

УДК 539.3 : 576.314

Т. А. Прибылева

КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО СЛОИСТОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ СИСТЕМЫ ДВУМЕРНЫХ КОНТИНУУМОВ

Рассматривается метод построения континуально-дискретных моделей многокомпонентных слоистых тел при помощи системы, состоящей из произвольного числа двумерных континуумов с конечными промежутками между ними. Приводятся соотношения согласования для основных кинематических, деформационных и динамических параметров, позволяющие получать реологические соотношения для тела в целом с учетом свойств и характера взаимодействия отдельных составляющих. Рассматривается пример моделирования тонкого слоистого упругого тела. Обсуждаются способы моделирования биологической мембраны.

Существуют физические объекты, для которых непосредственное описание методами механики трехмерных сплошных сред невозможно или недостаточно эффективно из-за того, что физические свойства объекта в одном из направлений дискретны, т. е. требования гипотезы сплошности [1] в этом направлении не выполнены. При этом в двух других направлениях объект обладает достаточно непрерывными свойствами и допускает континуальное описание.

К числу дискретных в поперечном направлении объектов относится, например, оболочка живой клетки — биологическая мембрана, состоящая из нескольких слоев макромолекул, причем отдельные слои включают молекулы разных сортов. Существует, кроме того, широкий класс слоистых и стратифицированных тел, свойства которых в поперечном направлении возможно описывать дискретным набором параметров.

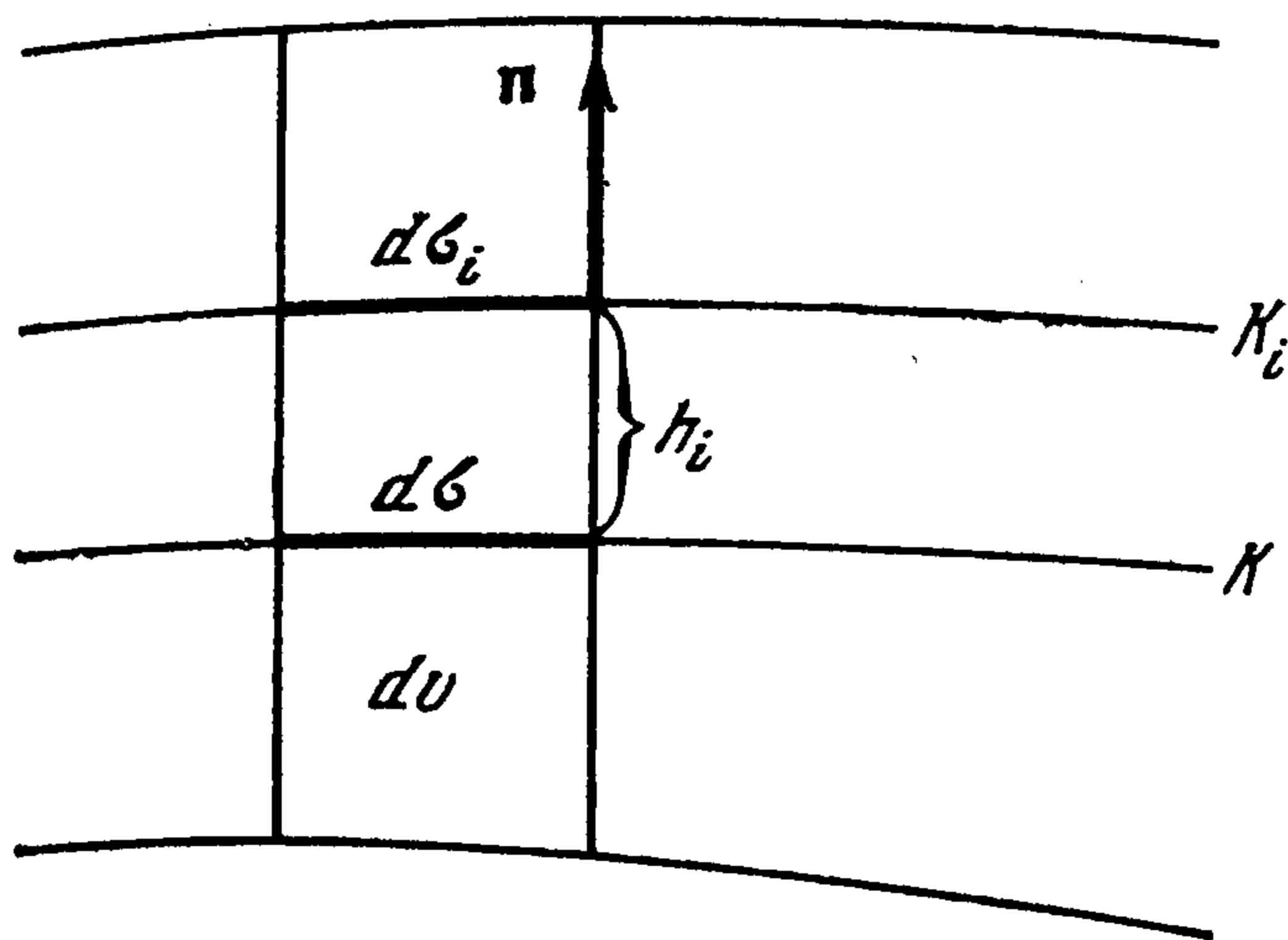
В ряде работ (например, [2—7]) введено понятие двумерного континуума (материальной поверхности, обладающей массой), который характеризуется соответствующими кинематическими, динамическими и энергетическими параметрами. Представляется естественной идея моделирования многокомпонентных слоистых тел при помощи системы двумерных континуумов [8]¹. Некоторые элементы этого подхода изложены в [9, 10].

1. Построение основного континуума и многолистной системы. Под двумерным континуумом (материальной поверхностью) понимается бесконечно тонкий физический объект, удовлетворяющий требованиям гипотезы сплошности [1] в продольном направлении.

