Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 3, 1989

УДК 539.374

Я. А. Каменярж

УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА В ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Устанавливаются соотношения на поверхностях разрыва для жесткопластического анализа неоднородных тел, в частности тел с кусочно-непрерывными свойствами. Они выводятся как необходимые условия равенства статического и кинематического коэффициентов нагрузки. В частном случае однородных тел они совпадают с известными условиями Хилла; тем самым установлена необходимость последних. При выводе соотношений обсуждается связь различных постановок экстремальных задач теории предельной нагрузки. Рассматривается механический смысл полученных соотношений и некоторые их свойства.

1. Постановка задачи. Условия на поверхностях разрыва в жесткопластическом анализе рассматриваются в этой работе с точки зрения теории предельной нагрузки.

Задача теории предельной нагрузки. Пусть тело занимает область Ω и находится под действием массовых сил с плотностью $\mathbf{f}$ и поверхностной нагрузки с плотностью $\mathbf{q}$, приложенной на части S_q поверхности тела. Для каждой точки x тела указана совокупность C_x допустимых напряжений. Безопасным называется поле напряжений, являющееся внутренней точкой множества полей допустимых напряжений. Основной вопрос теории предельной нагрузки состоит в выяснении того, можно или нельзя заданную нагрузку $\mathbf{l} = (\mathbf{f}, \mathbf{q})$ уравновесить безопасным полем напряжений.

Статическая экстремальная задача. Поле $\boldsymbol{\sigma}$ допустимых напряжений называется статически допустимым для нагрузки $m\mathbf{l}$, $m \geqslant 0$, $\mathbf{l} = (\mathbf{f}, \mathbf{q})$, если оно уравновешивает эту нагрузку; число $m_s(\boldsymbol{\sigma}) = m$ в этом случае называется статическим коэффициентом нагрузки $\mathbf{l}$. Точная верхняя грань $\alpha_l = \sup m_s(\boldsymbol{\sigma})$ называется статическим предельным коэффициентом нагрузки $\mathbf{l}$. Нагрузку $m\mathbf{l}$ можно уравновесить безопасным полем напряжений при $0 \leqslant m < \alpha_l$ и нельзя так уравновесить при $m \geqslant \alpha_l$ [1]. Таким образом, для ответа на основной вопрос теории предельной нагрузки нужно находить или оценивать величину α_l, которая в связи с приведенным утверждением называется также коэффициентом запаса нагрузки $\mathbf{l}$.

Кинематические экстремальные задачи. Важную роль в нахождении коэффициента запаса нагрузки играют кинематические экстремальные задачи, которые формулируются следующим образом. С множеством допустимых напряжений C_x связывается функция диссипации [2—6] ($\mathbf{e}$ — симметричный тензор второго ранга)

$$d(x; \mathbf{e}) = d_x(\mathbf{e}) = \sup\{\boldsymbol{\sigma}_* \cdot \mathbf{e}: \boldsymbol{\sigma}_* \in C_x\} \tag{1.1}$$

Достаточно регулярному полю скорости $\mathbf{u}$ соответствует поле скоростей деформаций $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ и диссипация

$$\int_\Omega d_x(\mathbf{e}(\mathbf{u}))\, dx$$

Поле скорости $\mathbf{u}$ называется кинематически допустимым, если оно обращается в нуль на части S_v границы тела, дополняющей поверхность S_q.

Кинематическим коэффициентом $m_k(\mathbf{u})$ нагрузки $\mathbf{l}$ для кинематически допустимого поля скорости $\mathbf{u}$ называется отношение соответствующей этому полю диссипации к мощности работы на нем заданной нагрузки $\mathbf{l}$ (если эта мощность положительна)

$$m_k(\mathbf{u}) = \int_\Omega d_x(\mathbf{e}(\mathbf{u}))\,dx \quad \left(\int_\Omega \mathbf{fu}\,d\boldsymbol{x} + \int_{S_q} \mathbf{qu}\,ds\right)^{-1}$$

Аналогичное определение сохраняется, если расширить множество кинематически допустимых полей скорости до некоторого пространства обобщенных функций и соответственно продолжить диссипацию и мощность работы нагрузки на это пространство [4, 7, 8]. Кинематический коэффициент нагрузки для обобщенного поля скорости $\mathbf{v}$ обозначается $M_k(\mathbf{v})$.

Кинематическими предельными коэффициентами называются величины

$$B_l = \inf m_k(\mathbf{u}), \; \beta_l = \inf M_k(\mathbf{v})$$

где в первой задаче экстремум разыскивается для гладких, а во второй — для обобщенных кинематически допустимых полей скорости.

Утверждение 1 [1, 2, 4]. Всякий статический коэффициент нагрузки $\mathbf{l}$ не превосходит всякого ее кинематического коэффициента

$$m_s(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant m_k(\mathbf{u}), \; m_s(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant M_k(\mathbf{v})$$

Это означает, что для нахождения коэффициента запаса нагрузки α_l достаточно построить поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и поле скорости $\mathbf{u}$ $(\mathbf{v})$, для которых в предыдущем соотношении достигалось бы равенство. Действительно, тогда по утверждению 1 общее значение статического и кинематического коэффициента равно α_l.

Связь с задачей жесткопластического анализа. Искать такие поля напряжений и скорости можно, опираясь на следующее утверждение.

Утверждение 2 [1, 4]. Поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и скорости $\mathbf{u} \neq 0$ $(\mathbf{v} \neq 0)$ — сильное гладкое (соответственно — слабое) решение задачи жесткопластического анализа при нагрузке $m\mathbf{l}$, $m > 0$, тогда и только тогда, когда статический $m_s(\boldsymbol{\sigma}) = m$ и кинематический $m_k(\mathbf{u})$ $(M_k(\mathbf{v}))$ коэффициенты нагрузки $\mathbf{l}$ совпадают.

Задача жесткопластического анализа (ЗЖА) здесь понимается следующим образом. Рассматривается жестко-идеальнопластическое тело, поверхность текучести которого является границей множества C_x (C_x — выпуклое множество допустимых напряжений, задающее свойства тела в исходной постановке задачи теории предельной нагрузки). Сильным гладким решением ЗЖА при нагрузке $\mathbf{l}$ называется статически допустимое для $\mathbf{l}$ поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и кинематически допустимое гладкое поле скорости $\mathbf{u}$, удовлетворяющие ассоциированному закону.

Выполнение ассоциированного с множеством C_x (нормального, градиентального) закона для поля скорости $\mathbf{u}$ и поля напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ означает, что соответствующие $\mathbf{u}$ скорости деформаций $\mathbf{e}$ направлены по «внешней нормали» к множеству C_x

