Решая это уравнение методом вариации произвольных постоянных, получим

$$hf_0(h) = J_1(2hm^{-1})\left[A_0 + \pi 2^{-1}m^{-2}\int\limits_{h_2}^{h} J_1(2hm^{-1})\,h^{-1}dh\right] + Y_1(2hm^{-1})\left[B_0 - \pi 2^{-1}m^{-2}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{h_2}^{h} Y_1(2hm^{-1})\,h^{-1}dh\right]$$

Постоянные A_0 и B_0 можно определить из условий (2.2) при следующем ограничении: $\zeta_n(q-1)\,a^{-1}\neq 2$.

Полное решение уравнения (2.3) будет представляться в виде

$$p = p_a - 6\mu m\omega r^2 f_0(h) + \sum_n (A_n r^n + B_n r^{-n})\,h^{-1}Y_1(nh_2m^{-1})\,[J_1(nhm^{-1})\,Y_1(nh_2m^{-1}) -$$
$$- Y_1(nhm^{-1})\,J_1(nh_2m^{-1})]$$

При этом для коэффициентов A_n и B_n будут иметь место равенства

$$6\mu m\omega r_i^2 f_0(h) = \sum_n (A_n r_i^n + B_n r_i^{-n})\,h^{-1}Y_1(q\zeta_n)\,[J_1(h\zeta_n h_1^{-1})\,Y_1(q\zeta_n) -$$
$$- Y_1(h\zeta_n h_1^{-1})\,J_1(q\zeta_n)],\qquad i = 1, 2$$

Аналогичным способом может решаться задача Митчелла для искривленной сегментной пластинки, например, когда можно положить

$$h = h_2\exp(-\beta\alpha),\ \ \beta = \alpha_0^{-1}\ln q$$

Для этого случая вместо функций Бесселя появятся функции

$$\exp({}^3/_2\beta\alpha)\,[C_n\cos(\lambda_n\alpha) + D_n\sin(\lambda_n\alpha)],\ \ \lambda_n^2 = n^2 - {}^9/_4\beta^2$$

и соответственно изменится вид частного решения неоднородного уравнения для давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмин Р. О.* Бесселевы функции. Л.; М.; Гостехиздат, 1933. 152 с.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М;. Наука, 1979. 830 с.
3. Гидродинамическая теория смазки. М., Л: Гостехтеоретиздат, 1934. 574 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1986

УДК 532.5

О. Р. Козырев, Ю. А. Степанянц

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ НАРАСТАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

На основе интегральных соотношений, вытекающих из обобщенного уравнения Орра — Зоммерфельда при учете стратификации, получены оценки параметров нарастающих линейных возмущений в сдвиговых плоскопараллельных потоках вязкой жидкости и определены границы области, содержащей комплексную фазовую скорость.

1. В линейном приближении попытка построения теории устойчивости сдвиговых течений при одновременном учете эффектов вязкости и стратификации, по-видимому, впервые была предпринята Дразиным [1], который вывел основное уравнение, описывающее вертикальную структуру возмущенной функции тока для плоскопараллельных потоков. Для жидкости с постоянной вязкостью в приближении Буссинеска [2] это уравнение принимает вид

$$\begin{gathered}(\mathrm{U}-\mathbf{c})(\varphi''-\alpha^2\varphi) - \mathrm{U}''\varphi + \mathrm{Ri}\,N^2(\mathrm{U}-\mathbf{c})^{-1}\varphi = -\mathbf{i}\,(\alpha\,\mathrm{Re})^{-1}\times\\ \times(\varphi^{\mathrm{IV}} - \alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \qquad (1.1)\\ N^2 = -\mathbf{g}\,\rho^{-1}d\rho/dz\end{gathered}$$

Штрих означает дифференцирование по вертикальной координате z, $\varphi(z)$ — часть функции тока ψ для возмущений вида $\psi = \varphi(z) \exp(i\alpha(x - ct))$, $U(z)$, $N(z)$ — безразмерные функции, описывающие соответственно профили скорости и частоты Брента — Вяйсяля [2], определяемой вертикальным распределением плотности $\rho(z)$. Нормировку этих функций для дальнейшего удобно выбрать так, чтобы их максимальные значения были равны единице. Входящие в уравнение (1.1) параметры имеют следующий смысл: Re — число Рейнольдса основного течения, Ri — число Ричардсона [2], $c = c_r + i c_i$ — комплексная фазовая скорость возмущения, нормированная на характерную скорость основного потока.