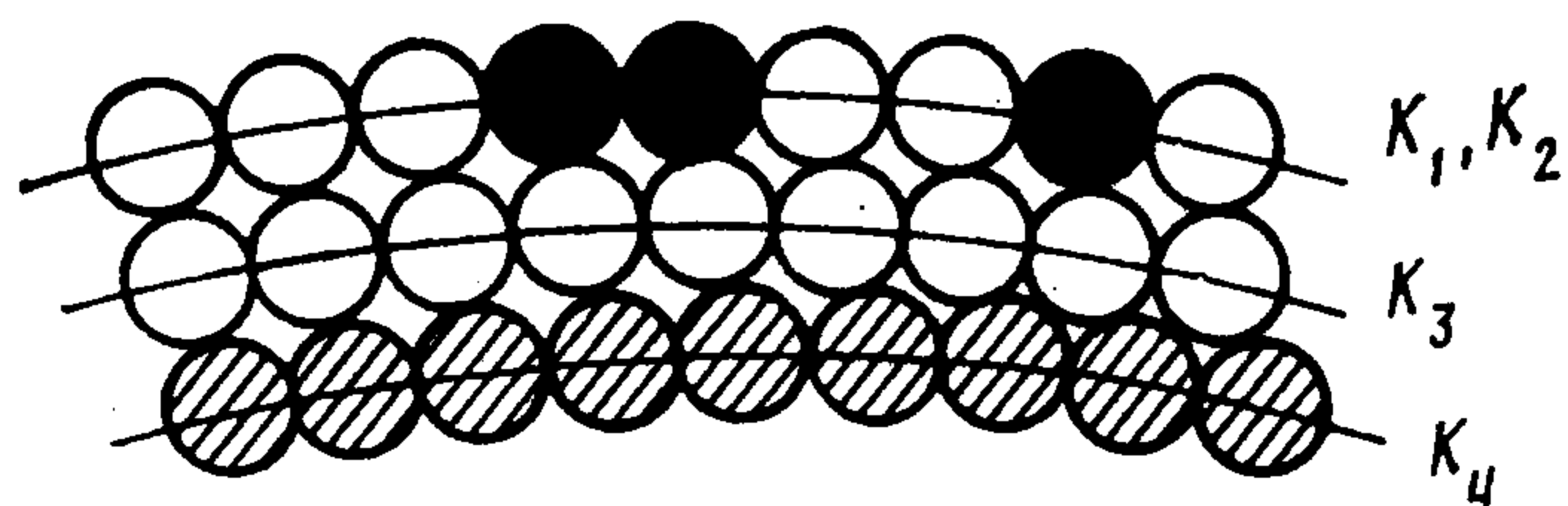
При континуально-дискретном моделировании трехмерному телу Z в целом ставится в соответствие основной континуум K . Геометрическая поверхность, на которой лежит континуум, называется основной поверхностью и обозначается тем же символом K . Поверхность K (фиг. 1), по определению, проходит через центры масс частей dZ , отсекаемых от тела Z элементарными цилиндрами dv , с образующими, нормальными к поверхности K . Можно показать, что поверхность K (задаваемая неявным образом) существует и достаточно гладкая при условии выполнения требований гипотезы сплошности для материала тела Z в продольном направлении.

Элементарный цилиндр dv отсекает от континуума K элемент $d\sigma$ (фиг. 1), который, по определению, моделирует часть dZ . При этом совпадают соответствующие характеристики элемента $d\sigma$ и части dZ , такие, как

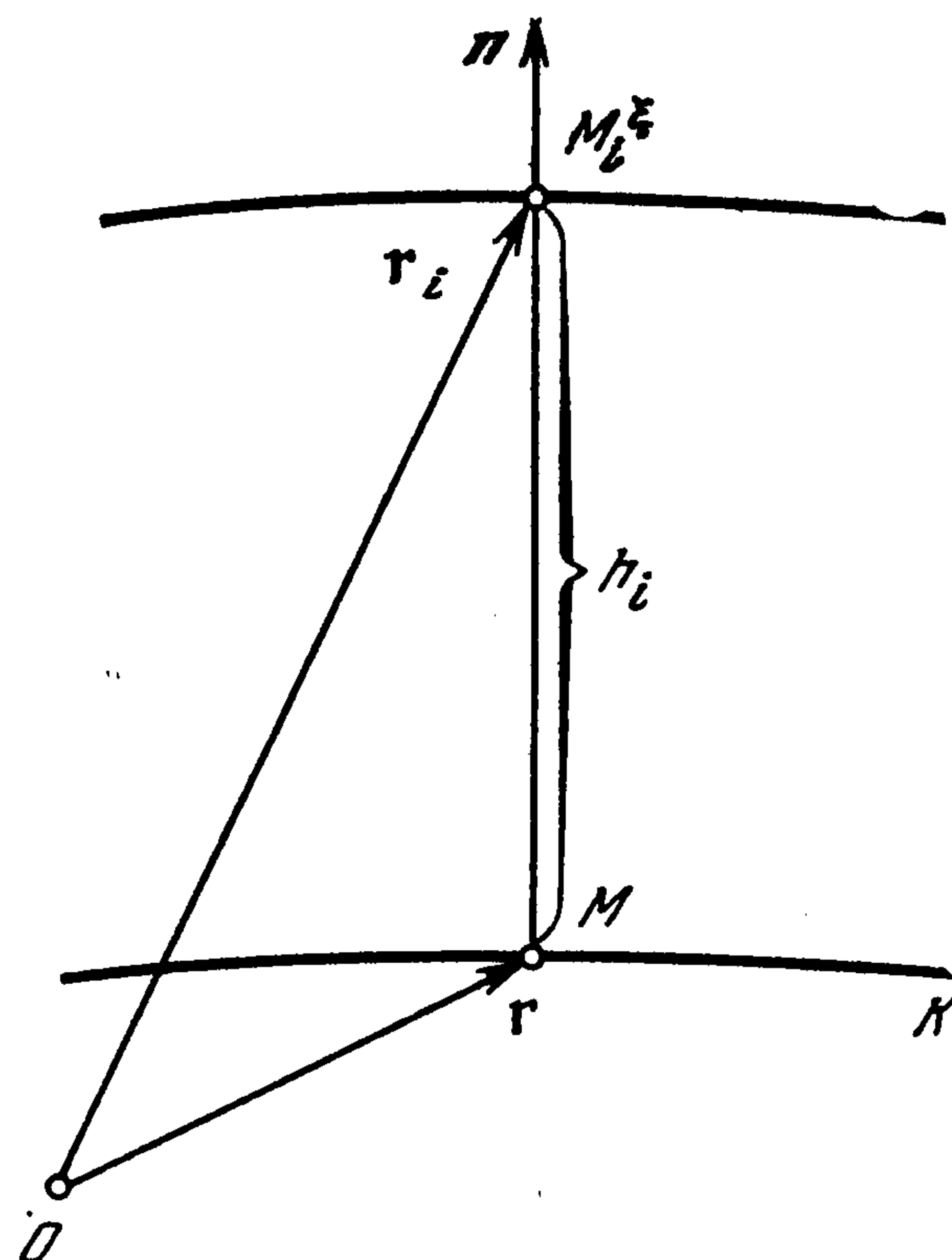
¹ См. также: Прибылева Т. А. Исследования по биомеханике. Модель многолистного континуума: кинематика и баланс массы. Отчет Ин-та механики МГУ № 2555, 1981. 38 с.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

масса, положение и скорость центра масс, суммарный электрический заряд, внутренняя энергия, энтропия и т. д. Система сил и моментов, действующих на элемент $d\sigma$, должна быть эквивалентна аналогичной системе сил и моментов, действующих на часть dZ .

Допустим, что тело Z образовано N составляющими Z_i , под которыми, по определению, понимаются отдельные слои или отдельные сорта молекул (компоненты) в слое. Например, тело, схематично изображенное на фиг. 2, состоит из четырех составляющих.

