Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.36

Г. М. Виннер

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассматриваются движения механических систем с неголономными связями вблизи критических точек потенциала. Постановка задачи об устойчивости таких положений равновесия восходит к Уиттекеру [1]. Предлагаемая теорема содержит известные ранее (см. [2]) результаты как частный случай и позволяет строить асимптотические движения для новых классов потенциалов. Получены достаточные условия неустойчивости равновесия в случае, когда не все частоты малых колебаний обращаются в нуль. Аналогичное исследование систем без связей проведено в [3—6].

Можно высказать гипотезу, что критическая точка потенциальной энергии является неустойчивым равновесием механической системы с неголономными связями (линейными по скоростям) в случае, когда нуль не является минимумом функции V^*.

Здесь начало координат является исследуемым положением равновесия, а звездочкой обозначено сужение потенциальной энергии V на подпространство, ортогональное всем связям в нуле.

Ниже эта гипотеза доказывается для случая, когда разложение в ряд Маклорена функции V^* есть $V^* = V_2^* + V_k^* + V_{k+1}^* + \ldots$, причем уже $V_2^* + V_k^*$ может принимать отрицательные значения сколь угодно близко к нулю (V_j^* — однородная форма степени j).

Неисследованной остается ситуация, когда $V_2^* \geqslant 0$ и $V_k^* \geqslant 0$, а для определения отсутствия минимума требуется привлечение более высоких степеней.

1. Строгая постановка задачи и формулировка результата. Рассматривается механическая система с конфигурационным пространством L, которое можно считать стандартным R^n, поскольку все построения ведутся в сколь угодно малой окрестности нуля. Обобщенные координаты обозначаем $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)^T \in L$. Лагранжиан этой системы может быть записан в виде $K(\xi, \xi^\cdot) - V(\xi)$, K — кинетическая энергия, квадратичная по скоростям, V — потенциальная энергия, которая предполагается аналитической функцией своих аргументов. Кроме того, на систему наложено m связей, линейных по скоростям ($0 \leqslant m < n$):

$$(a_j(\xi), \xi^\cdot) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.1}$$

В общем случае, связи неинтегрируемы и векторы $a_j(\xi)$ предполагаются линейно независимыми во всех точках $\xi \in L$. Круглыми скобками обозначено скалярное произведение в смысле метрики, задаваемой кинетической энергией.

Введем $(n \times m)$-матрицу $A(\xi)$, составленную из $a_j(\xi)$. Тогда динамика системы описывается уравнениями Лагранжа с ограничениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \xi^\cdot} - \frac{\partial K}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial \xi} + A(\xi)\lambda, \quad A^T(\xi)\xi^\cdot = 0 \tag{1.2}$$

Здесь λ — столбец из m произвольных коэффициентов. Считаем, что исследуемая критическая точка функции V совпадает с началом координат $0 \in L$. В окрестности этого положения равновесия можно ввести нормальные координаты, в которых

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\xi^{\cdot i})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(\xi)\xi^{\cdot i}\xi^{\cdot j}$$

Обозначим $L_A \subset L$ m-мерное подпространство, порожденное векторами $a_j(0)$, а $L_B \subset L$ — его ортогональное дополнение (после введения нормальных координат L стало евклидовым пространством).

Теорема. Если ограничение потенциала V на подпространство L_B имеет вид $V^* = V_2^* + V_k^* + V_{k+1}^* + \ldots$, причем $0 \in L_B$ не является локальным минимумом функции $V_2^* + V_k^*$, то это положение равновесия системы (1.2) неустойчиво.

Отметим, что в отличие от результата работы [2] здесь не требуется обращения в нуль всех частот малых колебаний.

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Лемма. Если выполнены предположения теоремы и $V_2^* \geqslant 0$ всюду в L_B, то существует формальное решение системы (1.2) вида

$$\xi^i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^i(\ln t)\, t^{-j\mu}, \quad \mu = \frac{2}{k-2}$$

где $\xi_j^i(\tau)$ — полином конечной степени от своего аргумента $\tau = \ln t$.

Доказательство леммы будет приведено ниже. Покажем, как получить из нее теорему. Согласно известному результату [7], из существования формального решения указанного вида следует наличие у системы (1.2) действительного движения, для которого формальный ряд $\xi(t)$ служит асимптотическим представлением. Применяя соображения [8] об обратимости времени, получаем неустойчивость положения равновесия. Если же форма V_2^* сама может принимать отрицательные значения в любой окрестности нуля, то неустойчивость доказывается методами, предложенным Ляпуновым [9].