Уравнение (1.1), дополненное граничными условиями, соответствующими наличию твердых стенок при $z = 0$ и $z = 1$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \tag{1.2}$$

образует краевую задачу, в которой c играет роль спектрального параметра, а $\varphi(z)$ — собственной функции, причем из вида возмущенной функции тока ψ следует, что наличие положительной мнимой части у c означает неустойчивость рассматриваемого течения. Отметим, что при $\mathrm{Re} \to \infty$ уравнение (1.1) переходит в известное уравнение Тейлора — Гольдштейна [2], а при $\mathrm{Ri} = 0$ — в уравнение Орра — Зоммерфельда [3, 4]; если же $\mathrm{Ri} = 0$, а $\mathrm{Re} \to \infty$, то (1.1) представляет собой уравнение Релея [3, 4].

Обратим внимание на то, что уравнение Дразина (1.1) остается сингулярным (за счет последнего слагаемого в левой части) даже при наличии вязкости, учет которой обычно снимает особенность в уравнении Релея и переводит его в уравнение Орра — Зоммерфельда. В данном случае освободиться от сингулярности можно лишь путем учета дополнительных физических факторов — диффузии тепла или соли, влияющих на распределение плотности $\rho(z)$ (в результате чего, однако, порядок уравнения (1.1) повышается до шестого).

Итак, в приведенной постановке требуется определить дисперсионную зависимость c от α при различных параметрах течения Re и Ri. Значения параметров, которые соответствуют неустойчивости основного течения $U(z)$, будут образовывать некоторую область в трехмерном пространстве α, Re, Ri. Ранее проводившиеся исследования касались оценок границ этой области в плоскостях α и Re [3, 4] и α и Ri [5—8]. Цель данной работы — получение оценок границ области неустойчивости в трехмерном пространстве параметров.

2. Выпишем интегральное соотношение, вытекающее из уравнения (1.1). Для этого умножим (1.1) на комплексно-сопряженную функцию $\bar{\varphi}(z)$ и проинтегрируем результат по z от 0 до 1. С учетом граничных условий (1.2) приходим к комплексному интегральному соотношению (пределы интегрирования для краткости опущены):

$$i(\alpha \mathrm{Re})^{-1}(I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) = Q - c(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) - \bar{c}\,\mathrm{Ri}\,J \tag{2.1}$$

$$I_0^2 = \int |\varphi|^2 dz, \quad I_1^2 = \int |\varphi'|^2 dz, \quad I_2^2 = \int |\varphi''|^2 dz$$

$$J = \int \frac{N^2 |\varphi|^2}{|U - c|^2} dz$$

Выделим в (2.1) действительную и мнимую части c:

$$c_r = \frac{1}{\Delta_-} \int \left[\left(U\alpha^2 + \frac{1}{2} U'' - \frac{\mathrm{Ri}\, U N^2}{|U - c|^2} \right) |\varphi|^2 + U |\varphi'|^2 \right] dz \tag{2.2}$$

$$c_i = \frac{1}{\Delta_+} \left[\frac{1}{2} (Q - \bar{Q}) - \frac{1}{\alpha \mathrm{Re}} (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2) \right]$$

$$\Delta_\pm = (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) \pm \mathrm{Ri}\, J \tag{2.3}$$

Используя эти два равенства, получим ограничения на фазовую скорость и инкремент нарастания возмущений.

Начнем с выражения (2.3), предполагая $c_i > 0$. Прежде всего отметим, что

$$|Q - \bar{Q}| \leqslant \int |U'(\varphi' \bar{\varphi} - \bar{\varphi}' \varphi)| dz \leqslant 2 |U'|_{\max} \int |\varphi| \, |\varphi'| dz \leqslant 2 |U'|_{\max} I_0 I_1$$

Здесь использовано неравенство Коши — Шварца — Буняковского. Оценим теперь интеграл J. Имеем

$$J = N_{\max}^2 I_0^2 / c_i^2 = I_0^2 / c_i^2 \tag{2.4}$$

(согласно принятой нормировке, $N_{\max} = 1$). После этого получаем

$$c_i \leqslant K \mid U' \mid_{\max} - (\alpha \operatorname{Re})^{-1} S (\operatorname{Ri}, \alpha, c_i), \quad K = I_0 I_1 / (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2),$$
$$S = (\operatorname{Ri}, \alpha, c_i) = (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2)/(I_1^2 + \alpha^2 I_0^2 + \operatorname{Ri} c_i^{-2} \cdot I_0^2) \tag{2.5}$$

