Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.36

А. П. Иванов

О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОСЛАБЛЕНИИ НЕУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СВЯЗИ

Система с идеальной неудерживающей связью $q_1 \geqslant 0$ изучается в окрестности такого положения равновесия, в котором реакция этой связи не равна нулю. Предполагается, что при $q_1 \equiv 0$ равновесие устойчиво. Показано существование семейства периодических движений с ударами о связь, период таких движений стремится к нулю вместе с их амплитудой. В первом приближении исследована орбитальная устойчивость периодических движений. Показана возможность применять для нелинейного анализа некоторые результаты КАМ-теории. В частности, получены условия устойчивости положения равновесия многомерной системы для большинства начальных условий.

1. Предмет исследования. Рассмотрим каноническую систему M с функцией Гамильтона

$$H = T + \Pi,\ 2T = a_{ij}(\mathbf{q})\, p_i p_j,\ \Pi = \Pi(\mathbf{q}),\ \mathbf{q} \in R^n \qquad (1.1)$$

и идеальной неудерживающей связью $q_1 \geqslant 0$; удары о связь абсолютно упруги. Здесь и всюду далее принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам: $i, j = 1, \ldots, n$; $k, m = 2, \ldots, n$.

Если при $\mathbf{q} = 0$ выполнены условия

$$\partial\Pi/\partial q_1 > 0, \quad \partial\Pi/\partial q_2 = 0, \ldots, \partial\Pi/\partial q_n = 0 \qquad (1.2)$$

то начало координат фазового пространства является положением равновесия системы M [1].

Вопрос об устойчивости положения равновесия можно решить из рассмотрения системы M' с $n - 1$ степенью свободы и гамильтонианом $H' = H\,|_{q_1=p_1=0}$: справедливо утверждение [2].

Теорема 1. Представим функцию $\Pi' = \Pi\,|_{q_1=0}$ в виде

$$\Pi' = \Pi_s' + \Pi_{s+1}' + \ldots \qquad (1.3)$$

где Π_s' — однородный полином от $q_2, \ldots, q_n$ степени s. Если функция Π_s' положительно определена (может принимать отрицательные значения), то нулевое положение равновесия системы (1.1) устойчиво по Ляпунову (неустойчиво).

Связь между устойчивостью систем M и M' при наличии в H членов вида $a_j p_j$ более сложна (в этом случае условия равновесия помимо равенств (1.2) включают в себя требования $a_j = 0$ при $\mathbf{q} = 0$).

Как показано в [2], устойчивость системы M' необходима для устойчивости M, но, как видно из следующего примера, она недостаточна.

Пример. Для системы с гамильтонианом

$$H = p_1^2/2 + |q_1| + r_2 - 2r_3 + (p_1^2/2 + |q_1|)\, r_2 r_3^{1/2} \sin(2\varphi_2 + \varphi_3)$$
$$2r_j = q_j^2 + p_j^2 \quad (j = 2, 3)$$

где r, φ — канонические полярные переменные [3], описывающие движение в окрестности равновесия. Система M' описывается гамильтонианом $H' = r_2 - 2r_3$ и является интегрируемой: $r_2 = \mathrm{const}$, $r_3 = \mathrm{const}$. Ввиду этого положение равновесия $r_2 = r_3 = 0$ системы M' устойчиво, несмотря на знакопеременность гамильтониана возмущенного движения (гиростабилизация). Если в силу начальных возмущений значения переменных q_1, p_1 отличны от нуля, то ввиду наличия у системы M первого интеграла $p_1^2/2 + |q_1| = \mathrm{const}$ получаем известный случай неустойчивости при резонансе третьего порядка [3].

Достаточные условия устойчивости предоставляются следующим утверждением [2].

Теорема 2. Если в разложении (1.3) функция Π_s' определена положительно, то равновесие системы M (при наличии линейных по $\mathbf{p}$ членов) устойчиво по Ляпунову.

Замечание. Если система M' имеет одну степень свободы, то ее устойчивость не может быть обусловлена гиростабилизацией и возможна лишь при нулевой степени неустойчивости. Поэтому в данном случае теорема 1 справедлива и при наличии в (1.1) линейных по $\mathbf{p}$ членов.

В данной работе обсуждается поведение системы M в окрестности начала координат фазового пространства при условии, что система M' устойчива. Помимо исследования характера равновесия в случаях, не решаемых теоремами 1, 2, здесь изучаются движения с периодическими ударами и их орбитальная устойчивость.