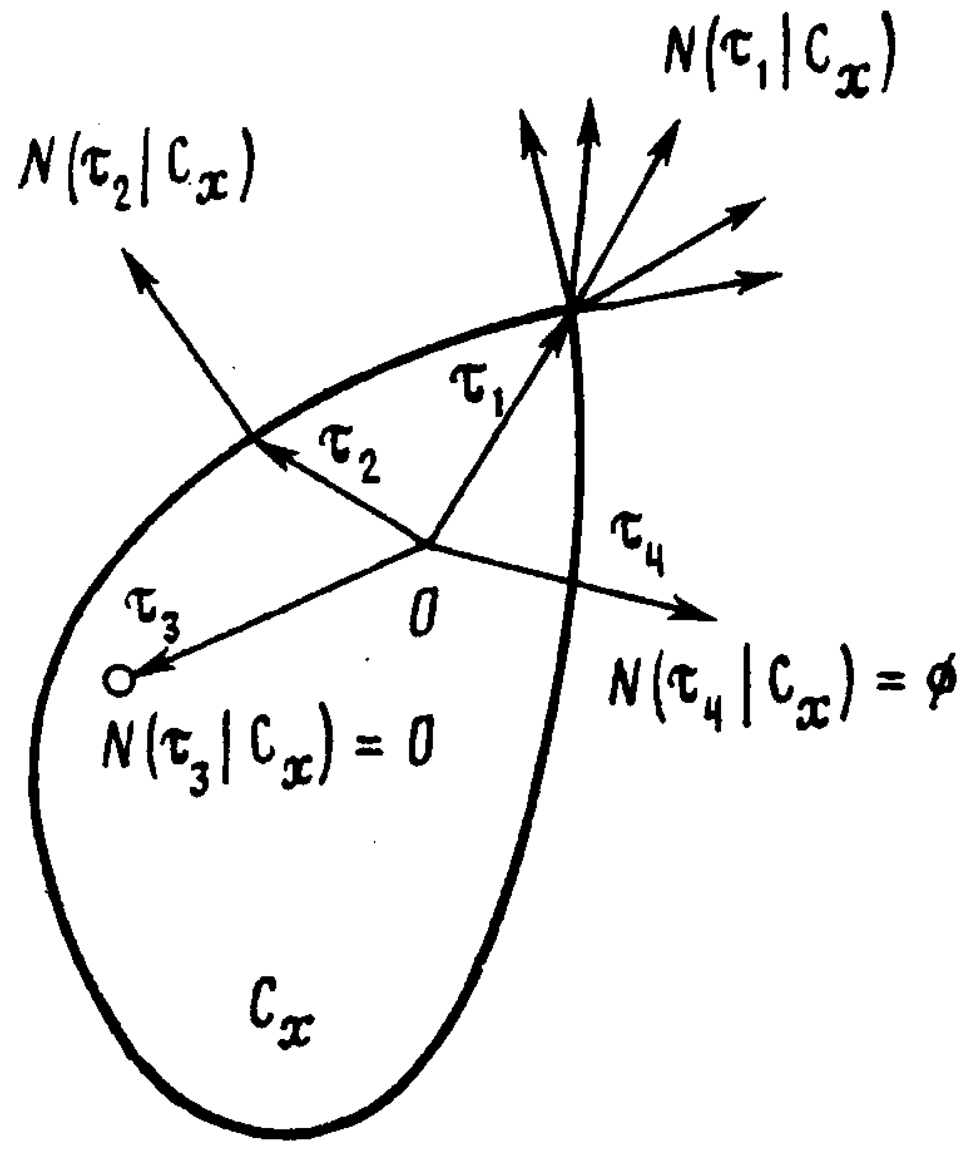
$$\mathbf{e}(x) \in N(\boldsymbol{\sigma}(x) \mid C_x) \tag{1.2}$$

Здесь $N(\boldsymbol{\tau} \mid C_x)$ — нормальный конус множества C_x в точке $\boldsymbol{\tau}$ [9] (фиг. 1)

$$N(\boldsymbol{\tau} \mid C_x) = \begin{cases} \{\boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_*) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_* \in C_x\}, & \boldsymbol{\tau} \in C_x \\ \varnothing, \quad \boldsymbol{\tau} \notin C_x \end{cases}$$

Слабое решение этой задачи определяется аналогично (гладкие поля скорости заменяются обобщенными, ассоциированный закон ослабляется [4]).

Итак, решение ЗЖА является способом нахождения коэффициента запаса нагрузки. Утверждение 2 выясняет роль ассоциированного закона в теории предельной нагрузки: он возникает не как физическое определяющее соотношение, а как необходимое и достаточное условие совпадения статического и кинематического коэффициентов нагрузки и в этом смысле является окончательно обоснованным.



Фиг. 1

Идея вывода условий на поверхностях разрыва. Аналогично ассоциированному закону можно обосновать и условия на поверхностях разрыва. С точки зрения теории предельной нагрузки они должны удовлетворять следующему требованию. Разрывные решения ЗЖА, определенные при помощи этих условий, должны приводить к значению коэффициента запаса нагрузки (как гладкое решение — когда оно существует).

Для однородных тел этому требованию удовлетворяют условия, указанные в [10] (скачок функции f в направлении нормали $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности разрыва обозначается $[f]$; f^+, f^- — предельные значения функции f с двух сторон поверхности разрыва

$$(\varepsilon_\nu(a))_{ij} = (a_i\nu_j + a_j\nu_i)/2$$

$$[\sigma_{ij}]\nu_j = 0, \quad \varepsilon_\nu([\mathbf{u}]) \in N(\sigma^+ \mid C_x), \quad \varepsilon_\nu([\mathbf{u}]) \in N(\sigma^- \mid C_x) \tag{1.3}$$

Предлагались и отличные от этих соотношений условия на поверхностях разрыва в однородных пластических телах. Из дальнейшего следует, что лишь условия (1.3) удовлетворяют указанному требованию.

Цель работы состоит в выводе для неоднородных тел условий на поверхностях разрыва, которые удовлетворяли бы сформулированному требованию (приемлемость для нахождения коэффициента запаса нагрузки).

Для вывода таких соотношений рассматриваются слабые решения ЗЖА $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{v}$, на которых заведомо достигается равенство $m_s(\boldsymbol{\sigma}) = M_k(\mathbf{v})$. Когда такое решение сводится к разрывным кусочно-гладким полям напряжений и скорости, из определения слабого решения можно найти условия на поверхностях разрыва этих полей.

На таком пути были получены соотношения на поверхностях разрыва для упругопластических тел, описываемых уравнениями Прандтля — Рейсса [11] и соотношения (1.3) [12].

Ниже из рассмотрения слабых решений выводится интегральное соотношение (п. 2) и далее — соотношения на поверхностях разрыва (п. 3). В п. 4 устанавливается простая форма и механический смысл этих соотношений, в п. 5 — некоторые их свойства.

Отметим некоторые используемые в дальнейшем предположения и обозначения.

Область Ω расположена в евклидовом пространстве. Его размерность сказывается только на некоторых постоянных, например при составлении шаровой части тензора или при использовании теорем вложения. В дальнейшем значения таких постоянных указываются для трехмерного случая.

Обозначим Sym пространство симметричных тензоров второго ранга, $\mathbf{s}^d$ и $\mathbf{s}^s$ — соответственно девиаторную и шаровую составляющую тензора $\mathbf{s}$ из Sym, Sym^d — подпространство тензоров-девиаторов (девиаторную плоскость). Для тензоров второго ранга $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ используются обозначения $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_{ij}b^{ij}$, $|\mathbf{a}| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$. Метрический тензор обозначается $\mathbf{g}$.

Дальнейшие утверждения формулируются для множеств C_x в виде цилиндров в пространстве Sym с осью, направленной по тензору $\mathbf{g}$. Они также справедливы для ограниченных множеств C_x. Зависимость C_x от x считается измеримой [9]. Последнее условие выполнено во всех случаях, интересных с точки зрения механики.

Сечение цилиндра C_x девиаторной плоскостью Sym^d обозначается $C_x{}^d$. Предполагается, что множества $C_x{}^d$ ограничены в совокупности и содержат одну и ту же окрестность нуля пространства Sym^d. В этом случае имеет место равенство $\alpha_l = \beta_l$ [13], а при некоторой гладкости границы области и равенство $\beta_l = B_l$ [13, 14].

Пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве X обозначается X'. Значение функционала f из X' на элементе x из X обозначается $\langle x, f\rangle = f(x)$.