Обозначим dZ_i часть составляющей Z_i , отсекаемую элементарным цилиндром $d\nu$ с нормальной к поверхности K образующей. Многолистная система двумерных континуумов строится на базе основной поверхности K следующим образом: каждой составляющей Z_i ставится в соответствие двумерный континуум (лист) K_i , лежащий на поверхности K_i , проходящей через центры масс частей dZ_i . При этом часть $d\sigma_i$ континуума K_i , заключенная внутри элементарного цилиндра $d\nu$ (фиг. 1), по определению, моделирует часть dZ_i составляющей Z_i , причем совпадают соответствующие характеристики элементов $d\sigma_i$ и частей dZ_i ; аналогичные системы сил и моментов должны быть эквивалентны (так же как и при построении основного континуума K).

Другими словами, при построении основного континуума масса всего объекта Z «сносится» на одну поверхность K , а при построении многолистной системы масса отдельных составляющих Z_i (в частности, отдельных слоев) сносится соответственно на различные поверхности K_i . Элементарным образованием в многолистной системе является набор элементов $d\sigma_i$ (фиг. 1), с конечными промежутками между ними, что принципиально отличается от механики трехмерных смесей.

Заметим, что разделение трехмерного объекта на слои может быть условным, причем точность описания при помощи многолистной системы увеличивается с увеличением числа слоев.

Некоторые из континуумов K_i могут лежать на одной поверхности и перемещаться один относительно другого. Это позволяет моделировать поверхностную диффузию.

При введении континуально-дискретного описания постулируется общее правило установления соответствия между характеристиками тела Z и параметрами основного континуума K , а также составляющих Z_i и листов K_i .

Параметры, характеризующие свойства и взаимодействие составляющих Z_i , первоначально задаются на различных поверхностях K_i , а затем приводятся к единой системе координат, связанной с поверхностью K .

В основе метода континуально-дискретного моделирования лежат соотношения согласования, связывающие параметры континуума K с параметрами листов K_i . При выводе соотношений согласования, в частности, учитываются: поперечные деформации слоев, относительное продольное движение слоев и их компонент, массообмен между составляющими и с внешней средой.

Подчеркнем, что балансовые уравнения для континуумов K и K_i являются тривиальным обобщением уравнений, приведенных в работах [2—7]. Трудность и состоит в получении соотношений согласования и в построении с их помощью (как и в механике трехмерных смесей) систем уравнений относительно меньшего числа переменных.

Ниже описывается общий способ построения многолистной системы и установления соответствия между характеристиками тела Z и его составляющих Z_i , с одной стороны, и параметрами континуума K и листов K_i — с другой; приводятся соотношения согласования между кинематическими, деформационными и динамическими параметрами; дается пример получения реологических соотношений для основного континуума K в случае тонкого упругого слоистого тела; обсуждаются способы построения моделей для биологической мембраны и приведено реологическое уравнение для осесимметричного изгиба липидного бислоя при наличии массообмена между слоями.

2. Кинематические и деформационные соотношения. Введем на поверхностях K и K_i лагранжевы системы координат η^α и η_i^α , связанные с центрами масс континуумов K и K_i ($\alpha = 1, 2$). При этом центры масс элементов $d\sigma$ и $d\sigma_i$ (фиг. 1) совпадают соответственно с центрами масс частей dZ и dZ_i . Кроме того, на поверхности K_i введем систему координат ξ_i^α , «нормально соответствующую» системе η^α на поверхности K . Для этого положим, что точка M_i^ξ (фиг. 3), лежащая на нормали к поверхности K , проведенной из точки M с координатами η^α , имеет координаты $\xi_i^\alpha \equiv \eta^\alpha$.

Произвольная функция A_i , определенная на поверхности K_i , доопределяется на поверхности K по правилу $A_i(\eta^\alpha) = A_i(\xi_i^\alpha)$, причем если функция A_i рассчитана на единицу площади поверхности K_i , то вводится соответствующая величина на единицу площади поверхности K :

$$A_i' = k_i A_i, \quad k_i = d\sigma_i/d\sigma \quad (2.1)$$

Таким образом, параметры, характеризующие свойства отдельных компонент Z_i и определяемые первоначально на листах K_i , приводятся к единой системе координат η^α на поверхности K .

Центр масс набора элементов $d\sigma_i$ лежит в точке M (фиг. 3), так что имеют место равенства

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{r}_i, \quad c_i = dm_i/dm, \quad dm = \sum_{i=1}^N dm_i \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r}_i(\eta^\alpha) = \mathbf{r}_i(\xi_i^\alpha) = \mathbf{r}(\eta^\alpha) + h_i(\eta^\alpha) \mathbf{n} \quad (2.3)$$

где \mathbf{r} , \mathbf{r}_i — соответственно радиусы-векторы поверхностей K и K_i (фиг. 3); c_i — массовая концентрация составляющей Z_i ; dm и dm_i — соответственно массы элементов $d\sigma$ и $d\sigma_i$, равные массам частей dZ и dZ_i (см. п. 1); \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к поверхности K ; h_i — расстояние от K_i до K , измеренное по нормали к поверхности K , причем $h_i \geq 0$, если поверхность K_i расположена со стороны положительной нормали к K , и $h_i < 0$ в противном случае.

При численном совпадении значений координат системы η^α и ξ_i^α имеют различные базисные векторы \mathbf{r}_α и $\mathbf{r}_{i\alpha}^\xi$, причем в силу (2.3) имеют место соотношения согласования:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i\alpha}^\xi &= \mathbf{r}_\alpha + \frac{\partial(h_i \mathbf{n})}{\partial \eta^\alpha} = \mathbf{r}_\alpha - h_i b_{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta + \frac{\partial h_i}{\partial \eta^\alpha} \mathbf{n} \\ a_{i\alpha\beta}^\xi &= \mathbf{r}_{i\alpha}^\xi \cdot \mathbf{r}_{i\beta}^\xi = a_{\alpha\beta} - 2h_i \cdot b_{\alpha\beta} + h_i^2 b_{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma} + \frac{\partial h_i}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial h_i}{\partial \eta^\beta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — компоненты первого и второго метрических тензоров поверхности K , $a_{i\alpha\beta}^\xi$ — компоненты первого метрического тензора поверхности K_i в системе ξ_i^α .

