Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 3, 1989

УДК 531.36 : 534.1

В. В. Стрыгин

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ СИЛ

В развитие идей работы автора [1] предлагается алгоритм прямого разложения по малому параметру решений задачи Коши на конечном отрезке времени для систем дифференциальных уравнений, описывающих движение механических систем под воздействием быстро осциллирующих сил.

Рассмотрим механическую систему, движение которой описывается векторным дифференциальным уравнением

$$A(q)q^{\cdot\cdot} + B(q)q^{\cdot} = F(t, q) + \omega\Phi(t, q, \tau) \tag{1}$$

где $q = (q^1, \ldots, q^n)$ — вектор обобщенных координат, точка означает дифференцирование по времени t, A — положительно определенная матрица сил инерции, B — матрица диссипативных сил, $\omega\Phi$ — осциллирующие силы большой амплитуды ($\omega \gg 1$, $\tau = \omega t$). Будем считать ради простоты, что Φ — тригонометрический полином по τ периода 2π, имеющий нулевое среднее по τ. Пусть заданы начальные условия

$$q(0) = \alpha,\ q^{\cdot}(0) = \beta \tag{2}$$

Приближенное решение задачи Коши (1), (2) будем искать в виде

$$q^* = u_0(t) + \omega^{-1}[u_1(t) + v_1(t, \tau)] + \ldots + \omega^{-s}[u_s(t) + v_s(t, \tau)] + \ldots \tag{3}$$

где $v_i(t, \tau)$ — периодические функции τ периода 2π, имеющие нулевое среднее значение. Сумма $u_0 + \omega^{-1}u_1 + \ldots$ — плавная составляющая движения, а $\omega^{-1}v_1 + \omega^{-2}v_2 + \ldots$ — вибрационная составляющая. Имеем

$$A(q^*) = A^\circ + \omega^{-1}A_q^\circ(u_1 + v_1) + \omega^{-2}A_q^\circ(u_2 + v_2) + {}^1/{}_2\overset{\circ}{A}_{qq}(u_1 + v_1)^2 + \ldots$$
$$(A^\circ = A(u_0),\ A_q^\circ = A_q(u_0), \ldots)$$

Аналогичные выражения справедливы для $B(q^*)$, $F(t, q^*)$, ...

Из начальных условий (2), формулы (3) и результата дифференцирования выражения (3) по t получим

$$\begin{gathered} u_0(0) + \omega^{-1}[u_1(0) + v_1(0, 0)] + \omega^{-2}[u_2(0) + v_2(0, 0)] + \ldots = \alpha \\ u_0^{\cdot}(0) + \partial v_1(0, 0)/\partial\tau + \omega^{-1}[u_1^{\cdot}(0) + v_1^{\cdot}(0, 0) + \partial v_2(0, 0)/\partial\tau] + \ldots = \beta \end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что

$$u_0(0) = \alpha,\ u_0^{\cdot}(0) + \partial v_1(0, 0)/\partial\tau = \beta \tag{5}$$

а коэффициенты при ω^{-1}, ω^{-2}, ... в разложениях (4) равны нулю. Подставляя теперь выражение (3) в уравнение (1), получим тождество

$$A(q^*)q^{*\cdot\cdot} + B(q^*)q^{*\cdot} = F(t, q) + \omega\Phi(t, q^*, \tau) \tag{6}$$

Попытаемся подобрать u_i и v_i так, чтобы тождество (6) удовлетворялось при всех $\in [0, T]$ и $\tau \in [0, \infty)$. Приравняем коэффициенты при степенях ω, ω°, ω^{-1}, ω^{-2} и т. д.

При первой степени ω получим

$$A^\circ\partial^2 v_1/\partial\tau^2 \equiv \Phi^\circ \quad (\Phi^\circ = \Phi(t, u_0, \tau))$$

Так как матрица A° обратима, а Φ° — тригонометрический полином по τ, имеющий нулевое среднее, то v_1 можно однозначно определить в виде тригонометрического полинома по τ с коэффициентами, зависящими от t и u_0

$$v_1 = f_1(t, u_0, \tau) \tag{7}$$

Если учесть, что $u_0(0) = \alpha$, то величина

$$\Psi_1(\alpha) = \partial v_1(0,0)/\partial\tau = \partial f_1(0, \alpha, 0)/\partial\tau$$

полностью определена. Поэтому из равенств (5) определена и $u_0^{\cdot}(0) = \beta - \Psi_1(\alpha)$.