2. Гамильтониан возмущенного движения. Определим вспомогательную систему M^* с n степенями свободы, свободную от неудерживающей связи. Для этого будем считать, что обобщенные координаты в M выбраны так, что в (1.1) $a_{1k} \equiv 0$ $(k = 2, \ldots, n)$. Существование таких координат показано в [4], соответствующая замена переменных в канонической форме имеет довольно простой вид. Если производящая функция преобразования $\mathbf{q}, \mathbf{p} \mapsto \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ такова:

$$Z = q_1 P_1 + f_k(\mathbf{q}) P_k \tag{2.1}$$

то $p_1 = P_1 + P_m \partial f_m/\partial q_1$, $p_k = P_m \partial f_m/\partial q_k$ и условие отсутствия в преобразованном гамильтониане произведений $P_1 P_j$ запишется как $\partial f_k/\partial q_1 = -a_{1k}/a_{11}$. Добавляя к этим дифференциальным уравнениям начальные условия $f_k = q_k$ при $q_1 = 0$, получим замену (2.1), невырожденность которой при $q_1 > 0$ следует из теоремы Линделефа [5].

При наличии в гамильтониане (1.1) линейных по $\mathbf{p}$ слагаемых можно без ограничения общности считать, что в дополнение к равенствам $a_{1k} \equiv 0$ выполнено условие $a_1 \equiv 0$ [2].

Функция Гамильтона H^* определяется так:

$$H^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(|q_1|, q_2, \ldots, q_n, \mathbf{p}), \quad \partial H/\partial q_1|_{q_1=0} = \min\{0, \partial H/\partial q_1|_{q_1=+0}\} \tag{2.2}$$

Траектории $\mathbf{q}^*(t)$, $\mathbf{p}^*(t)$ системы M^* непрерывны и связаны с траекториями системы M соотношениями

$$q_1(t) = |q_1^*(t)|, \quad p_1(t) = p_1^*(t) \operatorname{sign} q_1^*(t), \quad q_k(t) = q_k^*(t), \; p_k = p_k^* \tag{2.3}$$

Если в положении равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ выполнены условия (1.2), то функцию H^* можно представить в виде

$$\begin{gathered} H^* = {}^1/_2 a_{11}^\circ p_1^2 + {}^1/_2 \mathring{a}_{km} p_k p_m + c_{km} q_k p_m + b_1 |q_1| + \\ + |q_1| [U_1(\mathbf{q}') + V_1(\mathbf{p}')] + U_2(\mathbf{q}') + {}^1/_2 b_{11} q_1^2 + H_3 + \ldots + H_s + \ldots \\ b_1 > 0, \quad \mathbf{q}' = (q_2, \ldots, q_n), \quad \mathbf{p}' = (p_2, \ldots, p_n) \end{gathered} \tag{2.4}$$

где U_1, V_1 — линейные, а U_2 — квадратичная формы, H_s — сумма членов степени s относительно $|q_1|$, $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}$.

Поскольку в данной работе равновесие системы M' предполагается устойчивым, существует такое линейное каноническое преобразование $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}' \to \mathbf{Q}'$, $\mathbf{P}'$, что квадратичная по $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{P}'$ часть гамильтониана (2.4) имеет нормальную форму [3]

$$
{}^1/_2 \overset{\circ}{a}_{km} p_k p_m + c_{km} q_k p_k + U_2(\mathbf{q}') = {}^1/_2 \lambda_k (\mathbf{Q}_k{}^2 + \mathbf{P}_k{}^2) \quad \lambda_k \in R \tag{2.5}
$$

3. Периодические движения в окрестности равновесия. Важную роль для локального нелинейного анализа играет известная теорема Ляпунова о голоморфном интеграле [6], устанавливающая в случае аналитической функции Гамильтона для каждой пары чисто мнимых корней характеристического уравнения $\pm i\lambda$ и отсутствии других корней вида $i\lambda N$, $N \in Z$, семейства периодических решений, период которых стремится к $2\pi/\lambda$ при стремлении амплитуды к нулю.

Для функции (2.4), (2.5) требования к гладкости, как показывает следующее утверждение, можно ослабить.

Теорема 3. Пусть в окрестности точки $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$ гамильтониан имеет вид

$$
\begin{gathered}
2H = a_{11}{}^\circ p_1{}^2 + 2b_1 \mid q_1 \mid + b_{11} q_1{}^2 + 2 \mid q_1 \mid (b_{1k} q_k + \\
+ c_{1k} p_k) + \lambda_k (q_k{}^2 + p_k{}^2) + H_1, \quad a_{11}{}^\circ > 0, \quad b_1 > 0, \quad \lambda_k \in R
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

где $H_1 = H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция, равная при $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$ нулю вместе со своими частными производными первого и второго порядков. Если ни одна из величин λ_j не равна нулю, то система (3.1) допускает при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ семейство ε-периодических решений, для которых

$$
q_1 = O(\varepsilon^2), \quad p_1 = O(\varepsilon), \quad q_j, p_j = O(\varepsilon^s), \quad s \geqslant 2 \tag{3.2}
$$

Замечание. Семейство (3.2) соответствует движениям системы M с ударами о связь. В отличие от классической формулировки период движений стремится к нулю вместе с их амплитудой.

