УДК 532.5

Н. А Слезкин

О ЗАДАЧЕ МИТЧЕЛЛА О ДВИЖЕНИИ СМАЗКИ В СЛОЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ПОДВИЖНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ И НЕПОДВИЖНОЙ ПЛАСТИНКОЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

К течению смазки в слое между плоскостью и наклонной пластинкой применяется известное в гидродинамической теории смазки уравнение Рейнольдса для давления и строится его решение методом специальных функций как для прямоугольной формы пластинки, так и для сегментной.

1. Неограниченная плоскость движется продольно со скоростью U в направлении оси x. Направление оси y берем в сторону жидкости. Пусть h — толщина слоя, зависящая только от координаты x, $q = h_2/h_1 > 1$ — отношение толщин слоя на краях пластинки вдоль оси x, a — расстояние между этими краями, $2l$ — ширина пластинки в направлении оси z.

Применяя известное приближенное уравнение Рейнольдса, приходим к краевой задаче относительно давления

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x}\right) + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} -l < z < l, \ x = 0, \ p = p_a; \ x = a, \ p = p_a \\ 0 < x < a, \ z = \pm l, \ p = p_a \end{gathered} \tag{1.2}$$

Так как h зависит только от x, то частное решение уравнения (1.1) можно взять в виде

$$p_0 = \chi_0(x) = 6\mu U \int h^{-2} dx + C_1 \int h^{-3} dx + C_2 \tag{1.3}$$

Решение соответственного однородного уравнения будем строить в виде $p_n = \operatorname{ch}(nz)\, \chi_n(x)$. Тогда для χ_n получим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(h^3 \frac{d\chi_n}{dx}\right) + n^2 h^3 \chi_n = 0 \tag{1.4}$$

полное решение которого будет состоять из двух независимых решений $\chi_n^{(1)}$ и $\chi_n^{(2)}$, так что $\chi_n = A_n \chi_n^{(1)} + B_n \chi_n^{(2)}$.

Обычным способом можно доказать, что функции χ_n обладают свойством ортогональности

$$\int_0^a \chi_m \chi_n h^3 dx = 0, \quad m \neq n \tag{1.5}$$

при выполнении условий

$$A_n \chi_n^{(1)}(0) + B_n \chi_n^{(2)}(0) = 0, \quad A_n \chi_n^{(1)}(a) + B_n \chi_n^{(2)}(a) = 0 \tag{1.6}$$

Складывая частное решение (1.3) с множеством решений χ_n, получим общее решение уравнения (1.1) в виде

$$p = \chi_0(x) + \sum_n \operatorname{ch}(nz)\, [A_n \chi_n^{(1)} + B_n \chi_n^{(2)}] \tag{1.7}$$

Удовлетворяя первым двум условиям (1.2), получим

$$C_1 = -6\mu U \int_0^a h^{-2} dx \left[\int_0^a h^{-3} dx\right]^{-1}, \quad C_2 = p_a$$

а из (1.6) получаем уравнение для собственных значений

$$\chi_n^{(1)}(0)\, \chi_n^{(2)}(a) - \chi_n^{(1)}(a)\, \chi_n^{(2)}(0) = 0 \tag{1.8}$$

и функции χ_n можно представить в виде

$$\chi_n = A_n D_n(x)$$

$$D_n(x) = \chi_n^{\,2}(x)\, \chi_n^{(1)}(a)\, [\chi_n^{(2)}(a) - \chi_n^{(1)}(x)]^{-1}$$

Подставляя это выражение в (1.7) и удовлетворяя последнему условию (1.2), получим

$$6\mu U \int_0^x h^{-2} dx + C_1 \int_0^x h^{-3} dx = \sum_n A_n \operatorname{ch}(nl) D_n(x) \tag{1.9}$$

