alpha + \partial_\alpha \frac{B_k^\alpha}{\omega_\alpha}\right] = \delta_{k1}, \quad \sum_\alpha \frac{W_\alpha B_k^\alpha}{\omega_\alpha} = 0 \tag{1.3}$$

$$U_{kn} A_n^\alpha = \omega_\alpha^2 A_k^\alpha + \Delta_k^\alpha(A, B), \quad U_{kn} B_n^\alpha = \omega_\alpha^2 B_k^\alpha + \Delta_k^\alpha(B, -A) \tag{1.4}$$

$$\Delta_k^\alpha(A, B) = -S_{kn}^\alpha A_n^\alpha + \omega_\alpha \nabla_{kn}^\alpha B_n^\alpha$$

Здесь введены операторы

$$\partial_\alpha = d/dt - \gamma_\alpha, \quad \nabla_{kn}^\alpha = 2(\delta_{kn}\partial_\alpha + R_{kn})$$

$$S_{kn}^\alpha = \delta_{kn}\left[\omega_\alpha^{1/2}\partial_\alpha^2 \omega_\alpha^{-1/2} + {}^1/_2 m_k^{\cdot\cdot}/m_k - ({}^1/_2 m_k^{\cdot}/m_k)^2\right] +$$

$$+ 2R_{kn}\omega_\alpha^{1/2}(\partial_\alpha - {}^1/_2 m_k^{\cdot}/m_k)\,\omega_\alpha^{-1/2}$$

Выберем еще N уравнений так, чтобы $Y(t)$ зависели от времени лишь через параметры, т. е. $Y(t) = Y(C, C^{\cdot}, \ldots)$. Для этого учтем, что из (1.4) следует

$$E_\alpha^{\cdot} = 2\gamma_\alpha E_\alpha - 2(R_{kn} A_k^\alpha A_n^\alpha + \rho_\alpha)$$

$$E_\alpha = A_n^\alpha A_n^\alpha + B_n^\alpha B_n^\alpha + \xi_{nn}^\alpha, \quad \xi_{nn}^\alpha = \frac{1}{\omega_\alpha}\left(A_k^\alpha \frac{dB_n^\alpha}{dt} - B_n^\alpha \frac{dA_k^\alpha}{dt}\right) \tag{1.5}$$

$$\rho_\alpha = R_{kn}[B_k^\alpha B_n^\alpha + \xi_{kn}^\alpha + m_n^{\cdot}(A_k^\alpha B_n^\alpha - A_n^\alpha B_k^\alpha)/2m_n]$$

Из (1.5) видно, что удовлетворить требованию неявной зависимости от времени во всем классе допустимых функций, в том числе и квазистационарных, можно лишь при условии $E_\alpha = \text{const} > 0$. Выбор E_α в (1.2) несуществен. Полагая $E_\alpha = 1$, получим еще N уравнений

$$\gamma_\alpha = R_{kn} A_k^\alpha A_n^\alpha + \rho_\alpha \tag{1.6}$$

Медленность изменения параметров и малость диссипативных членов определим путем введения малых параметров ε_1, ε_2: $C \to C(\varepsilon_1 t)$, $R \to \varepsilon_2 R$, $0 \leqslant \varepsilon_i < \varepsilon_0$, $i = 1, 2$. Уравнения (1.3), (1.4), (1.6) при помощи алгебраических преобразований представим в следующей форме:

$$\omega_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} + \delta(\omega_\alpha), \quad \delta(\omega_\alpha) = -\Psi_k^\alpha \Delta_k^\alpha(A, B)/((\omega_\alpha + \sqrt{\lambda_\alpha})\Psi_n^\alpha A_n^\alpha) \tag{1.7}$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^\circ + \delta(\gamma_\alpha), \quad \gamma_\alpha^\circ = R_{kn}\Psi_k^\alpha \Psi_n^\alpha \tag{1.8}$$

$$\delta(\gamma_\alpha) = \rho_\alpha + R_{nk}[2\Psi_n^\alpha a_k^\alpha \sqrt{1 - \varkappa_\alpha} - \Psi_n^\alpha \Psi_k^\alpha \varkappa_\alpha + a_n^\alpha a_k^\alpha]$$

$$A_k^\alpha = \Psi_k^\alpha + \delta(A_k^\alpha), \quad \delta(A_k^\alpha) = a_k^\alpha + \Psi_k^\alpha(\sqrt{1 - \varkappa_\alpha} - 1) \tag{1.9}$$

$$W_\alpha = \Psi_\alpha + \delta(W_\alpha), \quad \delta(W_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa_\alpha}}\left(\frac{\varkappa_\alpha \Psi_\alpha}{1 + \sqrt{1 - \varkappa_\alpha}} - \sigma_k \Psi_k^\alpha\right) \tag{1.10}$$

$$B_k^{\alpha} = \sqrt{\lambda_\alpha}\left[\frac{\Psi_k^{\alpha}}{\Psi_\alpha}\sum_\beta \Psi_\beta g_n^{\alpha\beta}\Psi_n^{\beta} - \right.$$

$$\left. - 2G_{kn}^{\alpha}\left(\left(\frac{d}{dt} - \gamma_\alpha^{\circ}\right)\Psi_n^{\alpha} + R_{nj}\Psi_j^{\alpha}\right)\right] + \delta(B_k^{\alpha}) \qquad (.11)$$

$$\delta(B_k^{\alpha}) = \frac{\Psi_k^{\alpha}}{W_\alpha}\sum_\beta\left\{\omega_\alpha W_\beta g_n^{\alpha\beta}\delta(A_n^{\beta}) - \frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta}\Psi_n^{\alpha}b_n^{\beta}W_\beta + \right.$$

$$\left. + \left[\sqrt{\lambda_\alpha}\left(\delta(W_\beta) - \frac{\Psi_\beta}{\Psi_\alpha}\delta(W_\alpha)\right) + W_\beta\delta(\omega_\alpha)\right]g_n^{\alpha\beta}A_n^{\beta}\right\} +$$

$$+ b_k^{\alpha} - G_{kn}^{\alpha}[\delta(\omega_\alpha)\nabla_{nj}^{\alpha}A_j^{\alpha} + \omega_\alpha\nabla_{nj}^{\alpha}\delta(A_j^{\alpha}) - 2\delta(\gamma_\alpha)\Psi_n^{\alpha}]$$

$$a_k^{\alpha} = G_{kn}^{\alpha}[(\omega_\alpha^2 - \lambda_\alpha)A_n^{\alpha} + \Delta_n^{\alpha}(A, B)], \quad G_{kn}^{\alpha} = P_{kn}^{\alpha}/P_1^{\alpha}$$

$$b_k^{\alpha} = G_{kn}^{\alpha}[(\omega_\alpha^2 - \lambda_\alpha)B_n^{\alpha} - S_{nj}^{\alpha}B_j^{\alpha}], \quad \sigma_k = \sum_\alpha W_\alpha\left(\partial_\alpha\frac{B_k^{\alpha}}{\omega_\alpha} - a_k^{\alpha}\right)$$

$$\varkappa_\alpha = B_n^{\alpha}B_n^{\alpha} + \xi_{nn}^{\alpha} + a_n^{\alpha}(2\Psi_n^{\alpha}A_1^{\alpha}/\Psi_\alpha + a_n^{\alpha})$$