Если A — линейный оператор из пространства X в пространство Y, то A^T — сопряженный оператор (из Y' в X'), а A^{TT} — второй сопряженный оператор (из X'' в Y'').

2. Интегральное соотношение. Рассмотрим условия совпадения статического $m_s(\sigma)$ и кинематического $M_k(\mathbf{v})$ коэффициентов нагрузки $\mathbf{l} = (\mathbf{f}, \mathbf{q})$. По утверждению 2 (п. 1) их равенство гарантировано для решения σ, $\mathbf{v}$ ЗЖА в слабой постановке.

Подробности и ссылки на работы, в которых изучалась эта задача, см. в [15]; приведем лишь основные определения.

Рассматривается пространство полей напряжений

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\Omega) = \{\sigma : \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \sigma_{ij}{}^d \in L_\infty(\Omega),\ \sigma_{kk} \in L_2(\Omega)\}$$

$$\|\sigma\|_{\mathbf{S}}^2 = \|\,|\sigma^d|\,\|_{L_\infty}^2 + \|{}^1\!/\!_3\,\sigma_{kk}\|_{L_2}^2$$

Условия равновесия поля напряжений τ из $\mathbf{S}$ с нагрузкой $\mathbf{l} = (\mathbf{f}, \mathbf{q})$ даются принципом виртуальных скоростей

$$\int_\Omega \tau\cdot\mathrm{Def}_0\,\mathbf{u}\,dx = \int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{u}\,dx + \int_{S_q} \mathbf{q}\mathbf{u}\,ds, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\Omega, S_v) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}) : \rho(\mathrm{supp}\,\mathbf{u}, S_v) > 0\}$$

$$(\mathrm{Def}_0\,\mathbf{u})_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$$

Пусть $\mathbf{s}_l$ — какое-нибудь поле напряжений из пространства $\mathbf{S}$, уравновешивающее нагрузку $\mathbf{l}$, а Σ — множество полей напряжений, уравновешивающих нагрузку $\mathbf{l} = 0$ ($\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{q} = 0$). Тогда $\Sigma + m\mathbf{s}_l$ — множество полей напряжений, уравновешивающих нагрузку $\mathbf{l}$.

Рассматривается также пространство полей скорости $\mathbf{V}_0$ и пространство $\mathbf{F}_{(1)}$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0(\Omega, S_v) = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_1(\Omega) : \mathrm{Def}_0\,u \in \mathbf{L}_1(\Omega),\ \frac{\partial u_k}{\partial x^k} \in \mathbf{L}_2(\Omega),\ \mathbf{u}|_{S_v} = 0\right\}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_0}^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_1}^2 + \|\,|(\mathrm{Def}_0\,\mathbf{u})^d|\,\|_{\mathbf{L}_1}^2 + \left\|\frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x^k}\right\|_{L_2}^2$$

$$\mathbf{F}_{(1)} = \mathbf{F}_{(1)}(\Omega) = \{\varepsilon : \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in L_1(\Omega),\ \varepsilon_{kk} \in L_2(\Omega)\}$$

$$\|\varepsilon\|_{\mathbf{F}_{(1)}}^2 = \|\,|\varepsilon^d|\,\|_{L_1}^2 + \|{}^1\!/\!_3\,\varepsilon_{kk}\|_{L_2}^2$$

Очевидно $\mathbf{F}_{(1)}' = \mathbf{S}$ и Def_0 — непрерывный оператор, действующий из $\mathbf{V}_0$ в $\mathbf{F}_{(1)}$. Пусть Ω и S_v такие, что $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_1} \leqslant c\|\mathrm{Def}_0\,\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_1}$ для любого $\mathbf{u}$ из $\mathbf{V}_0$ (условия, достаточные для этого, см. в [16]). Тогда оператор $\mathrm{Def} = (\mathrm{Def}_0)^{TT}$ — непрерывное продолжение Def_0 на пространство $\mathbf{V}_0''$. Он взаимно однозначно отображает пространство обобщенных полей скорости $\mathbf{V}_0''$ на множество $\mathbf{E}$ кинематически допус тимых обобщенных полей скоростей деформаций [8]

$$\mathbf{E} = \Sigma^\circ = \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{S}' : \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0 \ \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma\}$$

Множество C допустимых полей напряжений, диссипация D и слабая форма ассоциированного закона определяются соотношениями

$$C = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}(x) \in C_x \text{ для п. в. } x \in \Omega\}$$

$$D(\mathbf{e}) = \sup\{\langle \boldsymbol{\sigma}_*, \mathbf{e} \rangle : \boldsymbol{\sigma}_* \in C\}, \quad \mathbf{e} \in \mathbf{S}'$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in C, \quad D(\mathbf{e}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle, \quad \mathbf{e} \in \mathbf{S}'$$

Слабым решением ЗЖА при нагрузке $\alpha_l \mathbf{l}$ называется поле напряжений $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{S}$ и поле скорости $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0''$, удовлетворяющие соотношениям

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma + \alpha_l \mathbf{s}_l, \quad \boldsymbol{\sigma} \in C, \quad D(\mathbf{e}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle, \quad \mathbf{e} = \operatorname{Def} \mathbf{v} \tag{2.2}$$

Кинематический коэффициент для любого обобщенного поля скорости $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0''$, удовлетворяющего условию положительности мощности $\langle \mathbf{s}_l, \operatorname{Def} \mathbf{v} \rangle > 0$, определяется соотношением

$$M_k(\mathbf{v}) = D(\operatorname{Def} \mathbf{v}) / \langle \mathbf{s}_l, \operatorname{Def} \mathbf{v} \rangle$$

а статический и кинематический предельные коэффициенты — как экстремумы

$$\alpha_l = \sup\{m \geqslant 0 : (\Sigma + m\mathbf{s}_l) \cap C \neq \varnothing\}$$

$$\beta_l = \inf\{D(\boldsymbol{\varepsilon}) / \langle \mathbf{s}_l, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{E}, \langle \mathbf{s}_l, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle > 0\} \tag{2.3}$$

Пусть выполнено равенство $m_s(\boldsymbol{\sigma}) = M_k(\mathbf{v})$. Тогда пара $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{v}$ — решение задачи (2.2), $\alpha_l = m_s(\boldsymbol{\sigma}) = M_k(\mathbf{v})$ и соотношения (2.2) можно использовать для вывода условий на поверхностях разрыва.

Сужение обобщенного поля скорости. Естественное вложение кусочно-гладких функций, терпящих разрыв на некоторой поверхности, в пространство $\mathbf{V}_0''$ отсутствует. Поэтому вместо $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0''$, $\mathbf{e} = \operatorname{Def} \mathbf{v} \in \mathbf{S}'$ рассматриваются их сужения $\mathbf{v}^{(r)} = \mathbf{v}|_\Lambda$, $\mathbf{e}^{(r)} = \mathbf{e}|_{\mathbf{S}^{(r)}}$ на некоторые пространства Λ, $\mathbf{S}^{(r)}$; сужения уже могут быть разрывными функциями.