Доказательство теоремы 3. Перейдем от переменных q_1, p_1 к каноническим переменным I, w при помощи 2π-периодической по w замены, имеющей при $\mid w \mid \leqslant \pi$ вид

$$
\begin{gathered}
q_1 = \alpha I^{2/3} w (\pi - \mid w \mid), \quad p_1 = \beta I^{1/3} (\pi/2 - \mid w \mid) \\
\alpha = 2 \frac{a_{11}{}^\circ}{b_1} \left(\frac{3b_1}{2\pi^2 a_{11}{}^\circ} \right)^{2/3}, \quad \beta = 2 \left(\frac{3b_1}{2\pi^2 a_{11}{}^\circ} \right)^{1/3}
\end{gathered}
$$

и одновременно введем канонические переменные x_k, y_k по формулам $q_k + ip_k = \sqrt{2} x_k$, $iq_k + p_k = \sqrt{2} y_k$.

Функция (3.1) в новых переменных имеет вид

$$
H = \gamma I^{2/3} + i\lambda_k x_k y_k + I^{2/3} L_1 + I^{2/3} F(I, w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \gamma = {}^1/_4 \pi^2 b_1 \alpha \tag{3.3}
$$

где L_1 — линейная функция от $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ с 2π-периодическими по w коэффициентами, функция F: а) непрерывна и 2π-периодична по w, б) непрерывна по I и непрерывно дифференцируема при $I \neq 0$, в) дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, г) при $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$ имеем $F = \partial F/\partial \mathbf{x} = \partial F / \partial \mathbf{y} = 0$, а функция G трижды непрерывно дифференцируема и ее частные производные первого и второго порядков равны нулю при $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$.

Если окажется, что $L_1 \equiv 0$, то обсуждаемые периодические решения можно выписать сразу

$$
\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0, \quad I = I_0 = \mathrm{const}, \quad w^\cdot = {}^2/_3 \gamma I_0^{-1/3} = 2\pi/\varepsilon \tag{3.4}
$$

В общем случае для построения этих решений необходимо выполнить ряд преобразований. Если $I \sim \varepsilon^3$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \sim \varepsilon^{3/2}$, то величина H будет порядка ε^2. Зафиксируем значение $H = H^\circ \neq 0$ и положим $I = (H^\circ/\gamma)^{3/2} + r$. Рассматривая равенство (3.3) как неявно заданную функцию $r(w, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, осуществим изоэнергетическую редукцию [6]. Редуцированная система такова:

$$d\mathbf{x}/dw = \partial r/\partial \mathbf{y},\ d\mathbf{y}/dw = -\partial r/\partial \mathbf{x},\ r = i\alpha_1\varepsilon\lambda_k x_k y_k + \\ + \varepsilon^3[f_k(w)x_k + g_k(w)y_k] + \varepsilon^3 F_0(w, \varepsilon, \mathbf{x}, \mathbf{y}),\quad \alpha_1 \in R \tag{3.5}$$

где функция F_0 дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $F_0 = \partial F_0/\partial \mathbf{x} = \partial F_0/\partial \mathbf{y} = 0$ при $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Сделаем в системе (3.5) каноническое преобразование $\mathbf{x}, \mathbf{y} \to \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ с производящей функцией $S = x_k y_k^* + a_k(w)x_k + b_k(w)y_k^*$. Связь между старыми и новыми переменными описывается соотношениями $\mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \mathbf{a}$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{b}$, а новый гамильтониан имеет вид

$$r^* = r + \partial S/\partial w = r(\mathbf{x}^* - \mathbf{b}, \mathbf{y}^* + \mathbf{a}) + a_k'(x_k^* - b_k) + b_k' y_k^* \tag{3.6}$$

Коэффициенты $a_k(w)$, $b_k(w)$ выберем таким образом, чтобы члены первого порядка по $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ в (3.6) оказались равными нулю. Учитывая, что линейная часть функции $r(\mathbf{x}^* - \mathbf{b}, \mathbf{y}^* + \mathbf{a})$ вычисляется по формуле $r_1 = x_k^*\partial r(-\mathbf{b}, \mathbf{a})/\partial x_k^* + y_k^*\partial r(-\mathbf{b}, \mathbf{a})/\partial y_k^*$, получим для определения $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_j' + i\alpha_1\varepsilon\lambda_j a_j + \varepsilon^3 f_j + \varepsilon^3\partial F_0(w, -\mathbf{b}, \mathbf{a})/\partial x_j = 0 \\ &b_j' - i\alpha_1\varepsilon\lambda_j b_j + \varepsilon^3 g_j + \varepsilon^3\partial F_0(w, -\mathbf{b}, \mathbf{a})/\partial y_j = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Задача нормализации будет решена, если найти 2π-периодическое решение системы (3.7). В этом случае система (3.6) примет вид $r^* = i\varepsilon\alpha_1\lambda_k x_k^* y_k^* + \varepsilon^3 F_0^*(w, \varepsilon, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, где частные производные функции F_0^* по $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ равны нулю при $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \mathbf{0}$. Искомые периодические решения таковы: $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \mathbf{0}$, $r^* = \varepsilon^3 F_0^*(w, \varepsilon, 0, 0)$.

