Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 4, 1989

УДК 531.36

И. И. Косенко

О ПОСТРОЕНИИ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассматривается неавтономная периодическая гамильтонова система с одной степенью свободы в окрестности положения равновесия эллиптического типа. Ставится задача равномерной аппроксимации решения на конечном интервале времени в резонансном случае. Обычно для этого применяются методы теории возмущений. В работе предлагается использовать проекционный метод.

Проводится редукция задачи Коши к нелинейному функциональному уравнению в пространстве производных. Для этого уравнения строится галеркинская схема. Доказывается теорема о сходимости последовательности приближений к точному решению. Каждая конечномерная аппроксимация достаточно высокого порядка может быть найдена с помощью явных итераций. Результаты работы допускают обобщения на случай динамической системы более высокой размерности.

1. Постановка задачи. Вблизи положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$ каноническая система с n степенями свободы имеет вид

$$\mathbf{q}^{\cdot} = H_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}^{\cdot} = -H_{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^n) \tag{1.1}$$

где функция Гамильтона может быть разложена в степенной ряд в окрестности нуля начиная с членов второй степени:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \ldots$$

Для построения траекторий в малой окрестности можно применить теорию возмущений. Переходя к новым переменным по формулам $\mathbf{q} = \varepsilon\mathbf{x}$, $\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{y}$, получим систему уравнений

$$\mathbf{x}^{\cdot} = K_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y}^{\cdot} = -K_{\mathbf{x}} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n)$$

Новый гамильтониан имеет вид

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \varepsilon) = H_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon H_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \ldots \tag{1.2}$$

Невозмущенному случаю соответствует линейная система, в общем случае неавтономная. Используя метод вариации произвольных постоянных, можно перейти к новым переменным. Обозначая фазовый вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$, решение линейной гамильтоновой системы можно записать в виде

$$\mathbf{z} = Z(t)\,\zeta \quad (Z(0) = E, \ \zeta \in \mathbf{R}^{2n}) \tag{1.3}$$

где $Z(t)$ — фундаментальная матрица. Преобразование, ею задаваемое, очевидно, каноническое. Переходя к фазовому вектору ζ, получим гамильтонову систему

$$\zeta^{\cdot} = \varepsilon I F_{\zeta}(\zeta, t, \varepsilon) \quad (I^2 = -E) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon F(\zeta, t, \varepsilon) = \varepsilon H_3(Z(t)\,\zeta, t) + \ldots$$

После приведения исходной задачи к указанному виду можно применять предлагаемую ниже методику.

Для определенности рассмотрим систему с одной степенью свободы и 2π-периодической по времени функцией Гамильтона $K(q, p, t)$ $(q, p \in \mathbf{R})$. К такой динамической системе приводится, например, задача о движении астероида в окрестности периодической орбиты. Итак, пусть $\pm i\lambda \neq 0$ — характеристические показатели системы первого приближения, причем число 2λ — нецелое. Тогда каноническим 2π-периодическим преобразованием $(q, p) \mapsto (Q, P)$ форму H_2 можно привести к нормальному виду $H_2 = 2^{-1}\lambda (Q^2 + P^2)$.

Выполним масштабное преобразование, увеличивая окрестность положения равновесия описанным выше образом: $Q = \varepsilon x$, $P = \varepsilon y$. Решение невозмущенной задачи имеет теперь вид (1.3), где $\mathbf{z} = (x, y)^T$, $Z(t)$ — фундаментальная матрица вида

$$Z(t) = \begin{Vmatrix} \cos \lambda t & \sin \lambda t \\ -\sin \lambda t & \cos \lambda t \end{Vmatrix}$$

Поэтому

$$\mathbf{z}(t) = \zeta \cos \lambda t + I\zeta \sin \lambda t = 2^{-1}(\zeta - i\, I\zeta) e^{i\lambda t} + (2i)^{-1}(\zeta + i\, I\zeta) e^{-i\lambda t}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, I — симплектическая матрица ($I^2 = -E$). Таким образом, система дифференциальных уравнений имеет стандартный в смысле Н. Н. Боголюбова [1] вид (1.4) с функцией Гамильтона

$$\varepsilon F(\zeta, t, \varepsilon) = \varepsilon H_3 (2^{-1}(\zeta - iI\zeta) e^{i\lambda t} + (2i)^{-1}(\zeta + iI\zeta) e^{-i\lambda t}, t) + \ldots$$