Пусть Λ и $\mathbf{S}^{(r)}$ — банаховы пространства, непрерывно вложенные соответственно в $\mathbf{V}_0'$ и $\mathbf{S}$ (предположение 1). Тогда сужения $\mathbf{v}^{(r)}$, $\mathbf{e}^{(r)}$ — линейные непрерывные функционалы на Λ, $\mathbf{S}^{(r)}$. Если, кроме того, $\operatorname{Def}_0^T \boldsymbol{\tau}$ для любого поля $\boldsymbol{\tau}$ из $\mathbf{S}^{(r)}$ принадлежит пространству Λ (предположение 2), то из соотношения $\mathbf{e} = \operatorname{Def} \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0''$ следует

$$\mathbf{e}^{(r)} = \operatorname{Def}^{(r)} \mathbf{v}^{(r)}, \quad \operatorname{Def}^{(r)} = (\operatorname{Def}_0^T|_{\mathbf{S}^{(r)}})^T : \Lambda' \to \mathbf{S}' \tag{2.4}$$

Укажем соотношения, которым удовлетворяют поля $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{v}^{(r)}$, если $m_s(\boldsymbol{\sigma}) = M_k(\mathbf{v})$ или, что то же, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{e} = \operatorname{Def} \mathbf{v}$ — экстремали задач (2.3), или, наконец, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{v}$ — решение задачи (2.2).

Связь различных постановок экстремальных задач теории предельной нагрузки. Введем множества $\Sigma^{(r)}$, $C^{(r)}$, $\mathbf{E}^{(r)}$ и функционал $D^{(r)}$, заменив в определениях Σ, C, $\mathbf{E}$, D пространство $\mathbf{S}$ пространством $\mathbf{S}^{(r)}$. Пусть нагрузка $\mathbf{l}$ уравновешивается полем напряжений $\mathbf{s}_l \in \mathbf{S}^{(r)}$. Рассмотрим задачи, аналогичные (2.3), о нахождении экстремумов $\alpha_l^{(r)}$, $\beta_l^{(r)}$ и экстремалей, на которых они достигаются:

$$\alpha_l^{(r)} = \sup\{m \geqslant 0 : (\Sigma^{(r)} + m\mathbf{s}_l) \cap C^{(r)} \neq \varnothing\} \tag{2.5}$$

$$\beta_l^{(r)} = \inf\{D^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}) / \langle \mathbf{s}_l, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{E}^{(r)}, \langle \mathbf{s}_l, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle > 0\}$$

Эти задачи формально двойственны, поэтому $\alpha_l^{(r)} \leqslant \beta_l^{(r)}$ [9].

Предположим, что элементы пространства Λ можно рассматривать как нагрузки $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$, для которых определена мощность — правая часть равенства (2.1). Пусть для любой нагрузки из Λ уравновешивающее ее поле напряжений принадлежит также пространству $\mathbf{S}^{(r)}$ (предположение 3).

Тогда, очевидно, первая из задач (2.5) совпадает с первой из задач (2.3) и $\alpha_l^{(r)} = \alpha_l$.

Пусть множество $\mathbf{U}$ плотно в пространстве $\mathbf{V}_0$, например граница $\partial\Omega$ состоит из нескольких компонент связности, причем расстояние между ее частями S_v и S_q положительно. Тогда из условий равновесия (2.1) следует, что $\mathrm{Def}_0{}^T\, \boldsymbol{\tau}$ для любого $\boldsymbol{\tau}$ из $\Sigma^{(r)}$, а значит, и $\langle \boldsymbol{\tau}, \mathrm{Def}^{(r)}\, \mathbf{u}\rangle = 0$ при $\mathbf{u} \in \Lambda'$, т. е. $\mathrm{Def}^{(r)}\, \mathbf{u}$ принадлежит множеству $\mathbf{E}^{(r)}$. В частности, если $\mathbf{e} = \mathrm{Def}\, \mathbf{u} \in \mathbf{E}$, то $\mathbf{e}^{(r)}$ принадлежит множеству $\mathbf{E}^{(r)}$. Используя еще очевидное неравенство $D^{(r)}(\mathbf{e}^{(r)}) \leqslant D(\mathbf{e})$, находим

$$\beta_l^{(r)} \leqslant \inf \{D^{(r)}(\mathbf{e}^{(r)})/\langle \mathbf{s}_l, \mathbf{e}^{(r)}\rangle : \mathbf{e} \in \mathbf{E},\ \langle s_l, \mathbf{e}\rangle > 0\} \leqslant \beta_l = \alpha_l$$

При учете отмеченных выше соотношений $\alpha_l^{(r)} \leqslant \beta_l^{(r)}$, $\alpha_l^{(r)} = \alpha_l$ это приводит к равенству $\alpha_l^{(r)} = \beta_l^{(r)} = \alpha_l$. Наконец, поскольку для экстремалей $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{e}$ задач (2.3) выполнены соотношения $D(\mathbf{e}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}\rangle$, $\boldsymbol{\sigma} \in C$ и напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ принадлежат пространству $\mathrm{S}^{(r)}$ (по предположению 3), то

$$\alpha_l = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}\rangle}{\langle \mathbf{s}_l, \mathbf{e}\rangle} = \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}^{(r)}\rangle}{\langle \mathbf{s}_l, \mathbf{e}^{(r)}\rangle} \leqslant \frac{D^{(r)}(\mathbf{e}^{(r)})}{\langle \mathbf{s}_l, \mathbf{e}^{(r)}\rangle} \leqslant \frac{D(\mathbf{e})}{\langle \mathbf{s}_l, \mathbf{e}\rangle} = \alpha_l$$

и значит, на $\mathbf{e}^{(r)}$ достигается минимум (2.5). Вместе с предыдущими замечаниями это приводит к следующему утверждению о связи задач (2.3) и (2.5).

Пусть выполнены предположения 1—3 и множество $\mathbf{U}$ плотно в пространстве $\mathbf{V}_0$. Тогда: 1) задачи (2.5) двойственны: $\alpha_l^{(r)} = \beta_l^{(r)}$; 2) экстремумы (2.5) совпадают с коэффициентом запаса нагрузки α_l; 3) задачи в напряжениях (2.3) и (2.5) совпадают; 4) если на $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{e} = \mathrm{Def}\, \mathbf{v}$ достигаются экстремумы (2.3), то на $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{e}^{(r)}$ достигаются экстремумы (2.5).

Это утверждение показывает, как из задачи (2.2) могут быть получены другие расширения исходной постановки задачи теории предельной нагрузки (к ним относится, в частности, задача, рассмотренная в [17]). Они могут использоваться для нахождения коэффициента запаса нагрузки. С другой стороны, это утверждение дает соотношения, которым удовлетворяют поля $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{v}^{(r)}$ и из которых в конечном счете выводятся условия на поверхностях разрыва.

Пространства Λ, $\mathrm{S}^{(r)}$. В дальнейшем рассматриваются пространства

$$\Lambda = \Lambda_{p'}(\Omega, S_v) = \mathbf{L}_{p'}(\Omega) \times \mathbf{L}_\infty(S_q), \quad p' \geqslant 3$$

$$\mathrm{S}^{(r)} = \mathrm{S}_{p'}^{(r)}(\Omega, S_v) = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{S} : \mathrm{Div}_0\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}_{p'}(\Omega),\ \boldsymbol{\sigma}_\nu|_{S_q} \in \mathbf{L}_\infty(S_q)\}$$

$$(\mathrm{Div}_0\, \boldsymbol{\sigma})_{ij} = \partial\sigma_{ij}/\partial x^j$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|^2_{\mathrm{S}^{(r)}} = \|\boldsymbol{\sigma}\|^2_{\mathrm{S}} + \|\mathrm{Div}_0\, \boldsymbol{\sigma}\|^2_{\mathrm{L}_{p'}} + \|\boldsymbol{\sigma}_\nu|_{S_q}\|^2_{\mathrm{L}_\infty}$$

Величина $\boldsymbol{\sigma}_\nu|_{S_q}$ определена при помощи отображения следа (лемма 4.1 [18]) как линейный непрерывный функционал на $\mathbf{W}_2^{1/2}(\partial\Omega)$, а $\boldsymbol{\sigma}_\nu|_{S_q}$ — его сужение на множество таких функций $\mathbf{w}$ из $\mathbf{W}_2{}^{1/2}(\partial\Omega)$, для которых $\mathrm{supp}\, \mathbf{w} \subset S_q$.