Структура всего доказательства предлагается следующая: выбор удобных координат и исключение множителей λ, построение нулевого приближения, построение первого приближения, общий вид формального решения и условия разрешимости, возникающие на N-м шаге.

2. Выбор системы координат и исключение множителей Лагранжа. Исключим коэффициенты λ из первых n уравнений (1.2), дифференцируя последние m уравнений по времени и подставляя в них выражение для $\xi^{\cdot\cdot}$. Получим систему из n уравнений относительно n неизвестных функций $\xi^i(t)$:

$$\xi^{\cdot\cdot} = -V' + A\,(A^TA)^{-1}A^TV' + \Gamma(\xi, \xi^{\cdot}) + O(\xi)V'(\xi) \tag{2.1}$$

Здесь V' — градиент функции V, $\Gamma(\xi, \xi^{\cdot})$ — вектор-функция, квадратичная по скоростям, $O(\xi)$ — линейный оператор, $O(0) = 0$; $A = A(0)$ — постоянная матрица. Для асимптотического решения $\xi(t) \to 0$ и $\xi^{\cdot}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому исключенные уравнения связей (1.1) выполнены.

Применяя лемму о расщеплении к функции V, можем ввести новые координаты (обозначаемые по-прежнему ξ^i), в которых

$$V(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(\xi^i)^2 + V_3(\xi^{s+1}, \ldots, \xi^n) + \ldots$$

где члены, обозначенные многоточием, имеют степень однородности выше трех и зависят только от координат $\xi^{s+1}, \ldots, \xi^n$.

Будем в дальнейшем обозначать координаты $\xi^1, \ldots, \xi^s$ через $x^1, \ldots$ $\ldots, x^s$, а подпространство, порожденное ими, L_X.

Предположим, что выполнено условие $L_A \bigcap L_X = \{0\}$. В противном случае потребовалось бы выделить в L_A подпространство $L_Q = L_A \bigcap L_X$, ввести в нем новый базис, а все рассуждения, приведенные ниже, проводить для подпространства, ортогонального L_Q. Это сильно усложнило бы детали доказательства, не повлияв на общий ход рассуждений. Для полноты картины отметим ниже явный вид рядов, возникающих для координат подпространства $L_A \bigcap L_X$ в случае, когда оно не пусто.

Оставшиеся после выделения подпространства L_X переменные разобьем на три группы: y, p, z. Обозначим натянутые на них подпространства L_Y, L_P, L_Z. Переменные p и z будут порождать подпространство $L_P \oplus L_Z$, являющееся пересечением $L_X{}^{\perp}$ с L_B. Иначе говоря, это подпространство, состоящее из векторов, ортогональных всем $a_j(0)$ и не участвующих в квадратичных членах V^*. Подпространство L_Y определяется как ортогональное дополнение к $L_X \oplus L_P \oplus L_Z$. В соответствии со сделанными предположениями $\dim L_Y = m$. По условию леммы сужение V_k на L_B не имеет локального минимума в нуле. Следовательно, в $L_P \oplus$ $\oplus L_Z$ в любой окрестности нуля найдутся точки (p, z), для которых $V_k^*(p, z) < 0$. Значит, V_k^* достигает своего минимума на единичной сфере из $L_P \oplus L_Z$ и отрицательна в этой точке. Направим ось z в этом экстремальном направлении. Оставшиеся координаты обозначим p^i, выбирая их так, чтобы в совокупности x^i, y^i, p^i, z образовывали ортонормированный базис. Сохраним за ним также и обозначение ξ^i.