где оператор $g_n^{\alpha\beta} = \Psi_k^{\alpha}G_k^{\alpha}{}_j\nabla_{jn}^{\beta}$. Отметим, что $a_1^{\alpha} = b_1^{\alpha} = 0$. Можно убедиться в следующих порядковых соотношениях: $(A, W, \omega) \sim 1$, $(B, \gamma) \sim \varepsilon$; $(\delta(A), \delta(W), \delta(\omega)) \sim \varepsilon^2$, $(\delta(B), \delta(\gamma)) \sim \varepsilon^3$, $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Таким образом, в уравнениях (1.7)—(1.11), записанных в виде $Y = Y_1 + \delta(Y)$, вторые слагаемые на два порядка меньше первых. Используя процедуру последовательного приближения, имеем

$$Y_{(1)} = Y_1, \ldots, Y_{(k+1)} = Y_1 + \delta(Y)|_{Y=Y_{(k)}}, \quad Y_1(t) = Y_1(C, C^{\cdot}) \qquad (1.12)$$

$$|Y_{(k+1)} - Y_{(k)}| < \varepsilon^{2k+\delta}M_k, \quad k = 1, 2\ldots, \quad \varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad (1.13)$$

где $\delta = 0$ для $Y = A$, W, ω и $\delta = 1$ для $Y = B$, γ, а M_k — ограниченные при всех $0 \leqslant \varepsilon_i < \varepsilon_0$ постоянные. Причем ε_0 и M_k зависят от свойств функций $C(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Выше считалось $\Psi_\alpha > 0$ ($|P_1^{\alpha}| \geqslant P_0 > 0$). Однако результаты применимы и в тех случаях, когда $\Psi_\alpha \equiv 0$ при некоторых α (например, U — прямая сумма квадратных матриц меньшего порядка). Пусть $\Psi_1 \equiv 0$. Тогда в (1.5) нужно считать $E_1 = 0$. Чтобы учесть это, достаточно при $\alpha = 1$ уравнения (1.9), (1.11) умножить, а (1.10) разделить на $\Psi_1 = \mathrm{const}$ и пределы $(A_k^1\Psi_1, B_k^1\Psi_1, W_1/\Psi_1)|_{\Psi_1\to 0}$ подставить в (1.2), (1.7), (1.8) вместо A_k^1, B_k^1 и W_1 (ограниченный предел $\Psi_1 G_{nk}^1|_{\Psi_1\to 0}$ существует).

Больше проблем представляет наличие кратных собственных значений матрицы U. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s \geqslant \lambda_0 > 0$, $|\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \geqslant \lambda_0$ при всех $\alpha = 1, \ldots, N$, $\alpha \neq \beta \geqslant (s \pm 1)$. В этом случае функции A_k^{α}, B_k^{α}, W_α, ω_α, λ_α при $\alpha \geqslant s + 1$ находятся приведенным выше методом, а при $\alpha \leqslant s$ связаны системой s дифференциальных уравнений. Выберем взаимно ортогональные векторы Ψ_k^{α} так, чтобы $\Psi_n^{\alpha}R_{nk}\Psi_k^{\alpha} = r_\alpha\delta_{\alpha\beta}$ при $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, s$. Тогда, полагая

$$\gamma_\alpha = \gamma = s^{-1}(r_1 + \ldots + r_s), \quad \omega_\alpha = \sqrt{\lambda_1}, \quad B_k^{\alpha} = 0, \quad \alpha \leqslant s$$

первом приближении имеем

$$A_k^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s}\Psi_k^{\beta}H_{\beta\alpha}, \quad W_\alpha = \sum_{\beta=1}^{s}H_{\alpha\beta}^{-1}\Psi_\beta$$

$$\dot{H}_{\alpha\beta}(t) = (\gamma - r_\alpha)H_{\alpha\beta} + \sum_{\sigma=1}^{s}V_{\alpha\sigma}H_{\sigma\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, s \qquad (1.14)$$

$$V_{\alpha\beta} = -V_{\beta\alpha} = \Psi_k^{\beta}\frac{d}{dt}\Psi_k^{\alpha}, \quad \det H(0) = 1$$

При $s=2$ получим из (1.14)

$$H=\begin{Vmatrix} a_1c_1 & -a_2s_2 \\ a_1s_1 & a_2c_2 \end{Vmatrix}, \quad H^{-1}=\begin{Vmatrix} a_2c_2 & a_2s_2 \\ -a_1s_1 & a_1c_1 \end{Vmatrix}$$

$$c_\alpha=\cos\theta_\alpha, \quad s_\alpha=\sin\theta_\alpha$$

$$a_\alpha=\exp\left\{(-1)^\alpha\int_0^t b\cos(2\theta_\alpha)\,dt\right\}, \quad b=\frac{r_1-r_2}{2}, \quad \alpha=1,2$$

где $\theta_\alpha(t)$ находятся из уравнений

$$\theta_\alpha^{\cdot}+(-1)^\alpha b\sin(2\theta_\alpha)=V_{21}, \quad \theta_\alpha(0)=0, \quad \alpha=1,2$$

В (1.2) положено $F_k=\delta_{k1}F_1$. В общем случае имеем

$$x_k(t)=\int_0^t D_{kj}(t,t')F_j(t')\,dt'$$

Первый столбец D_{k1} матриццанта D_{kj} представлен в (1.2). Остальные столбцы аналогичны, нужно лишь везде заменять индекс 1 на индексы $j=2,3,\ldots,N$. При этом у собственных векторов может измениться только знак, а $W_\alpha\simeq\Psi_\alpha\to\Psi_j^\alpha$.