Вложение пространства Λ в $\mathbf{V}_0'$ дается соотношением

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{l}\rangle = \int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}\, dx + \int_{S_q} \mathbf{q}\mathbf{v}\, ds, \quad \mathbf{l} = (\mathbf{f}, \mathbf{q}) \in \Lambda, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$$

Правая часть здесь определена, так как пространство $\mathbf{V}_0$ непрерывно вложено в $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant 3/2$, и имеется непрерывное отображение следа из $\mathbf{V}_0$ в $\mathbf{L}_1(\partial\Omega)$ (см., например, [8]). По той же причине указанное вложение непрерывно.

Поскольку очевидна и непрерывность вложения $\mathrm{S}^{(r)}$ в пространство $\mathbf{S}$, то предположение 1 выполнено. Условия, достаточные для выполнения предположений 2, 3, а значит, и для справедливости сформулированного выше утверждения о связи задач (2.3) и (2.5), даются следующим предложением.

Лемма 1. Пусть Ω — ограниченная область класса C^1 и множество $\mathbf{U}$ плотно в пространстве $\mathbf{V}_0$. Тогда: 1) если $\boldsymbol{\tau}$ принадлежит пространству $\mathrm{S}^{(r)}$, то $\mathrm{Def}_0{}^T\,\boldsymbol{\tau} = (-\mathrm{Div}_0\,\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\tau}_\nu\,|_{S_q})$ и, следовательно, принадлежит пространству $\boldsymbol{\Lambda}$; 2) если нагрузка $\mathbf{l} = (\mathbf{f}, \mathbf{q})$ из $\boldsymbol{\Lambda}$ уравновешивается полем напряжений $\boldsymbol{\tau} \in \mathrm{S}$, то $\mathrm{Div}_0\,\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\tau}_\nu\,|_{S_q} = \mathbf{q}$ и, следовательно, $\boldsymbol{\tau}$ принадлежит пространству $\mathrm{S}^{(r)}$.

Доказательство опирается на лемму 4.1 [18].

Кусочно-гладкие поля $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{u}$ *и интегральное соотношение.* В дальнейшем предполагается, что условия, при которых имеется указанная выше связь задач (2.3), (2.5), выполнены. В силу этой связи полям $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{v}$, для которых имеется равенство $m_s(\boldsymbol{\sigma}) = M_k(\mathbf{v})$, соответствуют экстремали $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathrm{Def}^{(r)}\,\mathbf{u}$ $(\mathbf{u} = \mathbf{v}^{(r)})$ задач (2.5).

В случае, когда поля $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{u}$ — разрывные кусочно-гладкие, из их экстремального свойства вытекает требуемое интегральное соотношение.

Скорость $\mathbf{u}$ как элемент пространства $\boldsymbol{\Lambda}'$ представляется парой $(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_F)$, $\mathbf{u}_I \in \mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{u}_F \in \mathbf{L}_\infty{}'(S_q)$ [17]. Будем говорить, что напряжения $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{S}^{(r)}$ и скорость $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\Lambda}'$ — кусочно-гладкие, если область Ω разбивается на конечное число регулярных областей ω_a $(a = 1, 2, \ldots, M)$, для каждой из которых $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{C}^1(\overline{\omega}_a)$, $\mathbf{u}_I \in \mathbf{C}^1(\partial\omega_a)$ и, кроме того, $\mathbf{u}_F \in \mathbf{L}_1(S_q)$. Здесь область ω называется регулярной, если для любых непрерывно дифференцируемых на $\overline{\omega}$ функций $\mathbf{v}$, w справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_\omega w\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dx = \int_{\partial\omega} w\mathbf{v}_\nu\,dx - \int_\omega \mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,w\,dx$$

Рассматриваемые области ω_a $(a = 1, 2, \ldots, M)$ называются областями гладкости полей $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{u}$. Для кусочно-гладких полей $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{u}$ области гладкости, очевидно, можно выбирать с большим произволом, например измельчать.

На границах областей гладкости поля $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{u}$ могут терпеть разрыв. На поверхностях разрыва функции $\mathbf{u}_I$ обозначим $[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}_I]$. На границе области Ω выбирается внешняя нормаль и по определению на поверхности S_q полагаем $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_F - \mathbf{u}_I\,|_{S_q}$, на поверхности S_v — $[\mathbf{u}] = -\mathbf{u}_I|_{S_v}$. Используется также обозначение $\Gamma = \bigcup_a \partial\omega_a$.

Лемма 2. Пусть на напряжениях $\boldsymbol{\sigma}$ и скоростях деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ достигаются экстремумы (2.5), причем $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathrm{Def}^{(r)}\,\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\Lambda}'$ (в частности, может быть $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{e}^{(r)}$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}^{(r)}$, $\mathbf{e} = \mathrm{Def}\,\mathbf{v}$ и $m_s(\boldsymbol{\sigma}) = M_k(\mathbf{v})$). Пусть напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и скорость $\mathbf{u}$ — кусочно-гладкие. Тогда для любого поля $\boldsymbol{\sigma}_* \in C^{(r)}$, непрерывно дифференцируемого в областях гладкости полей $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{u}$, выполнено неравенство

$$\int_\Gamma (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_*)_{ij}\,[u_i]\,\nu_j\,ds + \int_{\Omega\setminus\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_*)_{ij}\,\frac{\partial u_i}{\partial x^j}\,dx \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Замечание 1. На $\Omega \setminus \Gamma$ определена обычная производная $\partial\mathbf{u}_I/\partial x^j$, которая в неравенстве (2.6) обозначена $\partial\mathbf{u}/\partial x^j$. Выражение $\sigma_{ij}\nu_j$ (как и $\sigma_{*ij}\,\nu_j$) имеет смысл на поверхности Г, поскольку напряжения σ принадлежат пространству $S^{(r)}$ и, значит, на поверхности разрыва выполнено условие $[\sigma_{ij}]\nu_j = 0$.

Доказательство. Поскольку экстремумы (2.5) совпадают (равны коэффициенту запаса α_l), то для соответствующих экстремалей σ, $\varepsilon_0 = \mathrm{Def}^{(r)}$ *и* выполнены соотношения

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha_l s_l, \quad \sigma_0 \in \Sigma^{(r)}, \quad \sigma \in C^{(r)}, \quad D^{(r)}(\varepsilon_0) = \alpha_l \langle s_l, \varepsilon_0 \rangle$$

Для напряжений $\sigma_0 \in \Sigma^{(r)}$ и скоростей деформаций $\mathrm{Def}^{(r)}\,\mathbf{u}$ выполнено равенство $\langle \sigma_0, \mathrm{Def}^{(r)}\,\mathbf{u} \rangle = 0$ (см. выше). Поэтому из предыдущих соотношений следует равенство $\langle \sigma, \varepsilon_0 \rangle = D^{(r)}(\varepsilon_0)$. По определению диссипации $D^{(r)}$ это означает, что для любого $\sigma_* \in C^{(r)}$ выполнено неравенство $\langle \sigma - \sigma_*, \varepsilon_0 \rangle \geqslant 0$, которое с учетом равенства $\varepsilon_0 = \mathrm{Def}^{(r)}\,\mathbf{u}$ и первого утверждения леммы 1 представляется в виде

$$-\int\limits_{\Omega} \frac{\partial (\sigma - \sigma_*)_{ij}}{\partial x^j} u_{Ii}\, dx + \int\limits_{S_q} (\sigma - \sigma_*)_{ij} \nu_j u_{Fi}\, ds \geqslant 0$$

После интегрирования по частям в первом слагаемом по каждой из областей гладкости полей σ, $\mathbf{u}$ и использования определения $[\mathbf{u}]$ это неравенство приобретает вид (2.6).