В дальнейшем $V(x, y, p, z)$ означает $V(\xi)$, где $\xi^i = x^i$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $\xi^i = y^{i-s}$ при $s+1 \leqslant i \leqslant s+m$; $\xi^i = p^{i-s-m}$ при $s+m+1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant n-1$; $\xi^n = z$. Поэтому $V_k^*(p, z) = V(0, 0, p, z)$;

$$L = L_X \oplus L_Y \oplus L_P \oplus L_Z = L_A + L_B$$

$$\dim L = n,\ \dim L_X = s,\ \dim L_Y = m,\ \dim L_P = r = n - s - m - 1,$$

$$\dim L_Z = 1,\ \dim L_A = m,\ \dim L_B = n - m$$

Заметим, что в (2.1) участвуют не сами векторы $a_j(0)$, а лишь подпространство L_A, натянутое на них. Удобно будет считать, что $a_j(0)$ ортонормированы, а $(s+i)$-я координата отлична от нуля лишь у $a_i(0)$, т. е. $(n \times m)$-матрица имеет вид $A^T = \| a\ b\ 0\ 0 \|$, где a — некоторая матрица $s \times m$, b — диагональная матрица $m \times m$, нижние два нуля означают блоки $r \times m$ и $1 \times m$. Заметим, что в силу выбора пространства L_Y все элементы b_{ii} ненулевые.

Условие ортонормированности набора векторов $a_j(0)$ приводит к тому, что $A^T A = E_m$ — единичная матрица размера $m \times m$, тогда уравнение (2.1) перепишется в виде

$$\ddot{\xi} = TV'(\xi) + \Gamma(\xi, \dot{\xi}) + O(\xi)V'(\xi), \quad T = AA^T - E_n \tag{2.2}$$

где T — оператор проектирования на подпространство L_B, взятый с обратным знаком. Важные для дальнейшего факты состоят в следующем.

Утверждение 1. Матрица $aa^T - E_m$ невырождена.

Доказательство проводится с использованием неравенства Адамара.

Утверждение 2. $(s+i)$-я строка матрица T при $1 \leqslant i \leqslant m$ является линейной комбинацией первых s строк с весами $a_{i1}/b_{ii}, \ldots, a_{is}/b_{ii}$.

3. Нулевое и первое приближения. Рассмотрим упрощенную систему

$$p^{\cdot\cdot} = -\frac{\partial V}{\partial p}(0, 0, p, z), \quad z^{\cdot\cdot} = -\frac{\partial V}{\partial z}(0, 0, p, z) \tag{3.1}$$

Утверждается, что она имеет решение $p_0(t) \equiv 0$, $z_0(t) = z_0 t^{-\mu}$, где $\mu = 2/(k-2)$, z_0 — некоторая постоянная. Использование такого решения было предложено в [8] и является следствием выбора оси z как направления наискорейшего убывания функции $V_k{}^*$. Там же показано, что

$$V_k{}^*(p, z) = w(z)^k + \sum_{i,j=1}^{r} f_0(p, z)\, p^i p^j$$

а z_0 находится из соотношения $z_0\mu(\mu + 1) = -kw(z_0)^{k-1}$, которое всегда разрешимо в силу условия отрицательности функции $V_k{}^*$ в точке $(0, 1)$ (здесь 0 — r-мерный вектор). Таким образом,

$$V(x, y, p, z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2 + w(z)^k + \sum_{i=1}^{m} f_i(y, p, z)\, y^i + \sum_{i,j=1}^{r} f_2(y, p, z)\, p^i p^j$$

Здесь нет членов типа $p^i(z)^{k-1}$.

На основе нулевого приближения найдем вектор-функцию $\xi_1(t)$, которая при подстановке в уравнения (2.2) обращает в нуль все члены порядка $-\mu - 2$ и ниже по t. Утверждается, что такое решение существует и имеет вид

$$\xi_1(t) = \operatorname{col}(x_1 t^{-\mu-2}, 0, 0, z_1 t^{-\mu}), \quad \xi_1 = \operatorname{col}(x_1, 0, 0, z_1)$$

Действительно, подставляя вектор $\xi_1(t)$ в уравнения (2.2) и отбрасывая все члены более высоких степеней, получаем, приравнивая коэффициенты при $t^{-\mu-2}$

$$\begin{gathered} 0 = (aa^T - E_s)\, x_1 + ab^T V_y \\ 0 = ba^T x_1 + (bb^T - E_m)\, V_y, \quad V_y = \frac{\partial V}{\partial y}(\xi_1) \\ 0 = 0, \quad z_1\mu(\mu + 1) = -wk(z_1)^{k-1} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Последние $r + 1$ уравнений совпадают с системой (3.1), а значит, выбирая $z_1 = z_0$, сможем им удовлетворить. Для нахождения V_y не требуется знания x_1, так как уже проведено разделение переменных на «квадратичные» и прочие. Поэтому первые s уравнений — линейные неоднородные относительно вектора x_1, матрица $aa^T - E_s$ невырождена в силу утверждения 1. Следовательно, отсюда вектор x_1 определяется однозначно. Этот же вектор удовлетворяет и уравнениям (3.2) в проекции на координатные y-оси (т. е. уравнениям с номерами от $s + 1$ до $s + m$) в силу линейной зависимости строк матрицы T (см. утверждение 2). Слагаемые Γ и OV', содержавшиеся в (2.2), имеют степень не ниже $-2\mu - 2$, поэтому найденное $\xi_1(t)$ является искомым первым приближением.