Построение периодических решений системы (3.7) проведем методом последовательных приближений. В качестве первого приближения возьмем $\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}$. Последующее приближение связано с предыдущим соотношениями

$$\begin{aligned} &a_j'^{(s+1)} + i\varepsilon\alpha_1\lambda_j a_j^{(s+1)} + \varepsilon^3 f_j = -\varepsilon^3\partial F_0^{(s)}/\partial x_j \\ &b_j'^{(s+1)} - i\varepsilon\alpha_1\lambda_j b_j^{(s+1)} + \varepsilon^3 g_j = -\varepsilon^3\partial F_0^{(s)}/\partial y_j \\ &F_0^{(s)} = F_0(w, -\mathbf{b}^{(s)}, \mathbf{a}^{(s)}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Система (3.8) распадается на $(2n - 2)$ однотипных линейных уравнений вида $z' + i\varepsilon\lambda z = -\varepsilon^3 f(w)$, где по условию $\lambda \neq 0$. Данное уравнение имеет при достаточно малых ε (так что величина $\varepsilon\lambda$ не является целым числом) периодическое решение

$$z = -\varepsilon^3 e^{-i\varepsilon\lambda w}\int_0^w e^{i\varepsilon\lambda w} f(w)\,dw + Ce^{-i\varepsilon\lambda w} \tag{3.9}$$

$$C = \varepsilon^3(1 - e^{2\pi i\varepsilon\lambda})^{-1}\int_0^{2\pi} e^{i\varepsilon\lambda w} f(w)\,dw \sim \varepsilon^2$$

Формулы (3.8), (3.9) определяют последовательные приближения как 2π-периодические функции w. Если определить норму вектор-функции как

$$\|\mathbf{a}, \mathbf{b}\| = \max_{w \in [0, 2\pi]} \sum_{j=2}^{n} (|a_j(w)| + |b_j(w)|)$$

то из непрерывной дифференцируемости функций $\partial F_0/\partial \mathbf{x}$, $\partial F_0/\partial \mathbf{y}$ и формулы (3.9) для достаточно малых значений ε следует неравенство

$$\|\mathbf{a}_1^{(s+1)} - \mathbf{a}_2^{(s+1)}, \mathbf{b}_1^{(s+1)} - \mathbf{b}_2^{(s+1)}\| \leqslant \mu \|\mathbf{a}_1^{(s)} - \mathbf{a}_2^{(s)}, \mathbf{b}_1^{(s)} - \mathbf{b}_2^{(s)}\|, \quad \mu < 1 \quad (3.10)$$

где $\mathbf{a}_1^{(s)}$ $\mathbf{b}_1^{(s)}$ и $\mathbf{a}_2^{(s)}$, $\mathbf{b}_2^{(s)}$ — произвольные периодические функции w, а $\mathbf{a}_1^{(s+1)}$, $\mathbf{b}_1^{(s+1)}$ и $\mathbf{a}_2^{(s+1)}$, $\mathbf{b}_2^{(s+1)}$ — соответствующие им решения системы (3.8).

Вследствие неравенства (3.10) итерационный процесс сходится к решению системы (3.7). Тем самым завершается построение периодических решений, а оценка (3.2) следует из формулы (3.9).

Следствие [7, 8]. Функцию (3.1) можно посредством канонического преобразования привести к виду

$$H = f(I) + F(w, I, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (3.11)$$

где $\partial F/\partial \mathbf{q} = \partial F/\partial \mathbf{p} = 0$ при $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$, $f' \to \infty$ при $I \to 0$.

Замечание. Если функция H_1 в (3.1) аналитична, то решения системы (3.7) также аналитично зависят от ε [9]. В этом случае периодические решения (3.2) можно представить сходящимися рядами по параметру ε, как в классической формулировке теоремы.

Пример. Движение материальной точки вдоль вертикали не ниже горизонтальной опоры описывается гамильтонианом $H = {}^1/_2 p^2 + g\,|q|$, где g — ускорение свободного падения. Общее решение можно представить ε-периодическими функциями, имеющими при $|t| \leqslant \varepsilon/2$ вид

$$q = {}^1/_2 gt\,({}^1/_2\varepsilon - |t|), \quad p = g\,({}^1/_4\varepsilon - |t|)$$

При этом $\max|q| = q({}^1/_4\varepsilon) = {}^1/_{32} g\varepsilon^2$, $\max|p| = p(0) = {}^1/_4 g\varepsilon$.

4. Орбитальная устойчивость периодических движений. При исследовании орбитальной устойчивости периодических движений, построенных выше, первостепенную роль играет квадратичная часть функции (3.6)

$$r^* = {}^1/_2 \alpha_1 \varepsilon \lambda_k (q_k^2 + p_k^2) + \varepsilon^3 B(w, \varepsilon, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (4.1)$$

где B — квадратичная форма относительно $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ с 2π-периодическими по w коэффициентами. В формуле (4.1) главной частью при $\varepsilon \to 0$ является первое слагаемое.