3. Условия на поверхностях разрыва в неоднородном жесткопластическом теле. Будем говорить, что свойства тела непрерывны в области ω, если значения функции диссипации $d(x, \mathbf{e})$ для всех точек $x \in \omega$ и всех тензоров $\mathbf{e} \in \mathrm{Sym}^d$ совпадают со значениями некоторой функции, непрерывной на $\overline{\omega} \times \mathrm{Sym}^d$ (черта обозначает замыкание). Свойства тела, заполняющего область Ω, называются кусочно-непрерывными, если Ω разбивается на конечное число областей, в каждой из которых свойства тела непрерывны.

Рассмотрим достаточно гладкую общую часть γ границы областей ω^+, ω^-, в каждой из которых свойства тела непрерывны. Пусть d^+ (d^-) — непрерывная на $\overline{\omega}^+ \times \mathrm{Sym}^d$ (на $\overline{\omega}^- \times \mathrm{Sym}^d$) функция, совпадающая с диссипацией d на $\omega^+ \times \mathrm{Sym}^d$ (на $\omega^- \times \mathrm{Sym}^d$). Пусть C_x^+ (C_x^-) — соответствующее диссипации d_x^+ (d_x^-) множество допустимых напряжений, определенное для всех точек x из $\overline{\omega}^+$ (из $\overline{\omega}^-$). (Напомним, что имеется взаимно однозначное соответствие между C_x и d_x [4].)

Множества C_x^+, C_x^- допустимых напряжений с двух сторон поверхности γ различны. В соответствии с приведенным выше определением множества C рассматриваются тела с кусочно-непрерывными свойствами, для которых поле напряжений допустимо, если оно допустимо в каждой из областей непрерывности свойств. Другими словами, рассматриваются композиты, в которых склейка не слабее склеиваемых частей.

Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — единичная нормаль к поверхности γ в точке x. Введем множество B_x^+ (и аналогично B_x^-)

$$B_x^+ = \{\boldsymbol{\tau} \in C_x^+ : \exists \boldsymbol{\tau}^- \in C_x^-, \quad \tau_{ij}\nu_j = \tau_{ij}^-\nu_j\}$$

Получим условия на поверхностях разрыва напряжений σ и скорости $\mathbf{u}$ (которые, в частности, могут совпадать с поверхностями разрыва свойств среды) в виде

$$\varepsilon_\nu([\mathbf{u}]) \in N(\sigma^+ \mid B_x^+), \quad \varepsilon_\nu([\mathbf{u}]) \in N(\sigma^- \mid B_x^-), \quad [\sigma_{ij}]\,\nu_j = 0 \qquad (3.1)$$
$$(\varepsilon_\nu([\mathbf{u}]))_{ij} = ([u_i]\,\nu_j + [u_j]\,\nu_i)/2$$

Замечание 2. Поверхности S_v и S_q также включаются в дальнейшем в число поверхностей разрыва. Тем самым, во-первых, краевое условие $\mathbf{u}|_{S_v} = 0$ заменяется более мягким условием $\mathbf{u}_I|_{S_v}\,\boldsymbol{\nu} = 0$ [19] и, во-вторых, на поверхности S_q может рассматриваться скорость $\mathbf{u}_F$, отличная от следа $\mathbf{u}_I|_{S_q}$ [17]. В условиях (3.1) положим на поверхностях S_v и S_q по определению для их внешней по отношению к области Ω стороны (отмечаемой индексом +) $C_x^+ = \mathrm{Sym}$ и $\sigma_{ij}^+ |_{S_q} \nu_j = q_i$. Тогда выполнение соотношений (3.1) на S_v эквивалентно условию $\varepsilon_\nu([\mathbf{u}]) \in N(\sigma^- \mid C_x^-)$, а на S_q — условиям

$$\varepsilon_\nu([\mathbf{u}]) \in N(\sigma^- \mid C_x^-), \quad \sigma_{ij}^- \nu_j |_{S_q} = q_i$$

Теорема. Пусть: 1) свойства тела кусочно-непрерывна; 2) для поля напряжений $\sigma \in \mathrm{S}^{(r)}$ и поля скорости $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0''$ статический и кинематический коэффициенты нагрузки l равны, $m_s(\sigma) = M_k(\mathbf{v})$; 3) поле напряжений σ и поле скорости $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}^{(r)}$ — кусочно-гладкие. Тогда на поверхности разрыва полей σ, $\mathbf{u}$ выполнены соотношения (3.1), а в областях их гладкости — ассоциированный закон (1.2).

Для любой внутренней точки τ множества B_{x_0}, $x_0 \in \Gamma$, в окрестности точки x_0 строится допустимое кусочно-гладкое поле напряжений τ_* с единственной поверхностью разрыва — частью Γ, лежащей в рассматриваемой окрестности, причем $\tau_*^+(x_0) = \tau$, $[\tau_{*ij}] = 0$. Далее для доказательства соотношений (3.1) следует применить интегральное неравенство (2.6) при $\sigma_* = \varphi\tau_* + (1-\varphi)\sigma$, где φ — гладкая функция, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, и воспользоваться обычной процедурой локализации, стягивая подходящим образом носитель функции φ. Аналогично с соответствующими упрощениями доказывается соотношение (1.2), когда точка x_0 лежит в области гладкости полей σ, u.

Следствие 1. На поверхности разрыва выполнено условие $[u_i]\nu_i = 0$. Оно вытекает из соотношений (3.1) так же, как в [11] — из (1.3).

Следствие 2. В частном случае однородного тела условия (3.1) на поверхности разрыва сводятся к известным соотношениям (1.3). Это вытекает из совпадения множеств $C_x^+ = C_x^- = C_x$, а значит, и множеств $B_x^+ = B_x^- = C_x$. Таким образом, предложенные в [10] условия необходимо должны выполняться на поверхностях разрыва напряжений и скорости, если последние приводят к равному статическому и кинематическому коэффициентам нагрузки.

4. Простая форма и механический смысл условий на поверхностях разрыва. Используя единичную нормаль ν к поверхности разрыва, поставим в соответствие каждому симметричному тензору второго ранга $\mathbf{s}$ скаляр $P_\nu(\mathbf{s})$ и вектор $\mathbf{T}_\nu(\mathbf{s})$ с компонентами $\mathbf{T}_\nu{}^i$:

$$P_\nu(\mathbf{s}) = s^{ij}\nu_i\nu_j, \quad T_\nu{}^i(\mathbf{s}) = s^{ik}\nu_k - s^{lm}\nu_l\nu_m\nu^i$$

Вектор $\mathbf{T}_\nu(\mathbf{s})$, очевидно, ортогонален вектору ν. Если σ — тензор напряжений, то $P_\nu(\sigma)$ — нормальное усилие, а $\mathbf{T}_\nu(\sigma)$ — касательное усилие на площадке с нормалью ν. Для тензора $\varepsilon_\nu(\mathbf{a})$ с компонентами $(\varepsilon_\nu(\mathbf{a}))_{ij} = (a_i\nu_j + a_j\nu_i)/2$, когда $\mathbf{a}\nu = 0$, справедливы равенства

$$\varepsilon_\nu(\mathbf{a})\cdot\mathbf{s} = 2\mathbf{T}_\nu(\varepsilon_\nu(\mathbf{a}))\mathbf{T}_\nu(\mathbf{s}), \quad \mathbf{T}_\nu(\varepsilon_\nu(\mathbf{a})) = \mathbf{a}/2, \quad P_\nu(\varepsilon_\nu(\mathbf{a})) = 0 \qquad (4.1)$$

Пусть $A_x^\pm$ — множество векторов (ортогональных вектору ν), в которое отображение $\mathbf{T}_\nu$ переводит множество $C_x^\pm$. Тогда множество $A_x^\circ = A_x^+ \cap A_x^-$ имеет смысл совокупности касательных усилий на поверхности разрыва, допустимых с точки зрения обоих условий — $\sigma^+(x) \in C_x^+$, $\sigma^-(x) \in C_x^-$. Отметим, что множество A_x°, вообще говоря, не совпадает с множеством $\mathbf{T}_\nu(C_x^+ \cap C_x^-)$, а лишь включает его.