Так как явная зависимость однородных форм $H_k(\mathbf{z}, t)$ $(k \geqslant 3)$ от t имеет период 2π, то их коэффициенты можно представить в виде рядов Фурье по функциям e^{int} $(n \in \mathrm{Z})$. Эти разложения можно также рассматривать как ряды Лорана относительно переменной e^{it}. Гамильтониан удобно представить в виде

$$\varepsilon F(\zeta, t, \varepsilon) = \sum_{s=3}^{\infty} \varepsilon^{s-2} F_s (\zeta, e^{i\lambda t}, e^{it})$$

где однородные по переменным ζ_i $(i = 1, 2)$ формы F_s имеют вид: $F_s = H_s(Z(t)\zeta, t)$.

Значительный интерес представляют резонансные случаи. При этом должно выполняться условие: $k\lambda = r \in \mathrm{Z}$ $(k \geqslant 3)$, и функция Гамильтона $\varepsilon F(\zeta, t, \varepsilon)$ будет периодической по t. Для удобства дальнейших преобразований перейдем к новой независимой переменной τ по формуле $t = k\tau$. Однородные формы F_s будут полиномиально зависеть от ζ, $e^{ir\tau}$, $e^{ik\tau}$, причем в разложениях по экспонентам будут присутствовать как положительные, так и отрицательные степени.

Заметим здесь, что в дальнейшем в качестве фазового пространства будем рассматривать не $\mathbf{R}^2$, а его комплексификацию $\mathbf{C}^2$.

После всех преобразований получим неавтономную, периодическую по τ систему дифференциальных уравнений второго порядка (штрихом обозначено дифференцирование по τ)

$$\zeta' = \varepsilon \mathbf{Z}(\zeta, \tau, \varepsilon) \tag{1.5}$$

$$\varepsilon \mathbf{Z}(\zeta, \tau, \varepsilon) = \varepsilon k I F_\zeta (\zeta, k\tau, \varepsilon) = \sum_{s=3}^{\infty} \varepsilon^{s-2} k I F_{s\zeta}(\zeta, e^{ir\tau}, e^{ik\tau}) = \sum_{s=3}^{\infty} \varepsilon^{s-2} \mathbf{Z}_s(\zeta, \tau) \tag{1.6}$$

Вектор-функции $\mathbf{Z}_s$ — однородные по ζ степени s.

2. Редукция. Сформулируем цель дальнейших действий: построить на отрезке $[0, 2\pi]$ решение задачи Коши системы (1.5), соответствующее вектору начальных условий ζ_0. Предлагается использовать проекционный метод. Но чтобы обеспечить равномерное приближение к решению на отрезке $[0, 2\pi]$, требуется дальнейшая трансформация задачи. Для этого выполним переход от пространства непрерывных вектор-функций $\zeta(\tau)$ к пространству производных $\zeta'(\tau)$.

Уточним формулировки. Обозначим символом CA класс функций $\zeta\colon [a, b] \to \mathbf{C}^n$, абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Известно, что CA — линейное пространство, причем если ввести норму

$$\|\zeta\|_A = \|\zeta(a)\| + \operatorname{Var}([a, b], \zeta) \tag{2.1}$$

то CA становится банаховым.

С другой стороны, рассмотрим банахово пространство L_1 классов совпадающих почти всюду интегрируемых по Лебегу функций $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{C}^n$. Норма в L_1 задается формулой

$$\|\gamma\|_1 = \int_a^b \|\gamma(\tau)\| \, d\tau \tag{2.2}$$

Пусть теперь $D\colon CA \to L_1$ — оператор дифференцирования по переменной τ: $(D\zeta)(\tau) = \zeta'(\tau)$. Из анализа известно [2] однозначное соответствие свойств суммируемости и абсолютной непрерывности функций вещественной переменной. Если функция $\zeta(\tau)$ абсолютно непрерывна, то $\zeta'(\tau)$ суммируема на $[a, b]$, и, наоборот, если $\gamma \in L_1$, то функция

$$\zeta(\tau) = (D^{-1}\gamma)(\tau) = \zeta_0 + \int_a^\tau \gamma(\alpha) \, d\alpha \tag{2.3}$$

абсолютно непрерывна. Оператор D^{-1} определен однозначно, если фиксировать вектор $\zeta_0 \in \mathbf{C}^n$.