4. Структура линейного оператора. Предлагается искать формальное решение в виде

$$\begin{gathered} x^i(t) = \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{\infty} x_j{}^i t^{-j\mu}, \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ y^i(t) = \sum_{j=2}^{\infty} y_j{}^i t^{-j\mu}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ p^i(t) = \sum_{j=2}^{\infty} p_j{}^i t^{-j\mu}, \quad i = 1, 2, \ldots, r \\ z(t) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j t^{-j\mu} \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь x_j^t, $y^t{}_j$, p_j^t, z_j — полиномы некоторых степеней от аргумента $\tau = \ln t$, при $j = 1$ получаем построенное выше первое приближение $\xi_1(t)$. Если вопреки сделанному предположению $L_A \cap L_X = L_Q \neq \{0\}$, то соответствующие координаты можно найти в виде

$$q^t(t) = \frac{1}{t^2} \sum_{j=1}^{\infty} q_j^t t^{-\mu - j\mu}$$

Решение формальное, поэтому вопрос о сходимости рядов не рассматривается.

Предположим, что уже построено $(N-1)$-е приближение (т. е. ряды типа (4.1), где сумма берется не до бесконечности, а лишь до $N-1$), которое удовлетворяет уравнениям (2.2) до членов порядка $-(N-1)\mu - 2$ включительно. Построим N-е приближение, удовлетворяющее (2.2) вплоть до членов порядка $-N\mu - 2$ по t. Собирая члены при $t^{-N\mu-2}$, получаем

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ y_N'' - (2N\mu + 1)\, y_N' \\ p_N'' - (2N\mu + 1)\, p_N' \\ z_N'' - (2N\mu + 1)\, z_N' \end{matrix} \right\| - B_N \left\| \begin{matrix} x_N \\ y_N \\ p_N \\ z_N \end{matrix} \right\| = \eta \tag{4.2}$$

η — некоторый вектор-полином от τ, коэффициенты которого выражаются через найденные ранее ξ_j. Штрихом обозначено дифференцирование по τ, B_N — некоторый постоянный линейный оператор. Надо решить систему (4.2) (т. е. найти полиномы x_N, y_N, p_N, z_N) для всякого N при любой правой части. Этому и будет посвящена оставшаяся часть доказательства.

5. Исследование линейного оператора. Матрица B_N определяется следующим образом:

$$B_N = TV''(\xi_1) - c_N E_{ypz}$$

здесь V'' — $(n \times n)$-матрица, составленная из вторых производных потенциала V, взятых в точке ξ_1, $c_N = N\mu\,(N\mu + 1)$, E_{ypz} — диагональная матрица, первые s диагональных элементов — нули, а последние $m + r + 1$ — единицы. Блочная структура матрицы B_N такова:

$$B_N = \left\| \begin{matrix} aa^T - E_s & ab^T V_{yy} & ab^T V_{yp} & ab^T V_{yz} \\ ba^T & (bb^T - E_m)\, V_{yy} - c_N E_m & (bb^T - E_m)\, V_{yp} & (bb^T - E_m)\, V_{yz} \\ 0 & -V_{py} & -V_{pp} - c_N E_r & 0 \\ 0 & -V_{zy} & 0 & -V_{zz} - c_N \end{matrix} \right\|$$

Все частные производные берутся в точке ξ_1.

Утверждение 3. Справедливо неравенство $\det B_N \neq 0$ при $N \neq N^0 = k/2$.