Для выяснения характера зависимости мультипликаторов системы (4.1) от параметра ε, характеризующего амплитуду исследуемых периодических движений, воспользуемся теоремой Крейна—Гельфанда—Лидского о сильной устойчивости [10]. Согласно этой теореме, если числа σ_j не удовлетворяют ни одному из резонансных соотношений вида

$$\sigma_r + \sigma_s = N, \quad N \in Z \quad (r, s = 1, \ldots, n) \quad (4.2)$$

то найдется такое число $\delta = \delta(\sigma) > 0$, что при выполнении неравенства

$$\max_{t \in [0, 2\pi],\ |\mathbf{q}|=1,\ |\mathbf{p}|=1} |H_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})| < \delta \quad (4.3)$$

система с гамильтонианом

$$H = {}^1/_2 \sigma_k (q_k^2 + p_k^2) + H_1(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{q}, \mathbf{p} \in R^n \quad (4.4)$$

устойчива. Иными словами, в отсутствие резонансов мультипликаторы при малом возмущении функции Гамильтона не покидают единичной окружности в комплексной плоскости.

В применении к системе (4.1), если среди чисел λ_k нет нулевых или противоположных, то условие отсутствия резонансов вида (4.2) можно удовлетворить для $\varepsilon \in]\,0, \varepsilon_0]$, где значение ε_0 определяется из условий

$$\alpha_1\varepsilon_0 \max_j |\lambda_j| < {}^1/_2; \quad \alpha_1\varepsilon_0 \max_{r\neq s} |\lambda_r + \lambda_s| < 1 \tag{4.5}$$

Рассмотрим наряду с (4.1) систему, зависящую от параметра μ

$$H_\mu = \alpha_1\mu\lambda_k(q_k^2 + p_k^2)/2 + H_1(w, \varepsilon, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{4.6}$$

Если $\mu \in]\,0, \varepsilon_0]$, то существует число $\delta = \delta(\mu) > 0$, такое, что при выполнении неравенства (4.3) система (4.6) устойчива, т. е. все ее решения $\mathbf{q}_\mu(w)$, $\mathbf{p}_\mu(w)$ — ограниченные функции при $w \in R$. Обозначим $\delta_0 = \min \delta(\mu)$ при $\mu \in [\varepsilon_0/2, \varepsilon_0]$.

Функции $\mathbf{q}_\mu(\nu w)$, $\mathbf{p}_\mu(\nu w)$ — решения системы

$$H_\mu' = \alpha_1\mu\nu\lambda_k(q_k^2 + p_k^2)/2 + \nu H_1(\nu w, \varepsilon, \mathbf{q}, \mathbf{p})$$

которая переходит в (4.1) при выполнении равенств

$$\mu\nu = \varepsilon, \quad \nu H_1(w, \varepsilon, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \varepsilon^3 B(w/\nu, \varepsilon, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{4.7}$$

Если $\nu^{-1} \in Z$, то функция H_1, определенная в (4.7), 2π-периодична по w. Поскольку для любого $\varepsilon \in]\,0, \varepsilon_0]$ найдется $N \in Z$, такое, что $\mu = N\varepsilon \in [\varepsilon_0/2, \varepsilon_0]$, то, полагая в (4.7) $\nu = N^{-1}$, получим условие устойчивости системы (4.1) в виде

$$\varepsilon^2\varepsilon_0 \max_{w\in[0,2\pi],\ |\mathbf{q}|=|\mathbf{p}|=1} |B(w, \varepsilon, \mathbf{q}, \mathbf{p})| \leqslant \delta_0(\lambda) \tag{4.8}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Если среди характеристических показателей системы M_1 нет равных нулю или противоположных, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ движения системы M с ε-периодическими ударами о неудерживающую связь $q_1 \geqslant 0$ орбитально устойчивы в первом приближении.

Изучим механизм возникновения неустойчивости периодических решений в случае, когда все числа λ_j положительны, что гарантирует, в силу теоремы 2, устойчивость положения равновесия.

Производная функции (4.1) по параметру ε имеет вид

$$dH/d\varepsilon = {}^1/_2\alpha_1\lambda_k(q_k^2 + p_k^2) + 3\varepsilon^2 B + o(\varepsilon^2) \tag{4.9}$$

Если

$$3\varepsilon^2 \max_{w\in[0,2\pi],\ |\mathbf{q}|=|\mathbf{p}|=1} |B| < \alpha_1 \min_j \lambda_j$$

то функция (4.9) положительно определена. При этом мультипликаторы первого рода системы (4.1), выходящие при $\varepsilon = 0$ из точки $\rho = 1$ единичной окружности, движутся по этой окружности против часовой стрелки [10]. Если при $\varepsilon = \varepsilon^*$ один из мультипликаторов (и, следовательно, как минимум два) становится равным -1, а характеристическая матрица имеет при этом непростые элементарные делители, то по теореме Крейна—Любарского [10] найдется такое $\varepsilon_1 > \varepsilon^*$, что при $\varepsilon \in [\varepsilon^*, \varepsilon_1]$ рассматриваемое периодическое движение неустойчиво.