В дальнейшем будем рассматривать решения системы дифференциальных уравнений вида (1.5). Пусть Q — окрестность положения равновесия, в которой при всех $\tau \in [a, b]$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ определена вектор-функция $\mathbf{Z}(\zeta, \tau, \varepsilon)$.

Теорема 1. Если фиксировать $\zeta_0 \in Q$, то $\zeta \in CA$ — решение задачи Коши для уравнений (1.5) на $[a, b]$ в том и только в том случае, когда $\gamma = D\zeta$ — решение функционального уравнения

$$\gamma = \Phi(\gamma) \tag{2.4}$$

в пространстве L_1, где нелинейный оператор Φ задается формулой

$$[\Phi(\gamma)](\tau) = \varepsilon \mathbf{Z}[(D^{-1}\gamma)(\tau), \tau, \varepsilon] \tag{2.5}$$

К уравнению (2.4) будем применять проекционный метод. Но для этого от пространства L_1 нужно перейти к более узкому (гильбертову) пространству L_2 классов функций $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{C}^n$ с эрмитовым произведением

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle_2 = \int_a^b \langle \gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau) \rangle \, d\tau \tag{2.6}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — эрмитово произведение в $\mathbf{C}^n$. Норма в L_2 задается формулой

$$\|\gamma\|_2 = \left(\int_a^b \|\gamma(\tau)\|^2 \, d\tau \right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Известно, что в случае конечного отрезка $[a, b]$ пространство L_2 непрерывно вложено в L_1. Поэтому его прообраз $D^{-1}(L_2)$ при фиксированном ζ_0 также будет непрерывно вложен в CA, что следует из непрерывности операторов D и D^{-1}. В итоге можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Если последовательность $\{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к решению γ уравнения (2.4) в пространстве L_2, то последовательность $\{D^{-1}\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к решению $D^{-1}\gamma$ уравнения (1.5) в пространстве CA и, в частности, равномерно.

3. Теорема об аппроксимации. Пусть $\{\mathrm{e}_j\}_{j=1}^{n}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{C}^n$, $\{g_m(\tau)\}_{m=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L_2([a, b], \mathbf{C})$. Тогда всевозможные вектор-функции $g_m(\tau)\,\mathrm{e}_j = \psi_{jm}(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, n;$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ образуют ортонормированный базис в L_2. Линейно переупорядочим систему функций $\{\psi_{jm}\}$ и полученный ортонормированный базис обозначим $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$. В рассматриваемом случае отрезка $[0, 2\pi]$ в качестве базиса $\{g_m(\tau)\}$ удобно взять тригонометрическую систему функций $\{(2\pi)^{-1/2}e^{im\tau}\}$ $(m \in \mathbf{Z})$.

Обозначим P_m $(m \in \mathbf{N})$ оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство, натянутое на первые m базисных векторов $\{\varphi_s\}_{s=1}^{m}$.

Обычно правые части уравнения (1.5) предполагаются достаточно гладкими. В рассматриваемом случае по переменным ξ имеет вместо аналитичность. Поэтому требуемое в дальнейшем условие $\mathbf{Z} \in L_2([a, b], C^1(Q))$ или

$$\|\mathbf{Z}\|^1_2 = \left\{\int_a^b [\sup_{\zeta\in Q}(\|\mathbf{Z}(\zeta, \tau, \varepsilon)\|, \|\mathbf{Z}'_\zeta(\zeta, \tau, \varepsilon)\|)]^2\, d\tau\right\}^{1/2} < \infty \tag{3.1}$$

достаточно слабо и заведомо выполнено.