Вычитая из y-строк x-строки с соответствующими коэффициентами, можем добиться того, что диагональные элементы y-строк станут равны $-c_N$, а все прочие элементы этих строк будут нулевые. Тогда, раскрывая по ним детерминант, получим

$$\det B_N = \text{const}\,(c_N)^m \det(aa^T - E_s) \det \left\| \begin{matrix} -V_{pp} - c_N E_r & 0 \\ 0 & -V_{zz} - c_N \end{matrix} \right\|$$

Как уже отмечалось, $\det(aa^T - E_s) \neq 0$, второй определитель также не обращается в нуль при $N \neq N^0$, а при $N = N^0$ нуль является однократным собственным числом матрицы B_N и $c_N = -V_{zz}$.

Утверждение 4. Ядро матрицы B_{N^0} одномерно.

Пусть $\xi \in \operatorname{Ker} B_{N^0}$, тогда

$$(aa^T - E_s)x + ab^T(V_{yy}y + V_{yp}p + V_{yz}z) = 0$$
$$ba^Tx + (bb^T - E_m)(V_{yy}y + V_{yp}p + V_{yz}z) = c_{N^0}y$$
$$-V_{py}y - V_{pp}p - c_{N^0}p = 0, \quad -V_{zy}y = 0$$

Рассматривая использовавшуюся уже линейную комбинацию первых s-строк, получим $y = 0$ и $p = 0$, но тогда по числу z вектор x восстанавливается однозначно. Следовательно, ядро B_{N^0} одномерно и порождается вектором $\xi_* = (x_*, 0, 0, 1)^T$.

Утверждение 5. Вектор $(0, 0, 0, 1)^T$ не принадлежит $\operatorname{Im} B_{N^0}$.

Доказывается от противного с использованием блочной структуры матрицы B_{N^0}.

6. Доказательство разрешимости (4.2). Решением для всякого N должен быть вектор-полином от τ. Будем его строить, начиная с наивысших степеней τ, входящих в правую часть, каждый раз понижая эту степень на единицу. Предположим, что наивысшая оставшаяся степень j-я и коэффициент при ней есть $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)^T$.

Случай 1. $N \neq N^0$. Тогда линейный оператор B_N невырожден, возьмем в качестве коэффициента при $(\tau)^j$ в ξ_N вектор $-B_N^{-1}\alpha$.

Случай 2. $N = N^0$. Не исключено, что $\alpha \notin \operatorname{Im} B_{N^0}$; разложим α на две компоненты: $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta \in \operatorname{Im} B_{N^0}$, а $\gamma = (0, \ldots, 0, \gamma^n)$. Это возможно согласно утверждению 5. Тогда положим в ξ_{N^0} соответствующие компоненты равными

$$-B_{N^0}^{-1}\beta(\tau)^j - \gamma^n\xi_*(\tau)^{j+1}/[(j+1)(2N\mu+1)]$$

При подстановке в (4.2) получим требуемое $\alpha(\tau)^j$.

Таким образом, доказана разрешимость (4.2), а следовательно, построено формальное решение системы (1.2). Доказательство леммы закончено.

В силу сказанного выше доказана и теорема.

7. Некоторые следствия. *Следствие 1.* Если выполнены условия теоремы, то система (1.2) обладает асимптотическими движениями. Количество таких движений не менее чем число точек локального минимума функции $V_k{}^*$ на единичной сфере из L_B, в которых она отрицательна.

Следствие 2. Если отказаться от неголономных связей ($m = 0$), то получится теорема 1 из [6], где выведен аналогичный критерий для натуральных механических систем.

Следствие 3. Как видно из доказательства, при нечетном k построенное формальное решение не содержит логарифмов.

Автор благодарит В. В. Козлова за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge: Cambr. Univ. Press., 1937; N. Y.: Dover, 1944. 456 p.
2. *Козлов В. В.* Об устойчивости равновесий неголономных систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 2. С. 289—291.
3. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitatssatze von Lagrange — Dirichlet ind Rauth // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1971. V. 42. № 4. P. 281—316; 1972. V. 47. № 5. P. 395.
4. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1980. № 4. С. 84—89.
5. *Козлов В. В., Паламодов В. П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 285—289.

6. *Козлов В. В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа — Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928—937.
7. *Кузнецов А. Н.* Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 2. С. 41—51.
8. *Козлов В. В.* Гипотеза о существовании асимптотических движений в классической механике // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 4. С. 72—73.
9. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
10. *Козлов В. В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. № 4. С. 573—577.

Свердловск

Поступила в редакцию
12.V.1988