

М. А. Сумбатян, В. Я. Сычава

ПРОХОЖДЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ СЛОЙ  
С ЗАТУХАНИЕМ

Рассматривается одномерная задача о прохождении нестационарного импульса напряжений через акустический слой, обладающий внутренним трением. Затухание в слое описывается моделью среды Фойхта [1]. Применением преобразования Лапласа по времени задача сводится к вычислению некоторого контурного интеграла. Подынтегральная функция имеет в комплексной плоскости счетное число полюсов и одну существенно особую точку. Доказывается, что рассматриваемый интеграл может быть вычислен в виде ряда по вычетам подынтегральной функции.

1. Пусть на слой  $0 \leq z \leq h$  падает импульс напряжения  $\sigma_z = p_0(t)$ ,  $z = 0$ . Считаем слой твердым телом, обладающим внутренним трением. Общепринятой моделью внутреннего трения при распространении акустических волн в твердых телах является модель Фойхта [2]

$$\sigma_z = \lambda u' + \eta u'' \quad (1.1)$$

где  $u = u_z(z, t)$  — перемещение,  $\lambda$  — модуль упругости,  $\eta$  — вязкость, точкой обозначено дифференцирование по времени, штрихом — по координате  $z$ . Добавляя к (1.1) уравнение движения  $\rho u'' = \sigma_z'$ , приходим к уравнению относительно функции  $u$

$$\rho u'' = \lambda u'' + \eta u'' \quad (1.2)$$

Считаем для определенности, что противоположная грань слоя свободна от напряжений. Тогда граничные условия имеют вид

$$\lambda u' + \eta u'' = \begin{cases} p_0(t), & z = 0 \\ 0, & z = h \end{cases} \quad (1.3)$$

Начальные условия для простоты считаем нулевыми:  $u = u' = 0$ ,  $t = 0$ .

Применяя к соотношениям (1.2), (1.3) преобразование Лапласа по времени, для наиболее интересной характеристики — скорости перемещения грани  $z = h$  — получаем

$$v(t, h) = \frac{1}{2\pi i \rho} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{P_0(s) e^{st} ds}{\text{sh}(hs/\gamma)}, \quad \gamma = \gamma(s) = \sqrt{c^2 + \varepsilon s}, \quad \delta > 0 \quad (1.4)$$

$$c = \sqrt{\lambda/\rho}, \quad \varepsilon = \eta/\rho$$

Здесь  $c$  — скорость звука,  $P_0(s)$  — преобразование Лапласа функции  $p_0(t)$ .

2. Подынтегральная функция в (1.4) имеет существенно особую точку  $s = \alpha = -c^2/\varepsilon$ . Это отличает математические свойства рассматриваемой задачи от свойств задач, основанных на других моделях затухания [1]. Суть отличия состоит в следующем. Широкий класс моделей затухания, являющихся классическими [1], описывается интегральными операторами Вольтерры второго рода с экспоненциальными ядрами. Образы Лапласа таких ядер — однозначные аналитические функции в комплексной плоскости. В отличие от этого модель Фойхта, общепринятая в акустике, описывается интегральным оператором Вольтерры первого рода [1], что приводит в рассматриваемой задаче к наличию существенно особой точки у подынтегральной функции в (1.4). Покажем, что эта особенность не препятствует вычислению интеграла (1.4) в виде ряда по вычетам.

Будем считать для простоты, что  $p_0(t)$  действует лишь на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq T$ . Тогда  $P_0(s)$  — целая функция экспоненциального типа, причем справедлива оценка

$$P_0(s) \leq A e^{|s|T} \quad (A = \text{const}) \quad (2.1)$$

что позволяет, например, при  $t > T$  деформировать исходный контур  $L$  в контур  $L_1$  (фигура), охватывающий существенно особую точку  $\alpha$  и отрицательные полюсы  $s_k$ . При этом, конечно, учитываются вычеты в полюсах, лежащих в области между старым и новым контуром.

Разобьем контур  $L_1$  на охватывающий точку  $\alpha$  контур  $l_\varepsilon$  (дуга радиуса  $\varepsilon$ ) и множество контуров типа  $l^+$ ,  $l^-$  и  $l_\varepsilon^+$ ,  $l_\varepsilon^-$ . При этом дуги полуокружностей  $l_\varepsilon^+$  и  $l_\varepsilon^-$  радиуса