Это неравенство содержит функционалы I_0, I_1, I_2 от неизвестной собственной функции $\varphi(z)$ и ее производных, поэтому в таком виде оно для практического использования непригодно. Учтем, однако, очевидные неравенства [3]

$$K = \frac{I_0}{I_1} \leqslant \frac{2}{\pi} \quad \text{и} \quad K = \frac{I_0 I_1}{(I_1 - \alpha I_0)^2 + 2\alpha I_0 I_1} \leqslant \frac{1}{2\alpha} \tag{2.6}$$

Далее оценим величину $S(\operatorname{Ri}, \alpha, c_i)$ снизу. Соответствующая вариационная задача на экстремум функционала S оказывается достаточно сложной, ее решение без привлечения ЭВМ найти не удается. Более плодотворным оказывается подход, связанный с поиском приближенных оценок снизу для S. Можно показать, что помимо тривиальной оценки $S_{\min} = 0$ нетрудно получить ряд других, более содержательных и не эквивалентных одна другой оценок, которые в конечном счете будут влиять на оценку искомой величины c_i.

Различные способы оценки снизу для S приведены в Приложении. Заменяя S на одну из полученных оценок S_m и используя (2.6), усилим неравенство (2.5):

$$c_i \leqslant \varkappa \mid U' \mid_{\max} - (\alpha \operatorname{Re})^{-1} S_m (\operatorname{Ri}, \alpha, c_i), \quad \varkappa = \max(2\pi^{-1}, (2\alpha)^{-1}) \tag{2.7}$$

Как видно из (2.7), это неравенство задает в пространстве параметров область, внутри которой должна быть заключена величина c_i или инкремент неустойчивости $\gamma = \alpha c_i$, если только неустойчивость имеет место. Границы области зависят от способа оценки S, но при прочих равных параметрах следует выбирать ту оценку, которая дает область минимальных размеров.

Отметим также интересный факт, что при наличии устойчивой стратификации в жидкости ($\operatorname{Ri} > 0$, $N^2 > 0$) знак c_i (т. е. нарастание или затухание возмущений) явно зависит от числа Рейнольдса, но не зависит от числа Ричардсона. Действительно, знаменатель в формуле (2.3) для c_i всегда положительный, тогда как числитель может быть разного знака в зависимости от величины коэффициента при Re. Поэтому ранее полученные достаточные условия устойчивости однородной жидкости [3] автоматически переносятся на стратифицированную жидкость.

Рассмотрим теперь выражение (2.2) и получим оценку для фазовой скорости возмущений, предполагая жидкость слабо стратифицированной ($\operatorname{Ri} \ll 1$). Используя теорему о среднем значении функции на отрезке, запишем

$$c_r = U(z_1) + {}^1/_2 U''(z_2) I_0^2/\Delta_- \tag{2.8}$$

где z_1, z_2 — некоторые точки внутри отрезка [0, 1]. Предположение о малости Ri позволяет считать $\Delta_- > 0$. Последнее будет заведомо обеспечено, если выполняется неравенство

$$\delta > 0, \quad \delta = {}^1/_4 \pi^2 + \alpha^2 - \operatorname{Ri} c_i^{-2}$$

(это можно показать, используя соотношения (2.4) и (2.6)).

Пусть профиль течения такой, что $U''(z) \geqslant 0$, тогда, очевидно, $c_r > U_{\min}$, но, с другой стороны, $c_r \leqslant U_{\max} + {}^1/_2 U''_{\max}/\delta$. Таким образом, в этом случае получаем

$$U_{\min} \leqslant c_r \leqslant U_{\max} + {}^1/_2 U''_{\max}/\delta \tag{2.9}$$

Если $U''(z) \leqslant 0$ при любых z, то аналогично находим

$$U_{\min} + {}^1/_2 U''_{\min}/\delta \leqslant c_r \leqslant U_{\max} \tag{2.10}$$

Наконец, если $U''(z)$ меняет знак на отрезке [0, 1], то

$$U_{\min} + {}^1/_2 U''_{\min}/\delta \leqslant c_r \leqslant U_{\max} + {}^1/_2 U''_{\max}/\delta \tag{2.11}$$

Оценки (2.9)—(2.11) обобщают ранее полученные для однородной жидкости [3]. Их можно рассматривать так же, как аналоги теоремы Ховарда о полукруге и ее обобщений [5—8] в том смысле, что они ограничивают на комплексной плоскости c область допустимых значений комплексной фазовой скорости нарастающих возмущений.