Для получения решения уравнения (1.1) при произвольных (ограниченных) начальных условиях достаточно в (1.2) в суммах по α внести множители $\theta_\alpha=\text{const}$, а в интегралах нулевой нижний предел заменять на $t_\alpha=\text{const}$. Это эквивалентно прибавлению к (1.2) общего решения уравнения (1.1) при $F_k=0$, которое можно представить в форме

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{K_\alpha e^{-\nu_\alpha}}{(m_k\omega_\alpha)^{1/2}}\left[A_k^\alpha\sin(\xi_\alpha(t)+\xi_{\alpha0})+B_k^\alpha\cos(\xi_\alpha(t)+\xi_{\alpha0})\right] \tag{1.15}$$

$$\xi_\alpha=\int_0^t\omega_\alpha dt, \quad \nu_\alpha=\int_0^t\gamma_\alpha dt, \quad K_\alpha,\xi_{\alpha0}=\text{const}$$

При $N=1$ из (1.7)—(1.11), опуская индексы, имеем $B=0$, $A=W\equiv1$, $\gamma=R$ и общее решение записывается в виде

$$x=L^{-1}F_1+\frac{Ke^{-\nu}}{(m\omega)^{1/2}}\sin(\xi(t)+\xi_0) \tag{1.16}$$

$$L^{-1}F=\frac{e^{-\nu}}{(m\omega)^{1/2}}\int_0^t\frac{e^{\nu(t')}F(t')}{[m(t')\,\omega(t')]^{1/2}}\sin(\xi(t)-\xi(t'))\,dt' \tag{1.17}$$

где $\omega(t)$ находится последовательным приближением из уравнения

$$\omega^2=b+\delta(\omega), \quad b=U-\gamma^2-\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\gamma m-\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{d^2}{dt^2}\sqrt{m} \tag{1.18}$$

$$\delta(\omega)=\sqrt{\omega}\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sim\varepsilon_1^2$$

В [2] резонансные решения комплексные, а разложение производится по ε (в (1.7)—(1.11) разложение ведется по ε^2). Поэтому детальное сравнение затруднено. Однако уже в первом приближении можно отметить различие результатов. Например, при $F=e^{ipt}$, $p>0$, $N=1$ в [1, 2] частное решение в форме (1.2) отличается тем, что $W_1=2\sqrt{U}/(p+\sqrt{U})\not\equiv1$. Наиболее четко это отличие сказывается в стационарном пределе ($\varepsilon_1\to0$): решение (1.16) сходится к точному решению, а в частных решениях [1, 2] появляется дополнительный множитель $2\sqrt{U}/(p+\sqrt{U})$.

Рассмотрим вопрос о точности и асимптотической сходимости полученных результатов. Пусть $X=(x_1,\ldots,x_N)$ — точное решение уравнения (1.1), а $X_{(n)}$ — n-е приближение (т. е. в (1.2) $Y=Y_{(n)}$). Учитывая

(1.13), можно доказать асимптотическую сходимость: если $T = T_0/\varepsilon_1$ и $C(\tau)(\tau = \varepsilon_1 t)$ $2n$ раз дифференцируемы по τ при $0 \leqslant \tau \leqslant T_0$, то для всякого T_0 можно указать постоянные M_n, ε_0, такие, что $| X - X_{(n)} | < \varepsilon^{2n-1} M_n$ при всех $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ (здесь и ниже аналогичные неравенства для $| X^{\cdot} - X^{\cdot}_{(n)} |$ опускаем).

Несколько сузив задачу, поставим вопрос о конкретной точности, не ограничивая интервал рассматриваемых времен и учитывая, что по существу имеется два различных параметра ε_1, ε_2.

Определим оператор $L_{(n)}^{-1}$ подстановкой в (1.17) $\omega = \omega_{(n)} = \sqrt{q_n}$, где q_n задается последовательностью

$$q_1 = b, \ldots, \quad q_{k+1} = b + \delta_k, \ldots, \quad \delta_k = q_k^{1/4} \frac{d^2}{dt^2} q_k^{-1/4}, \quad k = 1, \ldots, n \qquad (1.18')$$

и предположим, что функция $b(\tau)$ достаточное число раз дифференцируема при всех $\tau \geqslant 0$. Обозначим $x_{(n)}$ решение (1.16) при $\omega = \omega_{(n)}$, т. е. $L_{(n)} x_{(n)} = F$, причем $L_{(n)} = L - \delta_n + \delta_{n-1}$ $(\delta_0 = 0)$.

Пусть существует

$$\langle \gamma \rangle = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \gamma dt \right) \Bigg|_{T \to \infty}$$

и при всех $t \geqslant 0$

$$\left| \int_0^t (\gamma - \langle \gamma \rangle) dt \right| \leqslant z_0 = \text{const}, \quad 0 < m_0 \leqslant m(t) < \infty, \quad \langle \gamma \rangle = \varepsilon_2 \gamma_0 > 0 \qquad (1.19)$$

Тогда для любой ограниченной функции $a(t)(| a(t) | \leqslant a_0 < \infty)$ и для всех n, таких, что $0 < \omega_{\min} \leqslant \omega_{(n)}$, справедливо неравенство

$$| L_{(n)}^{-1} a | \leqslant \beta a_0 / \varepsilon_2 \gamma_0, \quad \beta = e^{2z_0} (m_0 \cdot \omega_{\min})^{-1}, \quad t \geqslant 0 \qquad (1.20)$$

(аналогичное неравенство получается и для $| dL_{(n)}^{-1} a/dt |$).

Обозначим $\alpha_n = \delta_n - \delta_{n-1}$. Если $\omega_{(k)} \geqslant \omega_{\min} > 0$ при $k \leqslant n$, то $\beta \max | \alpha_n | = \varepsilon_1^{2n} b_n$, где b_n ограничены при всех $0 \leqslant \varepsilon_i < \varepsilon_0$, $i = 1, 2$.

Теорема 1. Пусть для всех $t \geqslant 0$ функция $F(t)$ ограничена, удовлетворяются условия (1.19) и хотя бы для одного $n = 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_1^{2n} b_n / \varepsilon_2 \gamma_0 \leqslant s_0 < 1, \quad \omega_{(k)} \geqslant \omega_{\min} > 0, \quad k = 1, \ldots, n \qquad (1.21)$$

Тогда точное общее решение (1.1) при $N = 1$ ограничено и для всех n, удовлетворяющих (1.21), справедливо неравенство

$$| x_{(n)} - x | < \varepsilon_1^{2n} b_n \max | x_{(n)} | / (\varepsilon_2 \gamma_0 - \varepsilon_1^{2n} b_n) \qquad (1.22)$$

если $x_{(n)}(0) = x(0)$, $x_{(n)}^{\cdot}(0) = x^{\cdot}(0)$.