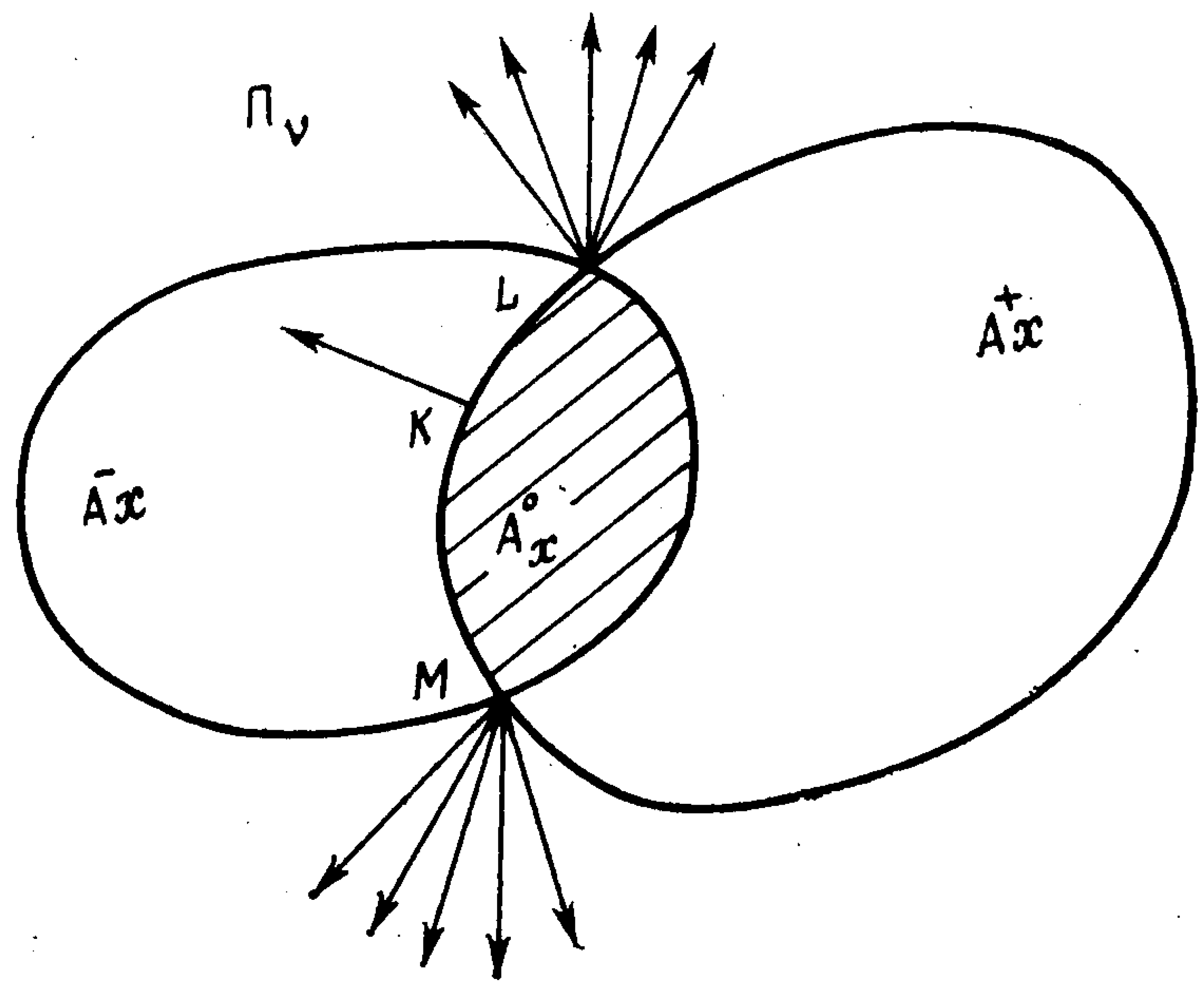
Условия на поверхностях разрыва (3.1) эквивалентны соотношениям

$$[\mathbf{u}] \in N(\mathbf{t} \mid A_x^\circ), \quad \mathbf{t} \equiv \mathbf{T}_\nu(\sigma^+) = \mathbf{T}_\nu(\sigma^-), \quad P_\nu(\sigma^+) = P_\nu(\sigma^-) \qquad (4.2)$$
$$\sigma^+ \in C_x^+, \quad \sigma^- \in C_x^-$$

Равенства величин $\mathbf{T}_\nu$ и P_ν являются просто другой записью условия $[\sigma_{ij}]\nu_j = 0$. Для проверки эквивалентности соотношений (3.1) и (4.2) используются равенства (4.1) и возможность представления любого вектора $\mathbf{t}_*$ из A_x° в виде $\mathbf{t}_* = \mathbf{T}_\nu(\boldsymbol{\sigma}_*^+) = \mathbf{T}_\nu(\boldsymbol{\sigma}_*^-)$ при некоторых $\boldsymbol{\sigma}_*^+$ из C_x^+ и $\boldsymbol{\sigma}_*^-$ из C_x^-, причем $P_\nu(\boldsymbol{\sigma}_*^+) = P_\nu(\boldsymbol{\sigma}_*^-)$.

Первое из соотношений (4.2) имеет геометрическую интерпретацию, совершенно аналогичную интерпретации ассоциированного закона (1.2).

На фиг. 2 показаны множества A_x^+, A_x^-, A_x°, которые лежат в плоскости Π_ν, ортогональной вектору $\boldsymbol{\nu}$, и конусы внешних нормалей к множеству A_x° в точках K, L, M (ср. с фиг. 1). Отметим, что даже в случае



Фиг. 2

гладких поверхностей текучести (границ множеств C_x^+, C_x^-) в общем положении граница множества A_x° имеет угловые точки.

Наконец, первое из соотношений (4.2) можно интерпретировать как принцип максимума

$$\mathbf{t} \in A_x^\circ, \quad (\mathbf{t} - \mathbf{t}_*)[\mathbf{u}] \geqslant 0 \text{ для любого } \mathbf{t}_* \in A_x^\circ \tag{4.3}$$

Он совершенно аналогичен известному принципу максимума $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_*)\cdot\mathbf{e} \geqslant 0$, $\boldsymbol{\sigma}_* \in C_x$, который связывает напряжения и скорости деформаций в области гладкости. Здесь роль напряжений играет касательное усилие, а роль скоростей деформаций — скачок скорости.

Таким образом, условия (3.1) или (4.2) на поверхности разрыва означают следующее: 1) усилие на поверхности разрыва непрерывно, 2) напряжения с обеих ее сторон допустимы, 3) скачок скорости и касательное усилие удовлетворяют закону, ассоциированному с множеством допустимых касательных усилий или, что то же, принципу максимума (4.3).