Отсюда получается связь между тензором деформаций $\varepsilon_{i\alpha\beta}^\xi = 1/2 (a_{i\alpha\beta}^\xi - a_{i\alpha\beta}^{\xi^0})$ для системы ξ_i^α на листе K_i и тензором деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ континуума K (здесь и далее верхний индекс $^\circ$ обозначает величины в начальный момент времени t°):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i\alpha\beta}^\xi &= \varepsilon_{\alpha\beta} - (h_i b_{\alpha\beta} - h_i^\circ b_{\alpha\beta}^\circ) + \\ &+ 1/2 \left(h_i^2 b_{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma} - h_i^{\circ 2} b_{\alpha\gamma}^\circ b_{\beta\gamma}^\circ + \frac{\partial h_i}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial h_i}{\partial \eta^\beta} - \frac{\partial h_i^\circ}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial h_i^\circ}{\partial \eta^\beta} \right) \end{aligned}$$

Для случая тонкого тела, когда все величины h_i малы по сравнению с характерными линейными размерами, это выражение принимает простой вид [10]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i\alpha\beta}^\xi &= \varepsilon_{\alpha\beta} - (h_i b_{\alpha\beta} - h_i^\circ b_{\alpha\beta}^\circ) = \varepsilon_{\alpha\beta} - \chi_i b_{\alpha\beta} - h_i \kappa_{\alpha\beta} + \chi_i \kappa_{\alpha\beta} \\ \chi_i &= h_i - h_i^\circ, \quad \kappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}^\circ \end{aligned} \quad (2.5)$$

Необходимым и достаточным условием того, что при деформировании тела Z нормальное волокно остается прямолинейным и нормальным к поверхности K , является выполнение тождества $\xi_i^\alpha \equiv \eta_i^\alpha$ (означающего, что частицы континуумов K_i не перемещаются относительно нормали к K) для всех i в течение всего процесса деформирования. При этом тензор $\varepsilon_{i\alpha\beta}^\xi$ тождественно совпадает с тензором деформаций $\varepsilon_{i\alpha\beta}^\eta$ для системы η_i^α , характеризующим деформации континуума K_i . Таким образом, тензор $\varepsilon_{i\alpha\beta}^\xi$ характеризует деформации листа K_i при условии сохранения нормального волокна.

Имеет место выражение [9] для тензора $\varepsilon_{i\alpha\beta}^\eta$ через абсолютные перемещения \mathbf{u}_i^ξ точек листа K_i с постоянными координатами ξ_i^α и перемещения \mathbf{U}_i° (фиг. 4) точек M_i^η с постоянными координатами η_i^α относительно точек $M_i^{\circ\xi}$ с постоянными координатами ξ_i^α (при условии, что точки M_i^ξ и M_i^η совпадают в данный момент времени t):

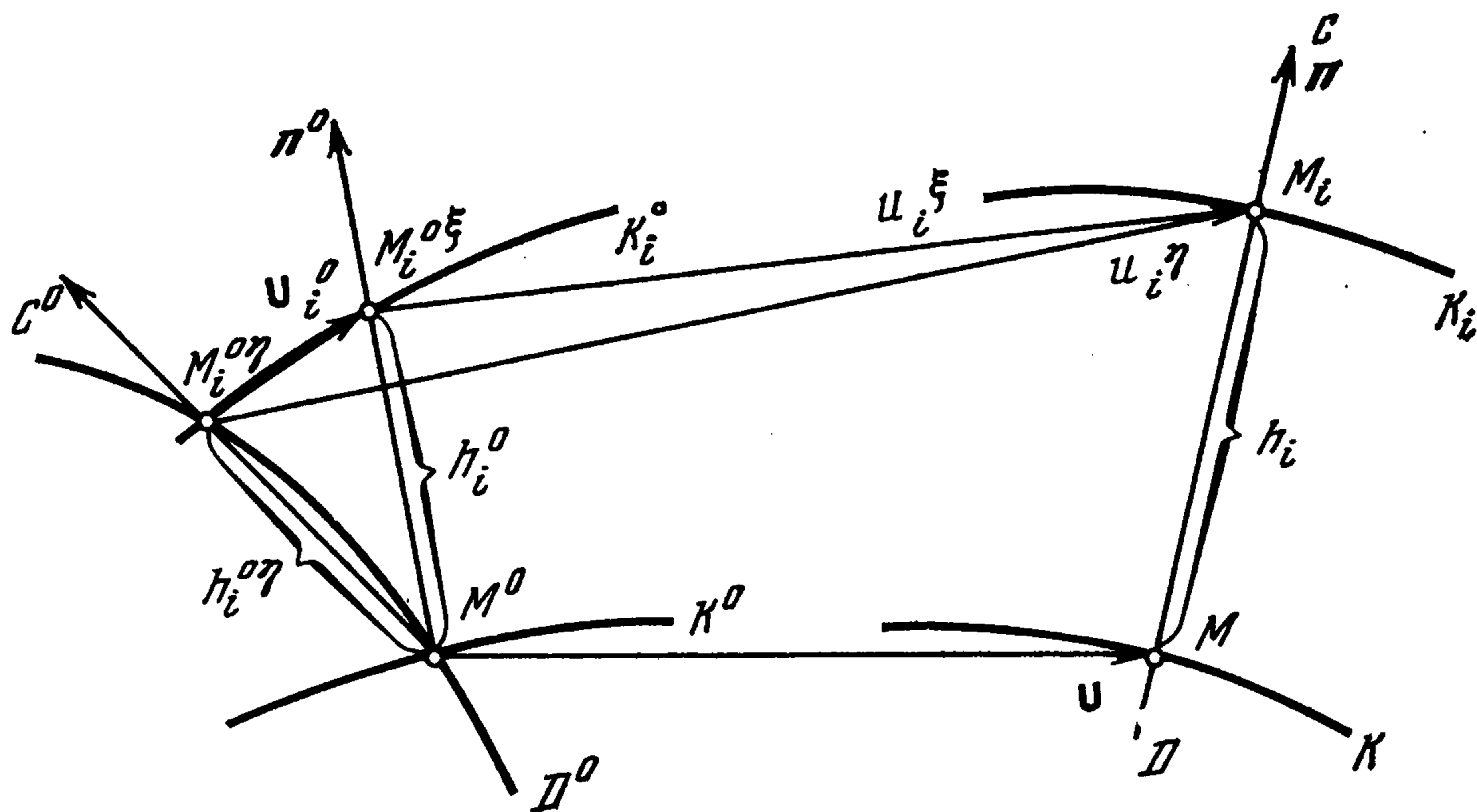
$$\begin{aligned} \varepsilon_{i\alpha\beta}^\eta &= \varepsilon_{i\alpha\beta}^\xi + \varepsilon_{i\alpha\beta}^U - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i^\xi}{\partial \eta_i^\alpha} \frac{\partial \mathbf{U}_i^\circ}{\partial \eta_i^\beta} + \frac{\partial \mathbf{u}_i^\xi}{\partial \eta_i^\beta} \frac{\partial \mathbf{U}_i^\circ}{\partial \eta_i^\alpha} \right) \\ \varepsilon_{i\alpha\beta}^U &= \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i^\circ}{\partial \eta_i^\alpha} \mathbf{r}_{i\beta}^\xi + \frac{\partial \mathbf{U}_i^\circ}{\partial \eta_i^\beta} \mathbf{r}_{i\alpha}^\xi - \frac{\partial \mathbf{U}_i^\circ}{\partial \eta_i^\alpha} \frac{\partial \mathbf{U}_i^\circ}{\partial \eta_i^\beta} \right) \end{aligned}$$

Абсолютные перемещения частиц континуума K_i (фиг. 4) таковы:

$$u_i^\eta = U_i^\circ + u_i^\xi$$

Величины U_i° характеризуют отклонение «прообраза» $C^\circ D^\circ$ волокна CD , нормального к поверхности K в данный момент времени, от нормали n° к начальному положению K° поверхности K . При деформациях с сохранением нормального волокна $U_i^\circ \equiv 0$.