Доказательство. В силу (1.20) $x_{(n)}$ ограничена. Для x имеем

$$x = x_{(n)} - L_{(n)}^{-1} \alpha_n x = \sum_{k=0}^{\infty} (- L_{(n)}^{-1} \alpha_n)^k x_{(n)}$$

откуда, используя (1.20) и учитывая (1.21), приходим к ограниченности $x(t)$, а также к (1.22).

Оператор L, для которого соблюдаются (1.19), (1.21), будем называть ограниченным и при выделении незатухающих решений в (1.17) нижний предел интегрирования устремим к $-\infty$. Отметим, что при $F = \exp(ipt)$, $| p - \omega | \geqslant \Delta_0 \gg \varepsilon_2 \gamma_0$ (1.17) можно интегрировать по часям и получить оценку

$$|L^{-1}e^{ipt}| = \left| \frac{e^{ipt}}{\omega^2 - p^2} + \varepsilon(\ldots) \right| < \frac{\text{const}}{\Delta_0} \tag{1.23}$$

Теорема 1 демонстрирует различное влияние параметров ε_1 и ε_2 на точность приближенных решений. При $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ первые приближения могут и не иметь смысла (ошибка сравнима с $\max |x|$). Так как α_n содержит производные до $2n$-го порядка, то в общем случае для b_n следует ожидать факториального роста: $b_n \sim (2n)!$ при $n \gg 1$, т. е. $\min (\varepsilon_1^{2n} b_n) \sim e^{-1/\varepsilon_1}$ при $n \sim {}^1/_2 \varepsilon_1$ и $\varepsilon_1^{2n} b_{2n} \gg 1$ при $n > e/2\varepsilon_1$ (предполагается, что $\omega_{\min} \sim 1$, $\gamma_0 \sim 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$). В этом случае наилучшие приближения $x_{(n)}$ связаны со значениями $n \sim {}^1/_2\varepsilon_1$, если же $n > e/2\varepsilon_1$, то $x_{(n)}$ могут уже не иметь смысла. При этом для ограниченности $x(t)$ достаточно потребовать, чтобы $\varepsilon_2 e^{1/\varepsilon_1} > 1$ при $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to 0$.

В многомерном случае при соответствующих ограничениях справедлива теорема, аналогичная теореме 1. При этом в неравенствах типа (1.21), (1.22): $0 < \varepsilon_2\gamma_0 = \min \langle\gamma_\alpha\rangle$ ($\alpha = 1, \ldots, N$), а

$$\varepsilon_1^{2n} b_n \to \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_1^{2k} \varepsilon_2^{2(n-k)} b_n^{(k)}$$

где b_n^k ограничены при всех $0 \leqslant \varepsilon_i < \varepsilon_0$.

В основе доказательства лежит то обстоятельство, что многомерный аналог $L_{(n)}$ отличается от точного на оператор $\varepsilon^{2n}\left(K_{(n)} \dfrac{d}{dt} + U_{(n)}\right)$, где матрицы $K_{(n)}$, $U_{(n)}$ ограничены при всех $0 \leqslant \varepsilon_i < \varepsilon_0$, $i = 1, 2$, если $C(\tau)$ ($\tau = \varepsilon_1 t \geqslant 0$) дифференцируемы $2n$ раз.

2. Спектральный анализ. Пусть параметры $C(t)$ меняются с частотой $\Omega \ll \min \omega_\alpha$ и $F_1 = \exp(ipt)$, $p > 0$. Введем функции

$$\varphi_\alpha = \int_0^t (\omega_\alpha - \omega_{\alpha 0})\,dt, \quad \eta_\alpha = \int_0^t (\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha 0})\,dt, \quad \omega_{\alpha 0} = \langle\omega_\alpha\rangle, \quad \gamma_{\alpha 0} = \langle\gamma_\alpha\rangle$$

$$y_k{}^\alpha = \frac{(B_k{}^\alpha + iA_k{}^\alpha)\,e^{-\eta_\alpha}}{(m_k\omega_\alpha)^{1/2}}, \quad z_\alpha = \frac{W_\alpha e^{\eta_\alpha}}{(m_1\omega_\alpha)^{1/2}}, \quad \langle\cdot\rangle = \frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\Omega} (\cdot)\,dt$$

$$\Phi_n(a) = \langle a(t)\exp(-in\Omega t)\rangle, \quad S_n{}^\alpha(a) = \Phi_n(ae^{i\varphi_\alpha})$$

Полагая $\min\langle\gamma_\alpha\rangle > 0$ из (1.2) получим спектральное разложение незатухающих колебаний

$$x_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[i(p + n\Omega)t] \sum_\alpha (f_{k,n}^\alpha(p) + \bar f_{k,-n}^\alpha(-p)) \tag{2.1}$$

$$f_{k,n}^\alpha(p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{S_{n+m}^\alpha(\bar y_k{}^\alpha)\,\bar S_m{}^\alpha(z_\alpha)}{2(\omega_{\alpha 0} + m\Omega - p + i\gamma_{\alpha 0})} \tag{2.2}$$

При $|\gamma_\alpha| \lesssim \Omega$ можно считать $|\eta_\alpha| \leqslant 1$. Функции $\varphi_\alpha \sim 1/\Omega$, т. е. при достаточно малых Ω коэффициенты $S_n{}^\alpha$ можно вычислять методом стационарной фазы [3]. Отметим также, что

$$\bar f_{k,-n}^\alpha(-p) \simeq \frac{\Phi_n(y_k{}^\alpha z_\alpha)}{(\omega_{\alpha 0} + p)}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t} \bar f_{k,-n}^\alpha(-p) \simeq \frac{y_k{}^\alpha z_\alpha}{\omega_\alpha + p}$$

Если $\gamma_{\alpha 0} \ll \Omega$, то в суммах (2.2) число существенных слагаемых уменьшается и, в частности,

$$f_{k,j}^\alpha(\omega_{\alpha n}) \simeq S_{j+n}^\alpha(\bar y_k{}^\alpha)\,\bar S_n{}^\alpha(z_\alpha)/(2i\gamma_{\alpha 0}), \quad \omega_{\alpha n} = \omega_{\alpha 0} + n\Omega$$

В одномерной системе при $m_1 = 1$ и $\gamma = \text{const} > 0$ имеем

$$x = \sum_n \exp[i(p + n\Omega)t](f_n(p) - \bar f_{-n}(-p)), \quad f_n(p) = \sum_k \frac{S_{n+k}\bar S_k}{2h_k(p)} \tag{2.3}$$

$$h_k(p) = \omega_k + i\gamma - p, \quad \omega_k = \langle\omega\rangle + k\Omega$$

$$S_n = \Phi_n\left(\omega^{-1/2} \exp\left[\int_0^t (\omega - \omega_0)\, dt\right]\right)$$