В силу существования и единственности решения задачи Коши $\zeta(\tau)$ для уравнения (1.5) по теореме 1 уравнение (2.4) также должно иметь единственное решение $\zeta'(\tau)$. Остается построить галеркинские приближения $\gamma_m(\tau)$ к этой функции в пространстве L_2. Они являются решениями, вообще говоря, нелинейных, конечномерных уравнений

$$\gamma_m = P_m\Phi(\gamma_m) \quad (\gamma_m \in P_mL_2, m \in \mathbf{N}) \tag{3.2}$$

К нелинейному функциональному уравнению (2.4) применим результаты работы [3], причем нужно уточнить область определения оператора Φ. Это множество $\Omega \subset L_2$, состоящее из таких функций $\gamma(\tau)$, что при фиксированном $\zeta_0 \in Q$ для всех $\tau \in [a, b]$ выполнено $(D^{-1}\gamma)(\tau) \in Q$. Из открытости $Q \subset \mathbf{C}^n$, а также из компактности множества значений вектор-функции $(D^{-1}\gamma)(\tau)$ (так как отрезок $[a, b]$ ограничен) следует открытость в пространстве L_2 множества Ω. Итак, Ω — область в L_2.

Теорема 3. При выполнении условия (3.1) для фиксированного $\zeta_0 \in Q$ уравнение (2.4) имеет единственное решение γ°, если на всем отрезке существует решение задачи Коши для уравнения (1.5). Кроме того, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то существует такое целое N и $\delta > 0$, что при любом $m > N$ уравнение (3.2) имеет в шаре $\|\gamma - \gamma^\circ\|_2 \leqslant \delta$ единственное решение γ_m и справедливо соотношение

$$\|\gamma_m - \gamma^\circ\|_2 \leqslant \|\gamma^\circ - P_m\gamma^\circ\|_2 + \|\gamma_m - P_m\gamma^\circ\|_2 \to 0 \quad (m \to \infty)$$

причем при некоторых $c_1, c_2 > 0$ имеет место также двусторонняя оценка

$$c_1\|P_m\Phi(\gamma^\circ) - P_m\Phi(P_m\gamma^\circ)\|_2 \leqslant \|\gamma_m - P_m\gamma^\circ\|_2 \leqslant c_2\|P_m\Phi(\gamma^\circ) - P_m\Phi(P_m\gamma^\circ)\|_2$$

Эта теорема гарантирует, что найденное по схеме Галеркина (3.2) конечномерное решение $\gamma_m(\tau)$ является в L_2 приближением к точному решению $\gamma^\circ(\tau)$ уравнения (2.4).

Пусть функция γ_m найдена в виде

$$\gamma_m(\tau) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_m{}^j \varphi_j(\tau) \quad (\gamma_m{}^j \in \mathbf{C}) \tag{3.3}$$

Тогда по теореме 2 вектор-функция

$$\zeta_m(\tau) = \zeta_0 + \sum_{j=1}^{m} \gamma_m{}^j \int_a^\tau \varphi_j(\alpha)\, d\alpha$$

будет равномерным приближением к искомому решению задачи Коши.

4. Алгоритм построения приближений. Возвращаясь к двумерной системе дифференциальных уравнений (1.5), рассмотрим ортонормированный базис в пространстве вектор-функций $L_2([0, 2\pi], \mathbf{C}^2)$. Он задается при помощи тригонометрической ортонормированной системы и состоит из вектор-функций вида $(2\pi)^{-1/2} e^{is\tau}\mathbf{e}_j$ ($j = 1, 2$; $s \in \mathbf{Z}$). Перенумеруем последовательно функции базиса так, чтобы

$$\varphi_m(\tau) = (2\pi)^{-1/2} e^{is\tau}\mathbf{e}_j \; (j = m - 2[(m-1)/2],$$
$$s = [s'/2](2(s' - 2[s'/2]) - 1),\ s' = [(m-1)/2] + 1,\ m \in \mathbf{N}) \tag{4.1}$$