Возможен и другой случай возникновения неустойчивости: если с ростом ε функция (4.9) перестает быть положительно определенной, то мультипликатор $\rho(\varepsilon)$ может начать двигаться вдоль единичной окружности по часовой стрелке к значению $\rho = 1$, достигая его при $\varepsilon = \varepsilon^*$. И в этом случае вопрос о потере устойчивости решается теоремой Крейна—Любарского.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 5. Если характеристические показатели системы M' положительны, то потеря устойчивости ε-периодических движений с ударами о неудерживающую связь при $\varepsilon > \varepsilon^*$ сопровождается возникновением при $\varepsilon = \varepsilon^*$ периодического ($\rho = 1$) или антипериодического ($\rho = -1$) решения уравнений в вариациях.

Пример. Материальная точка, движущаяся в вертикальной плоскости не ниже гладкой кривой $y = f(x)$, находится в устойчивом равновесии в критической точке x°, если $f''(x^\circ) > 0$; при этом $\lambda = [f''(x^\circ)]^{1/2}$. Движения с периодическими ударами описываются формулами

$$x = x^\circ, \quad y = {}^1/_2 g\,|t|\,({}^1/_2\varepsilon - |t|) \text{ при } |t| \leqslant {}^1/_2\varepsilon, \quad y(t+\varepsilon) = y(t)$$

а высота подскока h равна $g\varepsilon^2/8$. Если в первом приближении заменить кривую параболой $y = {}^1/_2 f''(x^\circ)(x - x^\circ)^2$, то можно подобрать h так, что система будет обладать антипериодическим движением: для этого точка должна ударяться о параболу под прямым углом. Вектор скорости точки $(v, -{}^1/_2 g\varepsilon)$ должен быть ортогонален касательному вектору к параболе $(1, {}^1/_2 f''(x^\circ)\, v\varepsilon)$, откуда получаем

$$1 = {}^1/_4 f''(x^\circ)\, g\varepsilon^2 = 2f''(x^\circ)\, h$$

что совпадает с границей области устойчивости $0 < f''(x^\circ)\, h < {}^1/_2$ (см. [11]).

В случае, когда числа λ_k имеют разные знаки, потеря устойчивости не обязательно связана с рождением периодических или антипериодических решений: к неустойчивости может также привести резонанс комбинационного типа, когда в (4.2) $r \neq s$.

5. Устойчивость в случае $n = 2$. Исследуем в случае $n = 2$ орбитальную устойчивость периодических движений в строгой нелинейной постановке.

Как показано в п.4, если положение равновесия системы M_1 устойчиво, то для достаточно малых значений ε гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$r^* = {}^1/_2\lambda\,(q_2^2 + p_2^2) + r_1(E, w, q_2, p_2) \tag{5.1}$$

где функция r_1 непрерывна и 2π-периодична по w и гладким образом зависит от постоянной энергии E, а также от q_2, p_2.

Таким образом, задача об орбитальной устойчивости периодических движений может быть решена на основе теоремы Арнольда—Мозера [8, 12]. Если ни одно из чисел $\lambda, 2\lambda, \ldots, 2l\lambda$ не является целым, то посредством нелинейного вещественного канонического преобразования систему (5.1) можно привести к нормальной форме

$$r^* = \lambda r_2 + c_2 r_2^2 + \ldots + c_l r_2^l + r_{2l+1}, \quad 2r_2 = q_2^2 + p_2^2 \qquad (5.2$$

В (5.2) r_{2l+1} — гладкая по q_2, p_2 функция порядка малости не ниже, чем $2l + 1$, непрерывная и 2π-периодичная по w. Если хотя бы один из коэффициентов c_j ($j = 2, \ldots, l$) отличен от нуля, то по теореме Арнольда—Мозера тривиальное решение системы (5.1) устойчиво. Некоторые резонансные случаи, когда $s\lambda$ является целым числом для $s \in Z^+$, рассмотрены в [3, 7].

6. Об устойчивости в многомерном случае. Современный уровень развития теории устойчивости не позволяет в случае $n \geqslant 3$ провести исследование столь же полно, как при $n = 2$. Строгие результаты об устойчивости по Ляпунову или неустойчивости положения равновесия системы, уравновешенной за счет реакции неудерживающей связи, исчерпываются случаями, рассмотренными в теоремах 1 и 2. Однако для приложений может оказаться полезным вывод об устойчивости для большинства начальных условий.