Величины $\mu^{(+)} = (\max \omega - \omega_0)/\Omega$ и $\mu^{(-)} = (\omega_0 - \min \omega)/\Omega$ характеризуют число гармоник, существенных в (2.3): $S_n \to 0$ при $n > \mu^{(+)}$ и $n < -\mu^{(-)}$. Не ограничивая общность, будем считать $\mu^{(+)} \simeq \mu^{(-)} = \mu$ (величину μ иногда называют уровнем возбуждения). Если $|p - \omega_0| > \mu\Omega$ или $\Omega \ll \gamma$, то из (2.3) следует стационарное приближение $x = (\omega^2 + (\gamma + ip)^2)^{-1} e^{ipt}$. Поэтому более важен анализ резонансной области $|p - \omega_0| \lesssim \mu\Omega$ при $\gamma \lesssim \Omega$. Если $\gamma \ll \omega_0/\mu$, то для функции $E(p) = \langle |x|^2 \rangle$ (в стационарном случае это амплитудно-частотная характеристика) имеем

$$E = \frac{1}{4} \sum_k \sum_n \frac{\Phi_{n-k}(\omega^{-1}) S_n \bar{S}_k}{h_k \bar{h}_n} \simeq \frac{\Phi_0}{4} \sum_n \left|\frac{S_n}{h_n}\right|^2, \quad \Phi_0 = \left\langle \frac{1}{\omega} \right\rangle$$

Как видим, максимумы $E(p)$ связаны со значениями $p = \omega_n = \langle\omega\rangle + n\Omega$. Частоты ω_n ($|n| \leqslant \mu$) можно назвать резонансными. Не все резонансы проявляются: если $S_k \simeq 0$ при каком-либо k ($|k| \lesssim \mu$), то вместо максимума при $p = \omega_k$ имеем дополнительный, более глубокий минимум. При $\mu \gg 1$ кривая $E(p)$ вблизи границ резонансной области выше, чем в средней области. Если $\Omega \gg \gamma$, то следует отметить подобие спектральных амплитуд и величин максимумов на резонансных частотах. Действительно

$$E_{(n)} = E(\omega_n) \simeq \Phi_0 |S_n|^2/(4\gamma^2), \quad f_n^{\,k} = f_{n-k}(\omega_k) \simeq \frac{S_n S_k}{2i\gamma}$$

$$|f_n^{\,k}|^2 \approx 4E_{(n)} F_{(k)} \gamma^2/\Phi_0 \to |f_n^{\,k}/f_n^{\,j}|^2 = |f_k^{\,n}/f_j^{\,n}|^2 = \frac{E_{(k)}}{E_{(j)}}$$

Здесь $f_n^{\,k}$ — комплексная амплитуда гармоники $\exp(i\omega_n t)$ при $p = \omega_k$ ($|k| \lesssim \mu$), таким образом, вычислив (или измерив на опыте) амплитуды $|f_n^{\,k}|$ при каком-либо $|k| \leqslant \mu$, можно оценить и $|f_n^{\,j}|$ при $j \neq k$, а также поведение кривой $E(p)$ (величины максимумов, местоположение дополнительных минимумов и т. п.).

Вынужденные колебания в многомерных системах слагаются из одномерных колебаний, которым соответствуют собственные частоты ω_α и коэффициенты трения γ_α. Если все параметры меняются в небольших пределах с одной и той же частотой Ω, то величины

$$\langle\gamma_\alpha\rangle, \quad \omega_{\alpha n} = \langle\omega_\alpha\rangle + n\Omega, \quad S_n^{\,\alpha}(\omega_\alpha^{-1/2}), \quad \mu_\alpha = \max|\omega_\alpha - \omega_{\alpha 0}|/\Omega$$

определяют основные свойства спектральных амплитуд этих колебаний. Всякая среднеквадратичная характеристика $E(p) = g_{kn} \langle x_k \bar{x}_n \rangle$ ($g_{kn} = \bar{g}_{nk} = \mathrm{const}$) в тех областях значений p, где $|\Omega E_0^{-1} dE_0/dp| \leqslant \varkappa \ll 1$ ($E_0(p)$ — стационарный аналог $E(p)$), практически равна $E_0(p)$ ($|E - E_0| \lesssim \varkappa E_0$). Но в резонансных областях ($|p - \omega_{\alpha 0}| \lesssim \mu_\alpha \Omega$) функция $E(p)$ качественно отлична от $E_0(p)$, причем

$$E(p) \simeq \frac{1}{\langle\omega_\alpha^{-1}\rangle} \sum |S_n^{\,\alpha}|^2 E_0(p + n\Omega)$$

если $\mu_\alpha \gg 1$, $|p - \omega_{\alpha 0}| \leqslant \mu_\alpha \Omega$, $|\omega_{\alpha 0} - \omega_{\beta 0}| > (\mu_\alpha + \mu_\beta)\Omega$, $\beta \neq \alpha$.

Приведенный спектральный анализ дает представление о том, как зависят свойства вынужденных колебаний от функций $Y = (A, B, W, \omega, \lambda)$.

Важнейшими характеристиками являются функции

$$\varphi_\alpha(t)=\int_0^t(\omega_\alpha-\langle\omega\rangle)\,dt$$

(фазовые осцилляции) и средние $\langle Y\rangle$.

3. Нелинейное возмущение. Нелинейные колебания будем исследовать, используя приведенную выше методику, методом частичной линеаризации. Ограничимся одномерным случаем, отмечая при этом, что при соответствующих условиях схема без труда обобщается и для $N\geqslant 2$.

Нелинейное обобщение уравнения (1.1) при $N=m_1=1$ имеет вид

$$Lx=\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\varepsilon\gamma(\tau)\frac{d}{dt}+U(\tau)\right)x=F(t)+\varepsilon Q(x,x^\cdot,t),\quad \tau=\varepsilon t \tag{3.1}$$

где $Q(x, x^\cdot, t)$ — неограниченно дифференцируемая по x и $x^\cdot$ функция (в частности, полином), причем $Q(0, 0, t)=0$. Сразу отметим, что если x_1 есть какое-либо ограниченное решение (3.1), то, вообще говоря, $x=x_1+y$, где $y(t)$ находится из уравнения

$$Ly=\varepsilon V(x_1, y),\ V(x_1, y)=Q(x_1+y,\ x_1^\cdot+y^\cdot,\ t)-Q(x_1, x_1^\cdot, t) \tag{3.2}$$