В схеме Галеркина будем использовать проекторы P_{4m+2}. Тогда конечномерные приближения к точному решению будут лежать в пространстве, образованном функциями $(2\pi)^{-1/2} e^{is\tau}\mathbf{e}_j$ ($j = 1, 2$; $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Напомним, что базисные векторы в $\mathbf{C}^2$ можно рассматривать как координатные столбцы: $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$. Тогда в пространстве $P_{4m+2}L_2([0, 2\pi], \mathbf{C}^2) \simeq \mathbf{C}^{4m+2}$ любую функцию можно представить в виде

$$\gamma_m(\tau) = \Sigma_m e^{is\tau}\mathbf{c}_s \quad (\mathbf{c}_s = (c_s{}^1, c_s{}^2)^T) \tag{4.2}$$

где $\mathbf{c}_s \in \mathbf{C}^2$ — произвольные комплексные вектор-столбцы. Здесь и далее Σ_m означает суммирование по s от $s = -m$ до $s = m$.

Обратим внимание на правую часть системы (1.5), задаваемую соотношением (1.6). Однородные формы $\mathbf{Z}_s(\zeta, \tau)$ с периодическими коэффициентами можно представить при помощи симметрических s-линейных форм $L_s(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s, \tau)$. Поэтому $\mathbf{Z}_s(\zeta, \tau) = L_s(\zeta, \zeta, \ldots, \zeta, \tau)$ (см. равенство (1.6)).

Чтобы вывести уравнение вида (3.2), применим к функции (4.2) оператор D^{-1}, получим

$$(D^{-1}\gamma_m)(\tau) = \zeta_0 - \Sigma_m{}' \frac{1}{is}\mathbf{c}_s + \Sigma_m{}' \frac{1}{is} e^{is\tau}\mathbf{c}_s + \tau\mathbf{c}_0 \tag{4.3}$$

Здесь и далее $\Sigma_m{}'$ означает суммирование по s от $s = -m$ до $s = -1$ и от $s = +1$ до $s = m$.

После подстановки этой формулы, а также разложений Фурье периодических коэффициентов форм L_s в правую часть (1.6) получим функцию вида

$$\varepsilon\mathbf{Z}(\zeta, \tau, \varepsilon) = \varepsilon\Sigma_\infty(\mathbf{f}_{0s}(\mathbf{c}, \varepsilon) + \mathbf{f}_{1s}(\mathbf{c}, \varepsilon)\tau + \mathbf{f}_{2s}(\mathbf{c}, \varepsilon)\tau^2) e^{is\tau} + \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon^{j-1}\tau^j \Sigma_\infty \mathbf{f}_{js}(\mathbf{c}, \varepsilon) e^{is\tau} \tag{4.4}$$

$\mathbf{c} = (c_0{}^1, c_0{}^2, c_{-1}{}^1, c_{-1}{}^2, c_1{}^1, c_1{}^2, \ldots, c_m{}^1, c_m{}^2)^T$ ($\mathbf{c}$ — вектор неизвестных коэффициентов). Функции $\mathbf{f}_{js}(\mathbf{c}, \varepsilon)$ ($j = 0, 1, \ldots$; $s = -\infty, \ldots, +\infty$)

аналитичны по c и ε. Степенные разложения могут быть получены после приведения подобных членов при произведениях вида $\tau^j e^{is\tau}$.

Представляя функции $\tau^j e^{is\tau}$ в виде рядов Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$ и подставляя эти разложения в формулу (4.4), получим правую часть в виде

$$\varepsilon \mathbf{Z}(\zeta, \tau, \varepsilon) = \varepsilon \Sigma_\infty \mathbf{h}_s(\mathbf{c}, \varepsilon) e^{is\tau} \tag{4.5}$$

Заметим, что произведения $\tau e^{is\tau}$ входят в правую часть с множителями ε^{j-1}. Это обстоятельство можно использовать при учете возмущения в процедуре разложения правых частей, так как при достаточно малых $\varepsilon > 0$ произведение $\varepsilon^{j-1}\tau^j$ стремится к нулю при $j \to \infty$.