Введем абсолютные скорости континуумов K и K_i (совпадающие со скоростями центров масс частей dZ и dZ_i) как скорости точек соответственно с постоянными координатами η^α и η_i^α . Относительное движение конти-



Фиг. 4

нуумов K_i и K , отражающее движение компоненты Z_i относительно общего центра масс, характеризуется скоростью $w_i^\eta = v_i - v$, причем

$$w_i^\eta = W_i + w_i^\xi, \quad w_i^\xi = v_i^\xi - v, \quad W_i = v_i - v_i^\xi \quad (2.6)$$

где v_i^ξ — абсолютная скорость точки M_i^ξ с постоянными координатами ξ_i^α ; W_i — скорость движения частицы континуума K_i вдоль поверхности K_i (относительно точки M_i^ξ , в данный момент совпадающей с частицей). Скорость w_i^ξ движения точки M_i^ξ относительно точки M может быть выражена через параметры континуума K и величины h_i .

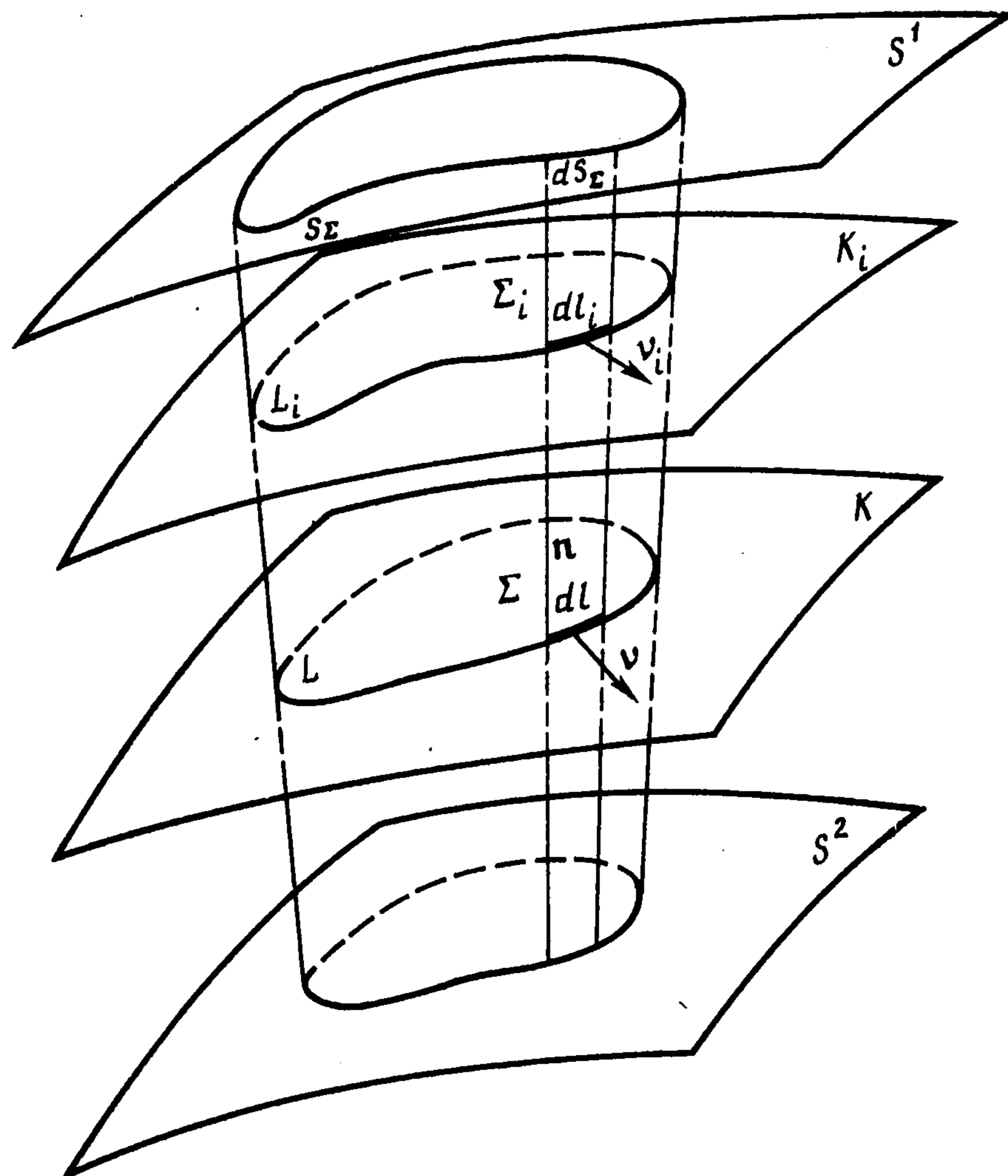
Соотношения согласования для компонент тензоров скоростей деформаций континуумов K и K_i получаются из равенств (2.6). При этом используются связи между производными по координатам на поверхностях K и K_i , которые выводятся непосредственно из соотношений (2.4) для базисных векторов.

В силу того, что между элементами $d\sigma_i$ имеются конечные промежутки (фиг. 1), скорость v общего центра масс, лежащего на элементе $d\sigma$, складывается из среднемассовой скорости движения компонент и скорости w перемещения центра масс за счет изменения массовых концентраций c_i составляющих Z_i :

$$v = \sum c_i v_i + w \quad (2.7)$$

$$w = \sum h_i \frac{dc_i}{dt} n = - \sum c_i \frac{dh_i}{dt} n = - \sum c_i w_i^\xi$$

где $d/dt = \partial/\partial t |_{\eta^\alpha}$ — индивидуальная производная по времени для континуума K . Здесь и всюду далее суммирование ведется по индексу i .



Фиг. 5

В трехмерной механике смесей в силу того, что компоненты не разнесены в пространстве, подобный эффект отсутствует. Если предположить, что перемещения общего центра масс за счет движения составляющих и за счет изменения концентрации независимы, выражения (2.7) можно получить из (2.2) при $\mathbf{r}_i = \text{const}$.