Чтобы из равенства (1.9) определить коэффициенты A_n, необходимо воспользоваться свойством ортогональности (1.5). Умножая обе части равенства (1.9) на $h^3 D_n(x)$ и интегрируя от $x = 0$ до $x = a$, получим

$$A_n = 6\mu U \left[\operatorname{ch}(nl) \int_0^a D_n^2(x) h^3 dx\right]^{-1} \int_0^a \left[D_n h^3 \int_0^x h^{-2}(x_1)\, dx_1\right] dx + C_1 \int_0^a \left[D_n h^3 \int_0^x h^{-3}(x_1)\, dx_1\right] dx$$

Для частного случая наклонной плоской пластинки будем иметь

$$h = h_2 - mx, \quad m = h_1 a^{-1}(q-1)$$

а уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{d^2\chi_n}{dh^2} + 3h^{-1}\frac{d\chi_n}{dh} + n^2 m^{-3}\chi_n = 0 \tag{1.10}$$

Решение этого уравнения (1.10) представляется [1] через функции Бесселя первого и второго рода

$$\chi_n(h) = h^{-1}\left[A_n J_1(nhm^{-1}) + B_n Y_1(nhm^{-1})\right]$$

а уравнение (1.5) для собственных значений примет вид

$$J_2(\zeta)\, Y_1(q\zeta) - J_1(q\zeta)\, Y_1(\zeta) = 0, \quad \zeta = na(q-1)^{-1} \tag{1.11}$$

Для постоянных A_n будут иметь место равенства

$$\sum_n A_n h^{-1} Y_1^{-1}(\zeta_n) \operatorname{ch}\left[la^{-1}(q-1)\zeta_n\right]\left[Y_1(\zeta_n) J_1(hh_1^{-1}\zeta_n) - J_1(\zeta_n) Y_1(hh_1^{-1}\zeta_n)\right] =$$
$$= 6\mu a U (q-1)^{-1}(h_1^{-1}h^{-1} - h_1^{-2})\left[1 - q(1+q)^{-1} h_1 (h^{-1} - h_2^{-1})\right]$$

где ζ_n — корни уравнения (1.11). Известно [2], что все эти корни действительны и простые, таблицы некоторых из них приведены в [2].

В построенном выше решении задачи Митчелла использована функция гиперболического косинуса от координаты z, а в решении самого Митчелла [3] координата z входит под знак тригонометрического синуса, но при этом вместо функции Бесселя первого рода использованы функции Бесселя третьего рода. В ходе проведенных выше вычислений использован классический метод собственных функций, а в решении самого Митчелла — частный вид тригонометрического ряда.

2. При построении решения задачи Митчелла для сегментной пластинки примем, что неограниченная плоскость вращается вокруг оси y с угловой скоростью ω. Уравнение Рейнольдса для давления в цилиндрических координатах и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rh^3 \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \alpha}\right) = -6\mu\omega r \frac{\partial h}{\partial \alpha} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} r_1 < r < r_2, \ \alpha = 0, \ p = p_a; \ \alpha = \alpha_0, \ p = p_a, \\ 0 < \alpha < \alpha_0, \ r = r_1, \ p = p_a; \ r = r_2, \ p = p_a \end{gathered} \tag{2.2}$$

Если сегментная пластинка наклонена к подвижной плоскости, то можно положить $h = h_2 - m\alpha$, $m = h_1(q-1)\alpha_0^{-1}$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right] + m^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial h^2} + 3h^{-1}\frac{\partial p}{\partial h}\right) = -6\mu m\omega r^2 h^{-3} \tag{2.3}$$