Введем сначала ряд обозначений. Пусть $\omega(t)$ — какое-либо приближение, определяемое в (1.18). Будем считать, что $0<\varepsilon\gamma_0=\langle\gamma\rangle\varepsilon\ll\omega_{\min}\leqslant\omega\leqslant\omega_{\max}$. Пусть g — частотный интервал $(\omega_{\min}-\Delta_0,\ \omega_{\max}+\Delta_0)$, где $\Delta_0=\mathrm{const}$ удовлетворяет условиям $\varepsilon\gamma_0\ll\Delta_0\ll\omega_{\min}$. Множество неограниченно дифференцируемых функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся при $t\geqslant 0$ ряды типа $\sum A_k\cos(\theta_k t+\varphi_k)$, обозначим G. Если в этих рядах $|\theta_k|\in g$, то имеем $G_1\subset G$, если же $|\theta_k|<\Delta_0$, имеем $G_0\subset G$. Для функции $g(t)\in G$ определим операции Hq, $\{q\}$: $Hq\in G_1$, $\{q\}\in G-G_1$, $q=Hq+\{q\}$ (т. е. Hq и $\{q\}$— резонансная и нерезонансная части $q(t)$). Введем также $H'q$, и $\{q\}'=(1-H')q$, такие, что $LH'q\in G_1$, $L\{q\}'\in G-G_1$.

Часто целесообразнее «гладкое» разделение частотного спектра: в Hq и $\{q\}$ сохраняются быстро убывающие по амплитуде гармоники, частоты которых выходят за указанные пределы. В таких случаях обычно имеют дело с функциями типа $\sum B_k\cos(p_k t+\psi_k)$, где $(B_k,\psi_k)\in G_0$ (класс медленно меняющихся функций G_0 также может быть «сглажен»). При этом можно определить операторы H_n, которые оставляют гармоники с частотами, близкими к $n\langle\omega\rangle$: $H_n q=B\cos(n\langle\omega\rangle t+\psi)$, $(B,\psi)\in G_0$, причем в ряде случаев $H'=L^{-1}H\simeq H_1$.

Пусть в (3.1) $(\gamma, U)\in G_0$, $(F(t), Q(t))\in G$ при всех $t\geqslant 0$. Введем понятие частичной линеаризации следующим образом: если $Ly\in G_1$ и $z\in G$, то

$$HV(z, y)=uy+2ry^\cdot,\ (u, r)\in G_0,\ u=u(z, y),\ r=r(z, y) \tag{3.3}$$

В общем случае

$$\begin{gathered}HV=\sum A_k\cos(\xi_k t+\psi_k),\quad y=\sum_k Y_k\cos(\Theta_k t+\varphi_k)\\ u=\frac{1}{\rho}\sum_k\sum_m Y_k A_m\Theta_k\cos[(\xi_m-\Theta_k)t+\psi_m-\varphi_k]\\ r=\frac{1}{2\rho}\sum_k\sum_m Y_k A_m\sin[(\xi_m-\Theta_k)t+\psi_m-\varphi_k]\\ \rho=\sum_k\sum_m Y_k Y_m\Theta_k\cos[(\Theta_m-\Theta_k)t+\varphi_m-\varphi_k],\quad(\xi_k,\Theta_k)\in g\end{gathered} \tag{3.4}$$

Если возможно «гладкое» разделение и $y = a\cos(pt + \varphi)$, $p \simeq \langle\omega\rangle$, $(a, \varphi) \in G_0$, $a \geqslant a_0 > 0$ (при этом в (3.4) $\rho = a(p + \varphi^{\cdot})$), то, обозначая

$$V_1 = \frac{1}{2y}(V + B), \quad V_2 = \frac{1}{2y^{\cdot}}(V - B), \quad B = Q(z + y, z^{\cdot}, t) - Q(z, z^{\cdot} + y^{\cdot}, t)$$

$$(H_0 + H_2)V_i = a_i + b_i\cos(2pt + 2\varphi + \varphi_i), \quad (a_i, b_i, \varphi_i) \in G_0, \quad i = 1, 2$$

и отмечая, что $V_1 \to \partial Q(z, z^{\cdot}, t)/\partial z$, $V_2 \to \partial Q(z, z^{\cdot}, t)/\partial z^{\cdot}$ при $y \to 0$, имеем

$$r = \frac{a_2}{2} - \frac{b_2}{4}\cos\varphi_2 + \frac{1}{4(p + \varphi^{\cdot})}\left(b_1\sin\varphi_1 + b_2\frac{a^{\cdot}}{a}\sin\varphi_2\right)$$
$$u = a_1 + a_2\frac{a^{\cdot}}{a} + \frac{b_1}{2}\cos\varphi_1 + \frac{b_2}{2}\left(\frac{a^{\cdot}}{a}\cos\varphi_2 + (p + \varphi^{\cdot})\sin\varphi_2\right) - \frac{2a^{\cdot}}{a}r \quad (3.5)$$

Теперь, положив $F = \varepsilon F_1 + F_2$, $\varepsilon F_1 = HF$, $F_2 = \{F\}$, можно предложить следующую схему анализа (3.1):

$$x_0 = 0, \quad x_n = y_n + z_n, \quad y_n = H'x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$z_n = L^{-1}(F_2 + \varepsilon\{Q(x_{n-1}, x_{n-1}^{\cdot}, t)\}); \quad y_n = \varepsilon L_n^{-1}P_n \quad (3.6)$$
$$P_n = F_1 + HQ(z_n, z_n^{\cdot}, t), \quad L_n = L - 2\varepsilon r_n\frac{d}{dt} - \varepsilon u_n$$
$$r_n = r(z_n, y_n), \quad u_n = u(z_n, y_n)$$

При обосновании этой процедуры, которое следует ниже, неравенства вида $|q| < \mathrm{const}$, одновременно означают $(|q| + |q^{\cdot}|) < \mathrm{const}$, если $q(t) \in G$.

Обозначим

$$L(z, y) = L - 2\varepsilon r(z, y)\frac{d}{dt} - \varepsilon u(z, y), \quad L(z) = L(z, 0),$$

Операторы $L, L_n, \ldots$ будем называть ограниченными и писать $L < I$, $L_n < I, \ldots$, если для любой функции $g(t) \in G$ найдутся постоянные ε_0, K_1, K_2, такие, что

$$|L^{-1}\{q\}| < K_1\max|q|, \ \varepsilon|L^{-1}Hq| < K_2\max|q|, \ldots, 0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (3.7)$$

В частности, учитывая (1.20), (1.23), заключаем, что критериями ограниченности могут служить соотношения (1.19), (1.21).