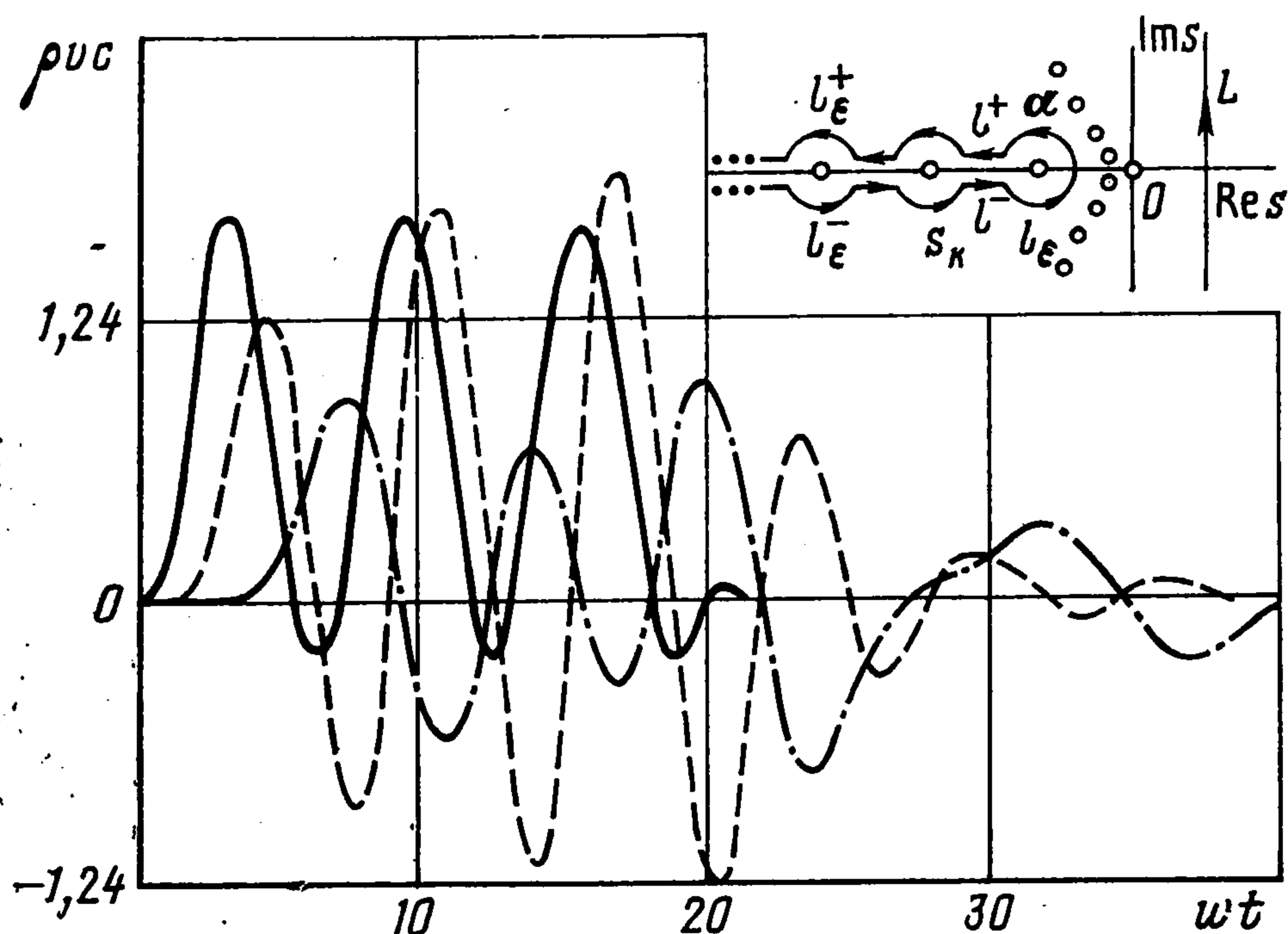
$\varepsilon$  охватывают отрицательные полюсы  $s_k$ , а контуры  $l^+$  и  $l^-$  идут по берегам вещественной оси. Прямой проверкой устанавливается справедливость следующих соотношений:

$$\left( \int_{l^+} + \int_{l^-} \right) ds = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_{\varepsilon \pm}} ds = \frac{1}{2} \operatorname{Res}(s_k), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_{\varepsilon}} ds = 0 \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что исходный интеграл в (1.4) может быть вычислен в виде ряда по вычетам подынтегральной функции.

При  $t < T$  аналогичные преобразования проводятся с использованием конкретного вида функции  $p_0(t)$ .

Численная реализация показывает, что предлагаемый метод сокращает время вычисления примерно в  $10^2$  раз по сравнению с прямым расчетом интеграла (1.4). На фигуре показано прохождение синусоидального импульса в три длины волны через слой



различной толщины. Сплошные линии соответствуют толщине в  $1/4$  длины волны, штриховые — в  $1/2$  длины волны, штрихпунктирные — в единицу длины волны. Затухание в слое  $\varepsilon\omega/c^2 = 0,39$ , что соответствует некоторым полимерным композиционным материалам. Видна тенденция к уменьшению амплитуды основных колебаний (первые три пуга волн) с ростом толщины слоя. Это естественно и объясняется влиянием затухания. Дальнейший процесс характеризуется постепенным стремлением скорости  $v(t, h)$  к нулю, причем уменьшение функции  $v(t, h)$  происходит быстрее для тонкого слоя. Этот на первый взгляд парадоксальный факт объясняется следующим. Посылаемый в среду импульс генерирует собственные моды колебания слоя. Основная собственная частота уменьшается с ростом толщины слоя, а более низкие частоты затухают слабее, чем высокие.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.