Изменение концентраций c_i подчинено уравнениям диффузии

$$\rho dc_i/dt = -k_i \text{div}_i \mu_i + m_i^{e'} - c_i m^e \quad (2.8)$$

где $\rho = dm/d\sigma$ — поверхностная плотность континуума K , $m_i^{e'}$ — приток массы к континууму K_i в единицу времени на единицу площади поверхности K (см. (2.1)); $m^e = \sum m_i^{e'}$ — приток массы к континууму K ; $\mu_i = \rho_i \mathbf{W}_i$ — вектор потока массы вдоль поверхности K_i ($\rho_i = dm_i/d\sigma_i$ — поверхностная плотность континуума K_i); div_i — оператор поверхностной дивергенции на листе K_i . Уравнение (2.8) получается из уравнений неразрывности для континуумов K и K_i и выражений для производных по времени от величины k_i [9].

3. **Динамические соотношения.** Построим поверхность S_Σ (фиг. 5) при помощи нормалей к поверхности K , восставленных из границы L некоторой области Σ на поверхности K . Поверхность S_Σ отсекает части Z_Σ и Z_{Σ_i} соответственно от трехмерного тела Z и составляющей Z_i и выделяет на поверхности K_i область Σ_i , ограниченную контуром L_i . При этом элементу dl_v (фиг. 5) с единичной тангенциальной нормалью \mathbf{v} соответствует элементарная полоска dS_Σ , отсекающая элемент $dl_{i,v}$ от контура L_i .

В силу определений п. 1 системы сил и моментов, действующих на части Z_Σ и Z_{Σ_i} , эквивалентны аналогичным системам сил и моментов, дейст-

вующих соответственно на части континуумов K и K_i , заключенные внутри областей Σ и Σ_i .

Рассмотрим силы и моменты, действующие на части Z_Σ и Z_{Σ_i} со стороны остальной части всего тела Z и распределенные по боковой поверхности S_Σ . Приведем соответствующие системы сил и моментов, приходящиеся на элементарную полоску dS_Σ , к главным силам dp_{zv} и dp_{ziv} , приложенным соответственно на элементах dl_v и dl_{iv} и к моментам dM_{zv} и dM_{ziv} . Выделим дополнительные моменты dM_{zvp} и dM_{zivp} , возникающие в результате снесения сил, распределенных по полоске dS_Σ соответственно на элементы dl и dl_i :

$$dM_{zv} = dM_{zv0} + dM_{zvp}, \quad dM_{ziv} = dM_{ziv0} + dM_{zivp} \quad (3.1)$$

Для выполнения требования эквивалентности систем сил и моментов следует положить

$$p_v dl_v = dp_{zv}, \quad M_v dl_v = dM_{zv}, \quad p_{iv} dl_{iv} = dp_{ziv}, \quad M_{iv} dl_{iv} = dM_{ziv}$$

где p_v , p_{iv} и M , M_{iv} — соответственно плотности линейных сил и моментов для континуумов K и K_i . Заметим, что в силу определения величин dp_{ziv} и dM_{ziv} величины p_{iv} и M_{iv} отражают не только напряжения в листе K_i , но и соответствующие силы и моменты со стороны остальных континуумов. В случае, когда отсутствуют перекрестные силы и моменты взаимодействия составляющих, распределенные по поверхности S_Σ , p_{iv} и M_{iv} — напряжения в континууме K_i .

В соответствии с (3.1) выделяются плотности M_{vp} и M_{ivp} дополнительных моментов:

$$M_v = M_{v0} + M_{vp}, \quad M_{iv} = M_{iv0} + M_{ivp}$$

При помощи анализа разбиения полоски dS_Σ плоскостями, перпендикулярными к n , можно показать, что

$$M_{vp} = \sum \lambda_{iv} M_{ivp} + \sum h_i n \times \lambda_{iv} p_{iv}, \quad \lambda_{iv} = dl_{iv}/dl_v \quad (3.2)$$

откуда с использованием равенств

$$dp_{zv} = \sum dp_{ziv}, \quad dM_{zv0} = \sum_i dM_{ziv0}$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} p_v &= \sum \lambda_{iv} p_{iv}, & M_{v0} &= \sum \lambda_{iv} M_{iv0} \\ M_v &= \sum \lambda_{iv} M_{iv} + \sum h_i n \times \lambda_{iv} p_{iv} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Компоненты тензоров напряжений $p^{\beta\alpha}$, $p_i^{\beta\alpha}$ и моментов $M^{\beta\alpha}$, $M_i^{\beta\alpha}$ и векторов перерезывающих напряжений $p^{3\alpha}$, $p_i^{3\alpha}$ и моментов $M^{3\alpha}$, $M_i^{3\alpha}$ соответственно для континуумов K и K_i определяются из разложений

$$\begin{aligned} p^\alpha &= p^{\beta\alpha} r_\beta + p^{3\alpha} n, & M^\alpha &= M^{\beta\alpha} r_\beta + M^{3\alpha} n \\ p_i^\alpha &= p_i^{\beta\alpha} r_{i\beta} + p_i^{3\alpha} n_i, & M_i^\alpha &= M_i^{\beta\alpha} r_{i\beta} + M_i^{3\alpha} n_i \end{aligned}$$

Здесь n_i — вектор единичной нормали к поверхности K_i , p^α , p_i^α и M^α , M_i^α — соответственно напряжения и моменты на элементах длины с нормальными r^α и r_i^α (векторами взаимного базиса), причем верны равенства

$$p_v = p^\alpha v_\alpha, \quad M_v = M^\alpha v_\alpha, \quad v = v_\alpha r^\alpha$$

При условии, что величины h_i не меняются вдоль поверхности K (при этом можно показать, что $n_i = n$), были получены [10] вытекающие из

(3.3) соотношения

$$p^{\beta\alpha} = \sum_i k_i (p_i^{\beta\alpha} - h_i b_{\gamma}^{\beta} p_i^{\gamma\alpha}), \quad p^{3\alpha} = \sum_i k_i p_i^{3\alpha}$$

$$M^{\beta\alpha} = \sum_i k_i [M_i^{\beta\alpha} - h_i b_{\gamma}^{\beta} M_i^{\gamma\alpha} + h_i \partial_{\delta}^{\beta} (p_i^{\delta\alpha} - h_i b_{\gamma}^{\delta} p_i^{\gamma\alpha})] \quad (3.4)$$

$$M^{3\alpha} = \sum_i k_i M_i^{3\alpha}$$

$$(\partial_{.1}^1 = -\sqrt{a} a^{12}, \quad \partial_{.2}^1 = \sqrt{a} a^{11}, \quad \partial_{.1}^2 = -\sqrt{a} a^{22}, \quad \partial_{.2}^2 = \sqrt{a} a^{12})$$

Были рассмотрены [9] соотношения согласования между прочими динамическими параметрами (массовыми силами и моментами и т. п.) и, в частности, получены соотношения для соответствующих дополнительных моментов, имеющие вид, аналогичный (3.2).