В (3.6) $(u_n, r_n) = C_n = C(z_n, y_n)$ и $y_n = y(C_n, z_n, P_n)$. В общем случае эти функциональные уравнения приводят к некоторому набору решений, т. е. $C_n \to C_n^{\,i} = \Phi^{(i)}(z_n, P_n)$, где $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$ совокупность функционалов, число которых зависит от типа нелинейностей. Далее под x_n будем подразумевать любую из соответствующих последовательностей $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots$

Прежде чем сформулировать основную теорему, рассмотрим уравнение

$$Ly = \varepsilon HV(z, y) + \varepsilon^{k+1}q(t) \to L(z, y)y = \varepsilon^{k+1}q, \quad z \in G, \ q \in G_1 \ (k = 1, 2, \ldots) \quad (3.8)$$

Будем писать $L(z) < I^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, если для всякой функции $\varphi(t) \in G_1$ найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $L(z, \varepsilon^k\varphi) < I$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$ (т. е. оператор $L(z)$ ограничен с «запасом»). В случае (3.8) это означает, что среди функционалов $\Phi^{(i)}$ найдется непрерывный в окрестности $|P| < \varepsilon_0^{\,k}\max|q|$ функционал $\Phi^{(1)}(z, P)$, такой, что $|\Phi^{(1)}(z, \varepsilon^k q)| < \varepsilon^k\,\mathrm{const}$. Из сказанного следует

Лемма. Если $L(z) < I^k$, то среди ограниченных решений (3.8) найдется $y(t)$, такое, что $|y| < \varepsilon^k M_0$, где $M_0 = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$.

Теперь можно доказать асимптотическую сходимость процедуры (3.6).

Теорема 2. Если $(F_1, F_2) \in G$ при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, то при всех $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, для которых $L_k < I$, $L(x_k) < I^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, можно найти постоянные $M_n < \infty$, такие, что среди ограниченных решений (3.1) существует $x(t)$, такое, что $|\delta x_n| = |x - x_n| < \varepsilon^n M_n$.

Доказательство. Для $\delta z_k = \{x\}' - z_k$, $\delta y_k = H'x - y_k$ имеем

$$L\delta z_1 = \varepsilon \{Q(x, x^\cdot, t)\}, \ldots, L\delta z_{k+1} = \varepsilon \{V(x_k, \delta x_k)\} \qquad (3.9)$$

$$L\delta y_k = \varepsilon HV(x_k, \delta y_k) - \varepsilon HV(x, -\delta z_k), \quad k = 1, \ldots, n \qquad (3.10)$$

Дифференцируемость $Q(z, z^\cdot, t)$ приводит к условиям Липшица: $|V(a, b)| < |b|\,\mathrm{const}$. Поэтому, последовательно анализируя (3.9) и (3.10) ((3.9) для $\delta z_1 \to$ (3.10), для $\delta y_1 \to$ (3.9), для $\delta z_2 \to$ и т. п.), из (3.9) с учетом (3.7) получим $|\delta z_k| < \varepsilon^k M_k'$, а из (3.10), согласно лемме, имеем $|\delta y_k| < \varepsilon^k M_k''$ (M_k', M_k'' — постоянные). В результате

$$|\delta x_k| < M_k \varepsilon^k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad M_k = \mathrm{const}$$

Несколько слов об уравнении (3.2), где полагаем $L < I$ и ищем $y \in G$. Если $y = \{y\}' = z$, то $|z| \leqslant \varepsilon |z|$ const и $z = 0$ при достаточно малых ε. Поэтому $H'y = y_1 \not\equiv 0$, если $y \not\equiv 0$. При этом $L(x, y_1)\, y_1 = \varepsilon^2 q(t)$, $q \in G_1$ и (3.2) имеет нетривиальные ограниченные решения только в случае $L(x, y_1) < I$ при $\varepsilon \to 0$. Для (3.2) можно предложить схему, аналогичную (3.6), и в первом приближении получить $L(x, y_1)\, y_1 = 0$. Отсюда видно, что искомые решения возникают в тех областях параметров, которые разделяют случаи возрастающих и затухающих решений уравнения $L(x, y_1)\, y_1 = 0$. Эти области можно определить соотношением $(\langle \gamma - r(x, y_1)\rangle) \to +0$ при $\varepsilon \to 0$, которое, очевидно, выполняется не при всяких типах функций $x(t)$, $Q(x, x^\cdot, t)$.

Например, можно в (3.1) положить $F \to F + \alpha\varphi(t)$ и выбрать $\varphi(t) \in G$ таким, чтобы это соотношение не выполнялось. Совершая в результатах (3.6) предельный переход $\alpha \to 0$, следует, вообще говоря, ожидать увеличения числа функционалов $\Phi^{(i)}$. Такая процедура позволяет использовать схему (3.6) и для поиска решений (3.2).

Выше рассматривались функции из класса G, поэтому интервал времен не ограничивался. Если считать $0 \leqslant t \leqslant T_0/\varepsilon$, $\tau = \varepsilon t$, то все полученные результаты пригодны и для функций $q(t, \tau) = q_\tau(t) \in G$ и неограниченно дифференцируемых по τ при всех $0 \leqslant \tau \leqslant T_0$.

Рассмотрим теперь детальнее одномерную систему при

$$0 < \gamma = \mathrm{const}, \quad \omega = 1 + \sum_{n \neq 0} in\Omega\mu_n \exp(in\Omega t), \quad \mu_n = \bar{\mu}_{-n} = \mathrm{const}$$

$$\min \omega(t) = \omega_{\min} > 0, \quad 0 < \Omega \leqslant \omega_{\min}$$

$$Q = x^3, \quad F = \varepsilon F_0 \cos pt, \quad p \in g$$

В (3.6) первое приближение дает

$$z_1 = 0, \; r_1 = 0, \; x_1 = \varepsilon F_0 \,\mathrm{Re} \sum_n f_n \exp(i(p + n\Omega)t), \; f_n = \sum_k \frac{S_{n+k}\bar{S}_k}{2h_k(p + \varkappa_0)} \qquad (3.11)$$

$$S_n = \Phi_n(\omega^{-1/2} \exp(i(\varphi - \varphi_1))), \; h_k(a) = 1 + k\Omega + i\varepsilon\gamma - a$$

$$\varphi = \int_0^t (\omega - 1)\, dt, \quad \varphi_1 = \int_0^t \left(\frac{\varepsilon u_1}{2\omega} - \varkappa_0\right) dt, \quad \varkappa_0 = \frac{\varepsilon}{2}\left\langle \frac{u_1}{\omega} \right\rangle$$

$$u_1 = \frac{3\varepsilon^2 F_0^2}{16\omega} \exp(-2\varepsilon\gamma t) \left| \int_{-\infty}^t \exp(\varepsilon\gamma t + i\psi)\, dt \right|^2 = \frac{3}{2} \sum_n E_n \exp(in\Omega t) \qquad (3.12)$$

$$\psi = \varphi - \varphi_1 + (\omega_0 - p - \varkappa_0)\, t, \quad E_n = \frac{\varepsilon^2 F_0^2}{2} \sum_k f_{n+k}\bar{f}_k = \langle x^2 \exp(-in\Omega t)\rangle$$