Применяя к функции (4.5) оператор проектирования P_{4m+2}, получим уравнение Галеркина ($\mathbf{h}(\mathbf{c}, \varepsilon)$ — аналитическая вектор-функция)

$$\mathbf{c} = \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{c}, \varepsilon) \tag{4.6}$$

Решение уравнения (4.6) можно находить при помощи итераций по формуле

$$\mathbf{c}^{(n+1)} = \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{c}^{(n)}, \varepsilon) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4.7}$$

начиная с исходного приближения $\mathbf{c}^{(0)}$ (можно взять вектор $\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{0}$, являющийся решением при $\varepsilon \doteq 0$). При достаточно малых $\varepsilon > 0$ итеративный процесс будет сходиться.

В самом деле, из доказательства теоремы 3 видно, что при $\varepsilon > 0$, удовлетворяющем условию этой теоремы, производная оператора Φ в уравнении (2.4) имеет норму, меньшую единицы. Поэтому при достаточно больших m конечномерное приближение $\varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{c}, \varepsilon)$ к оператору Φ в пространстве последовательностей будет иметь производную с нормой также меньше единицы.

Поэтому в метрике эрмитова пространства C^{4m+2} отображение $\varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{c}, \varepsilon)$ будет сжимающим, что и обеспечивает сходимость итеративного процесса к точному решению уравнения (4.6).

Итак, пусть в пространстве последовательностей C^{4m+2} получено приближение $\mathbf{c}^{(n)}$ к решению уравнения (4.6). Это значит, что в метрике пространства $L_2([0, 2\pi], C^2)$ функция

$$\gamma_{4m+2}^{(n)}(\tau) = \Sigma_m e^{is\tau} \mathbf{c}_s^{(n)} \tag{4.8}$$

приближает решение (3.3) уравнения (3.2). Но функция $\gamma_{4m+2}(\tau)$ в (3.3) при достаточно большом m обеспечивает по теореме 3 приближение к точному решению $\gamma(\tau)$ уравнения (2.4). Поэтому на отрезке $[0, 2\pi]$ функция

$$\zeta_{4m+2}^{(n)}(\tau) = \zeta_0 + \tau \mathbf{c}_0^{(n)} + \Sigma_m' \frac{e^{is\tau} - 1}{is} \mathbf{c}_s^{(n)} \tag{4.9}$$

обеспечивает равномерную аппроксимацию к точному решению уравнения (1.5). Коэффициенты $\mathbf{c}_s^{(n)}$ зависят от вектора ζ_0, как от параметра. При этом формула (4.7) позволяет получить решение уравнения (4.6) как в числовом, так и в аналитическом виде.

Формулу (4.9) можно использовать, например, для построения отображения последования Пуанкаре. Для каждого начального вектора ζ_0 можно применять либо численную процедуру, либо, используя (4.9) с аналитическими выражениями для коэффициентов, строить траекторию путем подстановки в (4.9) координат различных начальных векторов ζ_0.

5. **Приложение.** *Доказательство теоремы 1.* Пространство CA может быть разложено в прямую сумму: $C^n + CA^\circ$, где CA° состоит из функций $\zeta(\tau)$, таких, что $\zeta(0) = 0$. Тогда можно доказать, что оператор дифференцирования, ограниченный на аффинное подпространство $\zeta_0 + CA^\circ$ — гомеоморфизм.

Известно, что производная абсолютно непрерывной функции является суммируемой, причем

$$\operatorname{Var}([a, b], \zeta) = \int_a^b \| (D\zeta)(\tau) \| \, d\tau = \| D\zeta \|_1$$

Из этого свойства выводится непрерывность, биективность и открытость отображения D, т. е. его гомеоморфность.

Поэтому при фиксации начального вектора ζ_0 фиксируется и аффинное подпространство $\zeta_0 + CA^\circ$, а решения уравнений (1.5) и (2.4) однозначно соответствуют одно другому в силу гомеоморфизма D: $\zeta_0 + CA^\circ \to L_1$.

Доказательство теоремы 2. Из сходимости в L_2 на конечном отрезке $[a, b]$ следует сходимость в L_1. Вследствие гомеоморфности D на подпространстве $\zeta_0 + CA^\circ$ последовательность $\{D^{-1}\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет сходиться к решению $D^{-1}\gamma$ равномерно.

Доказательство теоремы 3. Для применения результатов работы [3] необходимо проверить несколько условий.