Из-за существования дополнительных моментов, связанных со снесением сил на поверхности K и K_i , в отличие от трехмерной механики сплошных сред, тензоры напряжений $p^{\alpha\beta}$ и $p_i^{\alpha\beta}$ оказываются несимметричными для широкого класса случаев.

4. О получении замыкающих соотношений. Уравнения движения и моментов для континуума K имеют вид

$$\rho dv/dt = \nabla_{\alpha} p^{\alpha} + \Phi + m^e (v - v_M)$$

$$\rho dk/dt = r_{\alpha} \times p^{\alpha} + \nabla_{\alpha} M^{\alpha} + N + (k_m - k) m^e \quad (4.1)$$

где ∇_{α} — поверхностный оператор ковариантного дифференцирования, Φ и N — поверхностные плотности внешних сил и моментов, k — плотность внутреннего кинетического момента, v_M и k_M — среднemasсовая скорость и плотность внутреннего кинетического момента частиц, притекающих извне. Соответствующие уравнения для континуума K_i имеют аналогичный вид.

Соотношения согласования, приведенные в пп. 2 и 3, позволяют получать реологические соотношения для континуума K , моделирующего объект Z в целом, на основе реологических соотношений для континуумов K_i , моделирующих отдельные составляющие Z_i . Так, например, было рассмотрено [10] деформирование с сохранением нормального волокна тонкого упругого слоистого тела. При этом предполагалось, что отдельные слои не сопротивляются изгибным деформациям и могут моделироваться при помощи линейно-упругих двумерных континуумов:

$$p_i^{\beta\alpha} = A_i^{\beta\alpha\gamma\delta} \varepsilon_{i\gamma\delta} + p_i^{\circ\beta\alpha}, \quad M_i^{\alpha} \equiv 0 \quad (4.2)$$

где $A_i^{\beta\alpha\gamma\delta}$ — поверхностные коэффициенты упругости, $p_i^{\circ\beta\alpha}$ — компоненты тензора начальных напряжений в листах K_i , $\varepsilon_{i\gamma\delta} \equiv \varepsilon_{i\gamma\delta}^{\xi} \equiv \varepsilon_{i\gamma\delta}^{\eta}$.

Эти равенства представляют собой замыкающие соотношения для уравнений равновесия для листов K_i .

С использованием соотношений согласования (2.5) и (3.4) из (4.2) были получены [10] реологические соотношения для континуума K :

$$p^{\beta\alpha} = \sum D_i^{\beta\alpha\gamma\sigma} (\varepsilon_{\gamma\sigma} - \chi_i b_{\gamma\sigma} - h_i \kappa_{\gamma\sigma} + \chi_i \kappa_{\gamma\sigma}) + p^{\circ\beta\alpha*}, \quad p^{3\alpha} = 0$$

$$M^{\beta\alpha} = \sum h_i \partial_{\lambda}^{\beta} D_i^{\lambda\alpha\gamma\sigma} (\varepsilon_{\gamma\sigma} - \chi_i b_{\gamma\sigma} - h_i \kappa_{\gamma\sigma} + \chi_i \kappa_{\gamma\sigma}) + M^{\circ\beta\alpha*}, \quad M^{3\alpha} = 0 \quad (4.3)$$

$$p^{\circ\beta\alpha*} = \sum k_i (p_i^{\circ\beta\alpha} - h_i b_{\gamma}^{\beta} p_i^{\gamma\alpha}), \quad M^{\circ\beta\alpha*} = \sum k_i (M_i^{\circ\beta\alpha} - h_i b_{\gamma}^{\beta} M_i^{\gamma\alpha}),$$

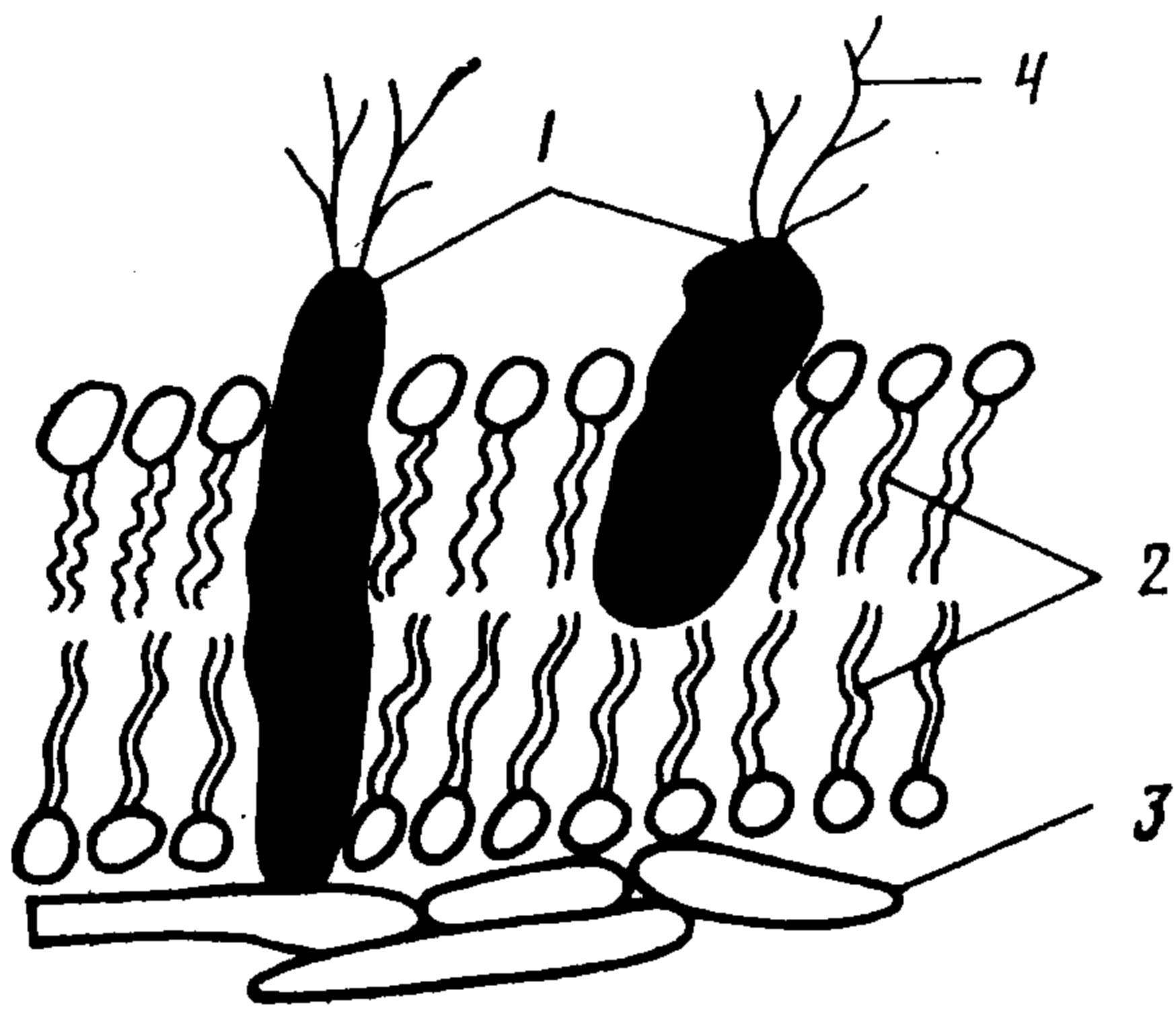
$$D_i^{\beta\alpha\gamma\sigma} = k_i (A_i^{\beta\alpha\gamma\sigma} - h_i b_{\delta}^{\beta} A_i^{\delta\alpha\gamma\sigma})$$