Пусть параметры меняются в небольших пределах: $|\omega - 1| \ll 1$ (практически достаточно $|\omega - 1| < 0{,}3$). Вводя для совокупности $\beta = (\beta_k)$, где $\beta_k = \bar{\beta}_{-k} = \mathrm{const}$,

$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, обозначения

$$S_n(\beta) = \Phi_n\left(\exp\left[i\sum_{k\neq 0}\beta_k \exp(ik\Omega t)\right]\right), \quad f_n(a, \beta) = \sum_m \frac{S_{n+m}(\beta)\bar{S}_m(\beta)}{2h_m(a)}$$

$$F_n(a, \beta) = \frac{\varepsilon^2 F_0^2}{8}\sum_m \frac{S_{n+m}(\beta)\bar{S}_m(\beta)}{h_m(a)\bar{h}_{n+m}(a)}$$

получим $f_n = f_n(p + \varkappa_0, \mu - \varkappa)$ и систему уравнений для $\varkappa_0$, $(\varkappa_k)$:

$$\varkappa_0 = \frac{3}{4}\varepsilon E_0(p + \varkappa_0, \mu - \varkappa), \quad \varkappa_k = -\frac{3\varepsilon i}{4k\Omega}E_k(p + \varkappa_0, \mu - \varkappa) \tag{3.13}$$

При $\Omega > \varepsilon\gamma$ имеем следующие порядковые соотношения: $|f_n| \lesssim (2\varepsilon\gamma)^{-1}$, $|\varkappa_0| \lesssim 3\varepsilon F_0^2/(32\gamma^2) = \alpha$, $|\varkappa_k| \lesssim \varepsilon\gamma\alpha/(k\Omega)^2$, где полагаем $\alpha \ll 1$. Очевидно, что лишь при $\gamma \ll 3\varepsilon^2 F_0^2/(32\Omega^2)$ имеет смысл учитывать $\varkappa_k$ с $|k| \gg 1$. Если $\alpha\gamma/\Omega^2 < 1$ и $\omega = 1 + \Omega\mu_1 \cos \Omega t$, $\mu_1 \gg 1$, то, считая $\varkappa_k = 0$ при $|k| \geqslant 2$, получим $S_n = \exp(-in\psi_0) J_n(\mu_1 - \varkappa_1)$, $\psi_0 = \dfrac{3\varepsilon}{2\mu_1\Omega}\operatorname{Im} E_1(p + \varkappa_0, \mu_1 - \varkappa_1)$ (J_n — функции Бесселя) и систему уравнений для $\varkappa_0$, $\varkappa_1$:

$$\varkappa_0 = \frac{3\varepsilon}{4}E_0(p + \varkappa_0, \mu_1 - \varkappa_1), \quad \varkappa_1 = \frac{3\varepsilon}{2\Omega}\operatorname{Re} E_1(p + \varkappa_0, \mu_1 - \varkappa_1) \tag{3.14}$$

Отметим, что (3.13), (3.14) по существу являются параметрическим заданием функций $\varkappa_n = \varkappa_n(p, \mu)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, $\mu = (\mu_k)$.

Если параметры могут меняться в относительно больших пределах и $\max|\omega - 1| \gg \Omega$, то при решении функционального уравнения (3.12) можно использовать метод стационарной фазы. Будем считать $\omega(t)$ четной функцией, обладающей на полупериоде π/Ω одним экстремумом. Пусть $\omega(t) = p$ дает $t = \pm t_p$, $0 \leqslant t_p < \pi/\Omega$, а $w = \omega^{\cdot}(t_p) \neq 0$. Тогда, если $|w| \gg \Omega^2$ (т. е. $\min \omega < p < \max \omega$), получим

$$u_1(t) = \frac{D\eta(t)}{\omega}e^{-2\varepsilon\gamma t}, \quad D = \frac{3\pi\varepsilon^2 F_0^2}{8p|w|}(\operatorname{ch}\varepsilon\gamma T - \cos yT)^{-1}$$

$$T = 2\pi/\Omega, \quad y = 1 - p - \varkappa_0$$

$$\eta(t) = \begin{cases} D_1 \exp(2\varepsilon\gamma Tn), & (nT - t_p) < t < (nT + t_p) \\ D_2 \exp(2\varepsilon\gamma Tn), & (nT + t_p) < t < (nT + T - t_p) \end{cases}$$

$$n_0 = 0, \pm 1, \ldots, D_1 = \operatorname{ch}(\varepsilon\gamma(2t_p - T)) + \cos(y(2t_p - T) + 2\psi - 2\beta)$$

$$D_2 = e^{\varepsilon\gamma T}[\operatorname{ch}(2\varepsilon\gamma t_p) + \cos(2yt_p + 2\psi - 2\beta)]$$

$$\psi = \int_0^{t_p}(\omega - 1)\,dt + \frac{\pi w}{4|w|}$$

Здесь $\varkappa_0$, β определяются из системы уравнений

$$\varkappa_0 = \frac{\varepsilon}{2}(b_1 + b_2)D, \quad \beta = \frac{\varepsilon}{2}\left(\left(\frac{T}{2} - t_p\right)b_1 - t_p b_2\right)D$$

$$b_1 = \frac{D_1}{T}\int_{-t_p}^{t_p} q\,dt, \quad b_2 = \frac{D_2}{T}\int_{t_p}^{T-t_p} q\,dt, \quad q = \frac{\exp(-2\varepsilon\gamma t)}{\omega^2}$$

Таким образом, продемонстрированы случаи, когда от функциональных уравнений для $C_1 = (u_1, r_1)$ можно перейти к системе обыкновенных (не дифференциальных) уравнений с небольшим числом неизвестных. В общем случае можно сказать, что такой переход возможен, если в разложении $C_1 = \sum A_k \cos(\theta_k t + \psi_k)$ условию $|\varepsilon A_k| \gtrsim \theta_k$ удовлетворяет небольшое число гармоник. Метод стационарной фазы также упрощает функциональную задачу. При наличии таких возможностей предлагаемая схема предпочтительнее методов [1], в которых результаты формулируются в виде нелинейных уравнений первого порядка для амплитуд и фаз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
2 *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1966. 251 с.
3. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.I.1988