Беря решение однородного уравнения в виде

$$p_n = (A_n r^n + Br^{-n})\varphi_n(h) \tag{2.4}$$

получим для φ_n уравнение вида (1.10). По этой причине для собственных значений сохранится уравнение (1.11), и с его корнями ζ_n будет связана степень слагаемых n в (2.4) соотношением $a^{-1}(q-1)\zeta_n = n$. Если частное решение полного уравнения (2.3) взять в виде $p_0 = -6\mu m\omega r^2 f_0(h)$, то для f_0 получим уравнение

$$\frac{d^2 f_0}{dh^2} + 3h^{-1}\frac{df_0}{dh} + 4m^{-2} f_0 = m^{-2}h^{-3}$$

Решая это уравнение методом вариации произвольных постоянных, получим

$$hf_0(h) = J_1(2hm^{-1})\left[A_0 + \pi 2^{-1}m^{-2}\int_{h_2}^{h} J_1(2hm^{-1})\,h^{-1}dh\right] + Y_1(2hm^{-1})\left[B_0 - \pi 2^{-1}m^{-2}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{h_2}^{h} Y_1(2hm^{-1})\,h^{-1}dh\right]$$

Постоянные A_0 и B_0 можно определить из условий (2.2) при следующем ограничении: $\zeta_n(q-1)\,a^{-1} \neq 2$.

Полное решение уравнения (2.3) будет представляться в виде

$$p = p_a - 6\mu m\omega r^2 f_0(h) + \sum_n (A_n r^n + B_n r^{-n})\,h^{-1}Y_1(nh_2m^{-1})\,[J_1(nhm^{-1})\,Y_1(nh_2m^{-1}) -$$
$$- Y_1(nhm^{-1})\,J_1(nh_2m^{-1})]$$

При этом для коэффициентов A_n и B_n будут иметь место равенства

$$6\mu m\omega r_i^2 f_0(h) = \sum_n (A_n r_i^n + B_n r_i^{-n})\,h^{-1}Y_1(q\zeta_n)\,[J_1(h\zeta_n h_1^{-1})\,Y_1(q\zeta_n) -$$
$$- Y_1(h\zeta_n h_1^{-1})\,J_1(q\zeta_n)], \quad i = 1, 2$$

Аналогичным способом может решаться задача Митчелла для искривленной сегментной пластинки, например, когда можно положить

$$h = h_2 \exp(-\beta\alpha), \ \beta = \alpha_0^{-1}\ln q$$

Для этого случая вместо функций Бесселя появятся функции

$$\exp(^3/_2\beta\alpha)\,[C_n\cos(\lambda_n\alpha) + D_n\sin(\lambda_n\alpha)], \ \lambda_n^2 = n^2 - {}^9/_4\beta^2$$

и соответственно изменится вид частного решения неоднородного уравнения для давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмин Р. О.* Бесселевы функции. Л.; М.; Гостехиздат, 1933. 152 с.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М;. Наука, 1979. 830 с.
3. Гидродинамическая теория смазки. М., Л: Гостехтеоретиздат, 1934. 574 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1986

УДК 532.5

О. Р. Козырев, Ю. А. Степанянц

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ НАРАСТАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

На основе интегральных соотношений, вытекающих из обобщенного уравнения Орра — Зоммерфельда при учете стратификации, получены оценки параметров нарастающих линейных возмущений в сдвиговых плоскопараллельных потоках вязкой жидкости и определены границы области, содержащей комплексную фазовую скорость.

1. В линейном приближении попытка построения теории устойчивости сдвиговых течений при одновременном учете эффектов вязкости и стратификации, по-видимому, впервые была предпринята Дразиным [1], который вывел основное уравнение, описывающее вертикальную структуру возмущенной функции тока для плоскопараллельных потоков. Для жидкости с постоянной вязкостью в приближении Буссинеска [2] это уравнение принимает вид

$$(\mathbf{U} - \mathbf{c})(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \mathbf{U}''\varphi + \mathrm{Ri}\,N^2(\mathbf{U} - \mathbf{c})^{-1}\varphi = -\mathbf{i}\,(\alpha\,\mathrm{Re})^{-1}\times$$
$$\times(\varphi^{\mathrm{IV}} - \alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \qquad (1.1)$$
$$N^2 = -\mathbf{g}\,\rho^{-1}d\rho/dz$$