Приложение. Приведем несколько различных оценок снизу для функционала $S(\operatorname{Ri}, \alpha, c_i) \geqslant 0$.

1°. Перепишем S в виде

$$S=\beta^2+\frac{I_2^2/I_1^2+\beta^2}{1+\beta^2 I_0^2/I_1^2}+\frac{\mathrm{Ri}\, c_i^{-4} I_0^2/I_1^2}{1+\beta^2 I_0^2/I_1^2}-2\mathrm{Ri}\, c_i^{-2} \qquad (П.1)$$
$$\beta^2=\alpha^2+\mathrm{Ri}\, c_i^{-2}$$

Используем далее известные неравенства [3]

$$I_1^2/I_0^2 \geqslant \pi^2/4, \quad I_2^2/I_1^2 \geqslant 4\pi^2, \quad I_2^2/I_0^2 \geqslant (4{,}73)^4 \qquad (П.2)$$

и отбросим в (П.1) положительную дробь, пропорциональную Ri^2. Тогда получим

$$S \geqslant \alpha^2-\frac{\mathrm{Ri}}{c_i^2}+\frac{\pi^2(4\pi^2+\alpha^2+\mathrm{Ri}\, c_i^{-2})}{\pi^2+4(\alpha^2+\mathrm{Ri}\, c_i^{-2})} \qquad (П.3)$$

2°. Другую оценку для S можно получить, добавив в знаменатель заведомо неотрицательную величину I_2^2

$$S \geqslant \frac{2\alpha^2(I_2^2+2\alpha^2 I_1^2+\alpha^4 I_0^2)}{I_2^2+2\alpha^2 I_1^2+\alpha^4 I_0^2+\alpha^2(\alpha^2+2\mathrm{Ri}\, c_i^{-2})I_0^2}=\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2(\alpha^2+2\mathrm{Ri}\, c_i^{-2})M^{-1}} \qquad (П.4)$$
$$M=(I_2^2+2\alpha^2 I_1^2+\alpha^4 I_0^2)/I_0^2$$

Заменим M на меньшее значение с помощью (П.2), усиливая неравенство (П.4) и окончательно получим

$$S \geqslant \frac{2\alpha^2[(4{,}73)^4+\alpha^2(\pi^2/2+\alpha^2)]}{(4{,}73)^4+\alpha^2(\pi^2/2+2\alpha^2+2\mathrm{Ri}\, c_i^{-2})} \qquad (П.5)$$

3°. Еще один способ оценки для S можно получить, отбрасывая в числителе величину $I_2^2 \geqslant 0$ и используя неравенства (П.2)

$$S=\frac{\alpha^2(I_1^2+\alpha^2 I_0^2)}{I_1^2+\beta^2 I_0^2}+\frac{\alpha^2 I_1^2}{I_1^2+\beta^2 I_0^2} \geqslant \frac{2\alpha^2(\pi^2+2\alpha^2)}{\pi^2+4(\alpha^2+\mathrm{Ri}\, c_i^{-2})} \qquad (П.6)$$

Подобным же образом можно построить и ряд других оценок снизу для функционала S, в результате чего будут получаться различные оценки для величины c_i. В пространстве параметров (Re, Ri, α, c_i) каждая из оценок ограничивает некоторую область. Истинное значение c_i должно находиться внутри всех этих областей. Отметим в заключение, что приведенные оценки (П.3), (П.5), (П.6) являются независимыми в том смысле, что ни одна из них не вкладывается в другие равномерно по α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Drazin P. G.* On stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1962. V. 58. № 4. P. 546—561.
2. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
3. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
4. *Yih Ch.-Sh.* Note on eigenvalue bounds for the Orr-Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt 2. P. 273—278.
5. *Kochar J. T., Jain R. K.* Note on Howard's semicircle theorem // J. Fluid Mech. 1979. V. 91. Pt 3. P. 489—491.
6. *Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.* О параметрах нарастающих волн в сдвиговых потоках // Океанология. 1983. Т. 23. Вып. 3. С. 390—395.
7. *Makov Yu. N., Stepanyants Yu. A.* Note on the paper of Kochar and Jain on Howard's semicircle theorem // J. Fluid. Mech. 1984. V. 140. P. 1—10.
8. *Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.* О влиянии кривизны профиля на параметры нарастающих волн в сдвиговых течениях // Океанология. 1984. Т. 24. Вып. 4. С. 578—585.

Горький

Поступила в редакцию 14.VII.1988