Согласно теории Колмогорова — Арнольда — Мозера, устойчивость для большинства начальных условий присуща положениям равновесия гамильтоновых систем при достаточной гладкости гамильтониана возмущенного движения и при выполнении некоторых условий невырожденности нормальной формы [8, 13]. Особенность обсуждаемого случая состоит в недифференцируемости H по переменной q_1 при $q_1 = 0$. Покажем, что данное обстоятельство не влияет на основной вывод КАМ-теории о существовании инвариантных торов, обеспечивающих устойчивость для большинства начальных условий.

Воспользовавшись результатами п. 4, представим функцию Гамильтониана в окрестности положения равновесия в виде

$$H = \alpha I_1^{2/3} + {}^1/_2\lambda_k (q_k^2 + p_k^2) + H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, I_1, w) \tag{6.1}$$

где $\partial H_1/\partial\mathbf{q} = \partial H_1/\partial\mathbf{p} = 0$ при $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$, $\partial^2 H_1/\partial\mathbf{q}^2 = \partial^2 H_1/\partial\mathbf{p}^2 = \partial^2 H_1/\partial\mathbf{q}\lambda\mathbf{p} = 0$ при $\mathbf{q} = \mathbf{p} = I_1 = 0$; функция H_1 — гладкая (дифференцируемая достаточное для применения методов КАМ-теории число раз) по $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, I_1, непрерывная и 2π-периодическая по w.

Предположим, что между характеристическими показателями отсутствуют резонансные соотношения до четвертого порядка включительно, т. е. не выполнено ни одно из равенств вида

$$\sum_{j=2}^{n} m_j\lambda_j = 0, \quad m_j \in Z, \quad \sum_{j=2}^{n} |m_j| \leqslant 4 \tag{6.2}$$

Полагая $I_1 = I_0 + r_1$, $I_0 = (E/\alpha)^{3/2}$, осуществим в системе (6.1) изоэнергетическую редукцию, считая $H = E$ и принимая w за новую независимую переменную. В результате получим такую систему с $n - 1$ степенью свободы:

$$r_1 = {}^1/_2\varepsilon\lambda_k^* (q_k^2 + p_k^2) + O(\varepsilon^2), \ \ \varepsilon \sim I_0^{1/3}, \ \ \lambda_k^* = \lambda_k^*(\varepsilon), \ \ \lambda_k^*(0) = \lambda_k \tag{6.3}$$

где невыписанные члены имеют по $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ порядок не ниже третьего.

Поскольку для чисел λ_j резонансы вида (6.2) отсутствуют, их нет и для чисел λ_j^* при достаточно малых значениях ε. При малых ε отсюда следует и отсутствие резонансов более общего вида

$$\varepsilon \sum_{j=2}^{n} \lambda_j^* m_j \in Z, \ \ m_j \in Z, \quad \sum_{j=2}^{n} |m_j| \leqslant 4 \tag{6.4}$$

которые существенны при наличии явной зависимости гамильтониана от независимой переменной.

В результате нормализации до членов четвертого порядка система (6.3) примет вид

$$r_1 = \varepsilon\lambda_k^* r_k + {}^1/_2 c_{km} r_k r_m + O(\varepsilon^2), \quad 2r_k = q_k^2 + p_k^2 \tag{6.5}$$

где коэффициенты c_{km} исчезают вместе с ε, а невыписанные члены имеют по r_k порядок не ниже, чем ${}^5/_2$, и представляют собой возмущающую часть системы, которая в отсутствие этой части интегрируема. Отличие системы (6.5) от случаев, обычно рассматриваемых КАМ-теорией, состоит в отсутствии гладкости возмущений по независимой переменной w. Однако, как показано в п. 5, в случае $n = 2$ данное обстоятельство не играет существенной роли (см. также [14], примеч. ред. к стр. 192, 194). И в случае $n \geqslant 3$ недифференцируемость по w несущественна, как показывает следующее утверждение [15].

Теорема 6. При выполнении условия невырожденности $\det \| c_{km} \| \neq 0$ (по отношению к системе (6.1) это — условие изоэнергетической невырожденности) для достаточно малых значений ε, r_k большинство нерезонансных инвариантных торов системы с функцией Гамильтона

$$H_0 = \varepsilon \lambda_k^* r_k + {}^1/_2 c_{km} r_k r_m$$

не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве системы (6.5) также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически с числом частот $n - 1$. Указанные инвариантные торы образуют большинство в том смысле, что лебеговская мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущениями. Последние предполагаются принадлежащими классу C_s, $s > 2n$ [15].

Доказательство. Если бы в системе (6.3) зависимость от w была гладкой (класса C_s), то можно было бы воспользоваться доказательствами Арнольда [13] или Мозера [8] применительно к исходной системе (6.1). В рассматриваемом случае также можно использовать эти доказательства, распространив их на системы с негладкой зависимостью гамильтониана от времени (в данном случае от независимой переменной w).