Во-первых, нужно доказать дифференцируемость по Фреше операторов Φ и $P_m\Phi$. Отображение Φ — композиция отображений $\varepsilon \mathbf{Z} \circ D^{-1}$. Аффинный оператор D^{-1} непрерывен и, значит, дифференцируем.

Дифференцируемость $\mathbf{Z}$ можно доказать при помощи теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, рассмотрев функциональное выражение

$$\mathbf{Z}(\zeta + \mathbf{h}) - \mathbf{Z}(\zeta) - \mathbf{Z}_\zeta'(\zeta) \cdot \mathbf{h} = \omega(\mathbf{h})$$

Производная определяется по формуле

$$(\mathbf{Z}_\zeta' \mathbf{h})(\tau) = \mathbf{Z}_\zeta' [\zeta(\tau), \tau, \varepsilon] \, \mathbf{h}(\tau) \quad (\mathbf{h} \in CA)$$

Дифференцируемость $P_m\Phi$ следует из непрерывности проектора, причем $(P_m\Phi)' = P_m \circ \Phi'$.

Далее требуется установить непрерывную обратимость в гильбертовом пространстве L_2 оператора $E - \Phi'(\gamma)$, где E — тождественный оператор. Оказывается, что при помощи цепочки неравенств можно получить оценку для операторной нормы $\Phi'(\gamma)$:

$$\| \Phi'(\gamma) \|_{2,2} \leqslant (b - a)^{1/2} \varepsilon \| \mathbf{Z} \|_2^1$$

Отсюда видно, что при достаточно малых ε оператор $E - \Phi'(\gamma)$ будет обратимым.

Наконец, нужно проверить условия аппроксимации. Первое: $\| \gamma - P_m\gamma \|_2 \to 0$ $(m \to \infty)$ следует из полноты функций базиса. Второе: $\| P_m\Phi(P_m\gamma) - \Phi(\gamma) \|_2 \to 0$ $(m \to \infty)$ — из непрерывности оператора Φ. Условие аппроксимации для производных операторов: $\| P_m\Phi'(P_m\gamma) - \Phi'(\gamma) \|_{2,2} \to 0$ $(m \to \infty)$ проверяется следующим образом. Неравенство треугольника (а также оценка $\| P_m \|_{2,2} \leqslant 1$) дает

$$\| P_m\Phi'(P_m\gamma) - \Phi'(\gamma) \|_{2,2} \leqslant \| \Phi'(P_m\gamma) - \Phi'(\gamma) \|_{2,2} + \| P_m\Phi'(\gamma) - \Phi'(\gamma) \|_{2,2}$$

Так же, как и выше, при помощи теоремы Лебега доказывается непрерывность отображения Φ': $\Omega \to L(L_2)$ в алгебру линейных непрерывных операторов пространства L_2. Поэтому $\| \Phi'(P_m\gamma) - \Phi'(\gamma) \|_{2,2} \to 0$ $(m \to \infty)$. Непрерывность Φ' необходима также для доказательства существования решения уравнения (3.2) методом сжатых отображений.

Далее, можно убедиться, что оператор $\Phi'(\gamma)$ — компактный. Поэтому предкомпактно множество $\Phi'(\gamma) S$, где S — единичная сфера в L_2. Из поточечной сходимости последовательности операторов $\{P_m - E\}_{m=1}^{\infty}$ по теореме Банаха — Штейнгауза [2] следует равномерность сходимости на множестве $\Phi'(\gamma)\,S$. Поэтому окончательно получим

$$\|P_m\Phi'(\gamma)-\Phi'(\gamma)\|_{2,2}=\sup_{\|\mathbf{h}\|_2=1}\|(P_m-E)\,\Phi'(\gamma)\,\mathbf{h}\|_2\to 0\ (m\to\infty)$$

Все условия, требуемые в работе [3], для уравнения вида (2.4) проверены.

Автор благодарит В. Г. Демина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.*, *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 824 с.
3. *Красносельский М. А.*, *Вайникко Г. М.*, *Забрейко П. П.*, *Рутицкий Я. Б.*, *Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.X.1988