Приведем некоторые простые свойства условий (4.2). Предполагается, что множества C_x^{d+}, C_x^{d-} строго выпуклы (и, как всегда, содержат окрестность нуля). Тогда множество A_x° также строго выпукло.

1°. Для любого заданного направления скачка скорости $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{u}]\,\boldsymbol{\nu} = 0$, касательное усилие $\mathbf{t}$ определяется единственным образом и лежит на границе по крайней мере одного из множеств A_x^+, A_x^-.

2°. Если свойства тела терпят разрыв ($C_x^+ \neq C_x^-$), то при ненулевом скачке скорости $[\mathbf{u}]$ напряжения с одной стороны поверхности разрыва могут лежать строго внутри соответствующей поверхности текучести. При этом условия (4.2) оставляют произвол для их компонент.

3°. Если касательное усилие лежит, например, на границе множества A_x^+, то напряжения σ^+ лежат на соответствующей поверхности текучести — границе множества C_x^+. Девиатор σ^{+d} определяется по касательному усилию единственным образом.

4°. В частности, если касательное усилие известно и лежит на границах обоих множеств A_x^+, A_x^-, то единственным образом определяются оба девиатора σ^{+d}, σ^{-d} и скачок шаровой части. Для однородного тела отсюда вытекает известное условие непрерывности напряжений; в общем случае оно не выполнено.

5. Разложение скачка скорости и минимальное свойство диссипации. Укажем еще одно полезное представление рассматриваемых соотношений на поверхностях разрыва. Все векторы, участвующие в дальнейшем построении, ортогональны вектору $\mathbf{v}$ или, иначе говоря, лежат в плоскости Π_ν.

С введенным множеством допустимых касательных усилий A_x° можно связать функцию диссипации δ_x° аналогично тому, как это делается для множества допустимых напряжений. Именно, для вектора $\mathbf{w}$ плоскости Π_ν положим

$$\delta_x^\circ(\mathbf{w}) = \sup\{\mathbf{t}_*\mathbf{w} : \mathbf{t}_* \in A_x^\circ\} \tag{5.1}$$

Для скачка скорости рассматриваются разложения $[\mathbf{u}] = \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-$, где $\mathbf{w}^+$, $\mathbf{w}^-$ — векторы плоскости Π_ν. Справедливы следующие утверждения.

1°. Скачок скорости $[\mathbf{u}]$ и касательное усилие $\mathbf{t}$ удовлетворяют условию $[\mathbf{u}] \in N(\mathbf{t} \mid A_x^+)$ тогда и только тогда, когда возможно разложение

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{W}^+ + \mathbf{W}^-, \quad \mathbf{W}^+ \in N(\mathbf{t} \mid A_x^+), \quad \mathbf{W}^- \in N(\mathbf{t} \mid A_x^-) \tag{5.2}$$

2°. Это разложение обладает следующим минимальным свойством: на векторах $\mathbf{w}^+ = \mathbf{W}^+$, $\mathbf{w}^- = \mathbf{W}^-$ достигается

$$\min\{d_x^+(\varepsilon_\nu(\mathbf{w}^+)) + d_x^-(\varepsilon_\nu(\mathbf{w}^-)) : \mathbf{w}^+ \in \Pi_\nu,\ \mathbf{w}^- \in \Pi_\nu,\ \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^- = [\mathbf{u}]\} \tag{5.3}$$

3°. Минимальное значение (5.3) равно

$$d_x^+(\varepsilon_\nu(\mathbf{W}^+)) + d_x^-(\varepsilon_\nu(\mathbf{W}^-)) = \delta_x^\circ([\mathbf{u}]) = \mathbf{t}[\mathbf{u}]$$

Введем для множеств A_x^+, A_x^- функции диссипации δ_x^+, δ_x^- аналогично соотношению (5.1). Из формулы (4.1) следуют равенства

$$\delta_x^+(\mathbf{w}^+) = d_x(\varepsilon_\nu(\mathbf{w}^+)), \quad \delta_x^-(\mathbf{w}^-) = d_x^-(\varepsilon_\nu(\mathbf{w}^-))$$

Тогда задача (5.3) принимает вид

$$\min\{\delta_x^+(\mathbf{w}^+) + \delta_x^-(\mathbf{w}^-) : \mathbf{w}^+ \in \Pi_\nu,\ \mathbf{w}^- \in \Pi_\nu,\ \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^- = [\mathbf{u}]\} \tag{5.4}$$

Необходимые и достаточные условия экстремума [9] для этой задачи при помощи теоремы Моро — Рокафеллара преобразуются к соотношениям (5.2) или к соотношению $[\mathbf{u}] \in N(\mathbf{t} \mid A_x^\circ)$. Это доказывает первые два утверждения. Третье утверждение следует из того, что по теореме 1 § 3.4 из [9] минимум в задаче (5.4) достигается и равен

$$\delta_x^+(\mathbf{W}^+) + \delta_x^-(\mathbf{W}^-) = \delta_x^\circ([\mathbf{u}])$$

Равенство же $\delta_x^\circ([\mathbf{u}]) = \mathbf{t}[\mathbf{u}]$, входящее в третье утверждение, при $\mathbf{t} \in A_x^\circ$ следует из условия $[\mathbf{u}] \in N(\mathbf{t} \mid A_x^\circ)$, так как последнее эквивалентно принципу максимума (4.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гвоздев А. А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Вып. 1. Сущность метода и его обоснование. М.: Стройиздат, 1949. 279 с.
2. *Drucker D., Prager W., Greenberg H.* Extended limit design theorems for continuous media // Quart. Appl. Math. 1952. V. 9. № 4. P. 381—389.
3. *Ивлев Д. Д.* О диссипативной функции в теории пластических сред // Докл. АН СССР. Т. 176. № 5. С. 1037—1039.
4. *Nayroles B.* Essai de theorie fonctionnele des structures rigides plastiques parfaites // J. Méc. 1970. V. 9. № 3. P. 491—506.
5. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Вариационные методы в теории течений жестко — вязко — пластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1971. 114 с.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
7. *Мосолов П. П.* О проблеме минимума функционала // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1289—1310.

8. *Matthies H.* Existence theorems in thermo-plasticity // J. Méc. 1979. V. 18. № 4. P. 695—712.
9. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
10. *Hill R.* Discontinuity relations in mechanics of solids // Progress in Solids Mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1961. V. 2. P. 247—276.
11. *Куксин С. Б.* Условия на разрыве решений уравнения Прандтля — Рейсса // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1065—1068.
12. *Каменярж Я. А.* О разрывных решениях задачи теории предельной нагрузки // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 566—569.
13. *Каменярж Я. А.* О двойственных задачах теории предельной нагрузки для идеальнопластических тел // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 1. С. 51—54.
14. *Каменярж Я. А.* Напряжения в несжимаемых средах. Эквивалентность постановок задачи идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 1. С. 46—49.
15. *Каменярж Я. А.* О постановках задачи теории идеальной пластичности // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 490—496.
16. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
17. *Серегин Г. А.* Расширение вариационной постановки задачи для жесткопластической среды на поля скоростей с разрывами типа скольжений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 1030—1037.
18. *Каменярж Я. А.* Статически допустимые поля напряжений в несжимаемых средах // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 228—237.
19. *Teman R., Strang G.* Duality and relaxation in the variational problems of plasticity // J. Méc. 1980. V. 19. № 3. P. 493—527.

Москва

Поступила в редакцию
15.VII.1987