Пусть $S = S(w, \mathbf{r}', \boldsymbol{\varphi})$ — производящая функция нормализующего реобразования $\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi} \to \mathbf{r}', \boldsymbol{\varphi}'$, так что $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \partial S/\partial \boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi} + \partial S/\partial \mathbf{r}'$.

Новый гамильтониан имеет вид $r_1' = r_1(\mathbf{r}' + \partial S/\partial \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}' - \partial S/\partial \mathbf{r}, w) + \partial S/\partial w$. Учитывая периодичность функций r_1, S по угловым переменным, их можно разложить в бесконечные суммы

$$r_1 = \sum h_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, w)\, e^{i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})}, \quad S = \sum S_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, w)\, e^{i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})}$$

$$\mathbf{u} = (u_2, \ldots, u_n), \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) = u_2\varphi_2 + \ldots + u_n\varphi_n$$

Для уничтожения в нормальной форме членов, зависящих от $\boldsymbol{\varphi}$, коэффициенты S_k должны удовлетворять уравнениям [3]

$$\partial S_{\mathbf{u}}/\partial w + i\varkappa_{\mathbf{u}} S_{\mathbf{u}} + h_{\mathbf{u}} = 0, \quad \varkappa_{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}) \tag{6.6}$$

где величины $\omega_k = \partial H_0/\partial r_k$ вычисляются на инвариантном торе $r_k = \mathrm{const}$. Уравнение (6.6) имеет единственное 2π-периодическое решение, описываемое формулами, аналогичными (3.9). В соответствующих выражениях знаменатель обращается в нуль, если $\varkappa_k$ — целое число, т. е. при резонансах вида (6.4).

Оценка величины $|S_k|$ основана на следующей арифметической лемме, обобщающей известное утверждение [8], касающееся резонансов вида (6.2).

Лемма. Для почти всех $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$|1 - e^{-2\pi i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})}| \geqslant C(\boldsymbol{\omega})\, |\mathbf{u}|^{-\nu}, \quad \nu \geqslant n + 1 \tag{6.7}$$

Доказательство. Ввиду равенства

$$|1 - e^{-2\pi i(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})}| = 2\,|\sin \pi(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})|$$

оцениваемая величина близка к нулю в случае, если скалярное произведение $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u})$ близко к целому числу. Как известно, для почти всех $n + 1$-мерных векторов $\boldsymbol{\omega}^* = \{\boldsymbol{\omega}, 1\}$ выполняется неравенство

$$|(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\omega}^*)| = |(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) + u_{n+1}| \geqslant C_1(\boldsymbol{\omega})\,(|\mathbf{u}| + |u_{n+1}|)^{-\nu} \tag{6.8}$$

Если $|u_{n+1}| > 2|\mathbf{u}||\omega|$, то справедливо неравенство $|\mathbf{u}||\omega| < |(\mathbf{u}, \omega) + u_{n+1}|$, а в противном случае из (6.8) следует, что

$$|(\mathbf{u}, \omega) + u_{n+1}| \geqslant C_2(\omega)|\mathbf{u}|^{-\nu}, \quad C_2 = C_1(1 + 2|\omega|)^{-\nu}$$

Полагая $C_3(\omega) = \min\{2|\omega|, C_2(\omega)\}$, получим $|(\mathbf{u}, \omega) + u_{n+1}| \geqslant C_3(\omega)|\mathbf{u}|^{-\nu}$.

Ввиду справедливости неравенства $|\sin \pi x| \geqslant \min {}^1/_2\pi|x - N|$ $(N \in Z)$ для всех $x \in R$ имеем окончательно

$$|1 - e^{-2\pi i(\omega, \mathbf{u})}| = 2|\sin\pi(\omega, \mathbf{u})| = 2|\sin[\pi(\omega, \mathbf{u}) + \pi u_{n+1}]| \geqslant \pi\min|(\omega, \mathbf{u}) + u_{n+1}| \geqslant \geqslant \pi C_3(\omega)|\mathbf{u}|^{-\nu}$$

что и доказывает лемму.

В силу оценки (6.7) выполняется неравенство

$$|S_{\mathbf{u}}| < C_4(\omega)|h_{\mathbf{u}}||\mathbf{u}|^{-\nu} \tag{6.9}$$

имеющее одинаковый вид вне зависимости от наличия гладкости функции Гамильтона по независимой переменной w. Выполнение неравенства (6.9) обеспечивает сходимость итерационного процесса при построении инвариантных торов возмущенной системы, поэтому дальнейшая часть доказательства теоремы 6 — такая же, как и в гладком случае [8, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. *Иванов А. П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725—732.
3. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
4. *Иванов А. П., Маркеев А. П.* О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632—636.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7—263.
7. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
8. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
9. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969. 395 с.
10. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
11. *Кобринский А. А., Кобринский А. Е.* Двумерные виброударные системы. М.: Наука, 1981. 335 с.
12. *Арнольд В. И.* Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255—257.
13. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. № 5. С. 13—40.
14. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528с.
15. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР, 1954. Т. 98. № 4. С. 527—530.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1988