где три последних равенства определяют соответственно суммарные начальные напряжения и моменты в листах K_i и эффективные коэффициенты упругости. Эти соотношения включают зависимость напряжений и моментов от изгибных деформаций $\chi_{\gamma\delta}$ (в отличие от соотношений (4.2) для листа K_i) и позволяют моделировать сопротивление изгибу слоистого тела за счет растяжения и сжатия отдельных слоев при отсутствии сопротивления изгибу слоев.

Равенства (4.3) представляют собой замыкающие соотношения для уравнений (4.1), представленных в координатной форме, при $v \equiv v_m \equiv 0$, $\Phi \equiv 0$, $N \equiv 0$, $k \equiv k_m \equiv 0$. Использование соотношений согласования позволяет исключить напряжения и деформации отдельных листов K_i и при этом учесть реологические константы континуумов K_i . Соотношения для величин χ_i , характеризующих поперечные деформации объекта Z , должны быть получены из дополнительных соображений, например из условия объемной несжимаемости или анализа сил взаимодействия между слоями. Возможны постановки задач, в которых $\chi_i \equiv 0$, что означает сохранение длины нормального волокна (аналогично классической теории оболочек).

В развернутую модель войдут силы взаимодействия между континуумами K_i . Необходимые дополнительные соотношения для этих величин должны быть получены из анализа взаимодействий между составляющими Z_i .

5. О способах моделирования биологической мембраны. Среди различных видов биологических мембран наиболее распространенным объектом механических исследований является мембрана эритроцита. От ее механических свойств зависят, например, вязкость крови, способность эритроцитов проходить через капилляры, допустимое время операций с использованием аппаратов искусственного кровообращения и т. д. [11, 12].



Фиг. 6

Структурной основой большинства биологических мембран, и в частности мембраны эритроцита (фиг. 6, где 1 — белки, 2 — липиды, 3 — белковый цитоскелет, 4 — гликокаликс), является бислоя, состоящий из молекул липидов (жиров), причем отдельные монослои могут обмениваться молекулами и имеют различные механические свойства. Жидкокристаллические свойства липидного бислоя позволяют части включенных в него белковых молекул перемещаться (диффундировать) в плоскости мембраны. Толщина

мембраны может изменяться, например под действием кулоновских сил.

Моделирующая биологическую мембрану многолистная система в зависимости от конкретной ситуации может состоять из различного числа листов. Так, при изучении поверхностной диффузии белков достаточно различать два двумерных континуума, лежащих на одной поверхности и соответствующих липидной и белковой компонентам. Такие задачи решались для многокомпонентных поверхностей раздела (например, [5]).

Для получения реологических соотношений для мембраны в целом имеет, видимо, смысл рассмотрение системы из четырех листов, разделенных конечными расстояниями и соответствующих двум липидным монослоям (с включением соответствующих белковых компонент), внутреннему цитоскелету и гликокаликсу. Первые два листа представляют собой двумерные вязкие жидкости, а два других — двумерные вязкоупругие континуумы.

В рамках этого рассмотрения можно учесть электрические явления в мембране, массообмен между слоями и т. п., а также их связь с механическим поведением мембраны.

Примером служит возникновение эффективной вязкоупругости бислоя при изгибе, обусловленное массообменом, который направлен на выравнивание плотностей ρ_i монослоев. В осесимметричном случае реологическое уравнение, которое связывает изгибающий момент M и изгибную деформацию κ липидного бислоя, имеет вид

$$dM/dt + 2h^2A dx/dt + 2\gamma M + 4q\gamma h^2A \kappa = 0 \quad (5.1)$$

где h и A — соответственно толщина и поверхностный коэффициент упругости отдельного монослоя (для простоты свойства слоев приняты одинаковыми), γ и q — параметры массообмена, закон которого принимается в виде:

$$d(dm_1)/dt = \gamma (\rho_2 - \rho_1 - q\rho h/R) d\sigma$$

Здесь R — радиус поверхности K , которая, по условию, является частью цилиндрической поверхности.

Уравнение (5.1) получается из соотношений (2.5), (3.4), (4.2) и (4.3) в предположении, что слои одинаковы и не проскальзывают один относительно другого.

Характерные времена релаксации в (5.1) полностью определяются параметрами массообмена γ и q .

Автор благодарит С. А. Регирера за внимание к работе и ее обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 535 с.; Т. 2. 573 с.
2. *Scriven L. E.* Dynamics of a fluid interface // *Chem. Eng. Sci.* 1960. V. 12. № 2. P. 98—108.
3. *Slattery J. C.* General balance equation for a phase interface // *Ind. Eng. Chem. Fundam.* 1967. V. 6. № 1. P. 108—115.
4. *Lindsay K. A., Straughan B.* A thermodynamic viscous interface theory and associated stability problems // *Arch. Ration. Mech. and Anal.* 1979. V. 71. № 4. P. 307—326.
5. *Georgescu L., Moldovan R.* General conservation laws for the multi-component phase interface // *Surface Sci.* 1970. V. 22. № 1. P. 149—163.
6. *Ghez R.* Irreversible thermodynamics of a stationary interface // *Surface Sci.* 1970. V. 20. № 2. P. 326—334.
7. *Тактаров Н. Г.* Гидродинамика пленок поверхностно-активных веществ // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1982. № 4. С. 150—157.
8. *Прибылева Т. А.* Многолистная система двумерных континуумов как модель биологической мембраны // 6-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Аннот. докл. Ташкент: Фан, 1986. С. 524—525.
9. *Прибылева Т. А.* Механические соотношения для системы двумерных континуумов (к вопросу о моделировании биологических мембран) // *Механика биологических сплошных сред.* Казань: Каз. филиал АН СССР, 1986. С. 102—129.
10. *Прибылева Т. А.* О выводе реологических соотношений для тонкого упругого слоистого тела, моделируемого системой двумерных континуумов // *Биомеханика мягких тканей.* Казань: Каз. филиал АН СССР, 1987. С. 102—111.
11. *Ивэнс И., Скейлак Р.* Механика и термодинамика биологических мембран. М.: Мир, 1982. 304 с.
12. *Левтов В. А., Регирер С. А., Шадрин Н. Х.* Реология крови. М.: Медицина, 1982. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1987