Приравнивая теперь в тождестве (6) коэффициенты при нулевой степени ω, получаем

$$A^\circ[u_0^{\cdot\cdot} + 2\partial v_1^{\cdot}/\partial\tau + \partial^2 v_1/\partial\tau^2] + A_q^\circ(u_1 + v_1)\partial^2 v_1/\partial\tau^2 + \\ + B^\circ(u_0^{\cdot} + \partial v_1^{\cdot}/\partial\tau) = F^\circ + \Phi_q^0(u_1 + v_1)\ (F^\circ = F(t, u_0)) \tag{8}$$

Вычислим среднее значение по τ от левой и правой частей последнего равенства. Имеем (W° — вибрационная сила)

$$A^\circ u_0^{\cdot\cdot} + B^\circ u_0^{\cdot} \equiv F^\circ + W^\circ \tag{9}$$

$$W^\circ = \langle\Phi_q^\circ v_1(t, \tau)\rangle - \langle[A_q^\circ v_1(t, \tau)]\,\partial^2 v_1/\partial\tau^2\rangle$$

Таким образом, для определения $u_0(t)$ получаем уравнения (9) и начальные условия $u_0(0) = \alpha$, $u_0^{\cdot}(0) = \beta - \Psi_1(\alpha)$. Допустим, что эта задача решена на отрезке $[0, T]$. Тогда из равенства (7) окончательно получаем и $v_1(t, \tau)$.

Рассмотрим теперь в равенстве (8) слагаемые с нулевым средним по τ. Получим

$$A^\circ\partial^2 v_2/\partial\tau^2 = Q_1^\circ + Q_2^\circ u_1 \tag{10}$$

где Q_1° и Q_2° — известные вектор-функции и матрица, зависящие от t, u_0, τ. Функцию v_2 будем искать в виде

$$v_2 = w_2(t, \tau) + Z_2(t, \tau)u_1(t)$$

где $w_2(t, \tau)$ — вектор-функция, а $Z_2(t, \tau)$ — матрица, коэффициенты которой — тригонометрические полиномы по τ, имеющие нулевое среднее значение. Из уравнения (10) w_2 и Z_2 определяются однозначно; однако функция v_2 все еще остается неопределенной, так как неопределена функция $u_1(t)$.

Приравняем теперь в (6) коэффициенты при ω^{-1} и в полученном равенстве проведем усреднение по τ. В результате для u_1 получаем уравнение

$$A^\circ u_1^{\cdot\cdot} + B^\circ u_1^{\cdot} = d_1(t) + C_1(t)u_1 \tag{11}$$

где вектор-функция $d_1(t)$ и матрица $C_1(t)$ определяются лишь при помощи уже известных u_0, v_1, w_2 и Z_2. Заметим, что из равенства нулю выражений в квадратных скобках соотношений (4) заключаем, что величины

$$u_1(0) = -v_1(0, 0),\ u_1^{\cdot}(0) = -v_1^{\cdot}(0, 0) - \partial v_2(0, 0)/\partial\tau \tag{12}$$

известны. Это позволяет из (11), (12) полностью определить u_1.

Далее следует v_3 искать в виде

$$v_3 = w_3(t, \tau) + Z_3(t, \tau)u_2(t)$$

и т. д. Эта процедура позволяет для любого целого $N \geqslant 1$ определить приближенное решение

$$q_N^* = u_0(t) + \omega^{-1}[u_1(t) + v_1(t, \tau)] + \ldots + \omega^{-N}[u_N(t) + v_N(t, \tau)] \tag{13}$$

с любой точностью.

Если быстро осциллирующие силы невелики и уравнение (1) имеет вид

$$A(q)q^{\cdot\cdot} + B(q)q^{\cdot} = F(t, q) + \Phi(t, q, \tau)$$

то приближенное решение находится в виде (13), где $v_1(t, \tau) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стрыгин В. В.* Об одной модификации метода усреднения при отыскании высших приближений // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1042—1045.

Воронеж

Поступила в редакцию
10.VIII.1988