Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 3, 1989

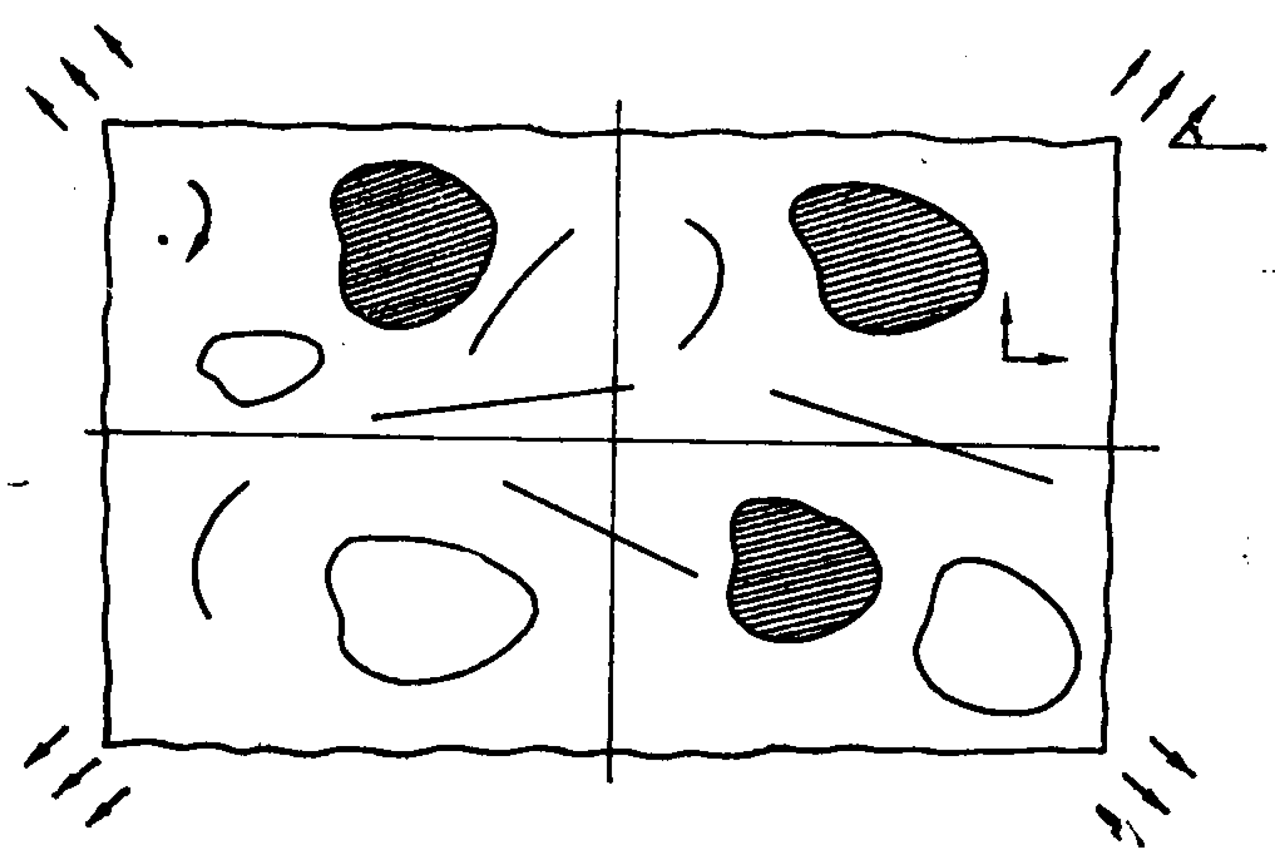
УДК 539.3

Д. Я. Бардзокас, В. З. Партон, П. С. Теокарис

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассматривается бесконечная многосвязная область, содержащая криволинейные трещины, отверстия, произвольные включения, а также прямолинейные армирующие стрингеры. Геометрия и расположение дефектов и инородных тел — произвольное, однако предполагается, что между собой они не пересекаются. Различные частные случаи взаимодействия трещин, отверстий, стрингеров и включений изучались в работах [1—18]. В общей постановке строится система уравнений, описывающая напряженное состояние такой композиционной среды. Задача решается с помощью введения комплексных потенциалов и теории сингулярных интегральных уравнений (СИУ) [19, 20]. Численная реализация СИУ осуществляется при помощи интерполяционных формул, метода Лобатто — Чебышева.

1. Постановка задачи. Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат xy, плоскую многосвязную область, которая на бесконечности растягивается (или сжимается) взаимно перпендикулярными усилиями интенсивности N_1 и N_2. Направление N_1 составляет угол α с осью x (фиг. 1). Композиционная среда находится в равновесии под действием самоуравновешенных усилий, приложенных к берегам трещин и контурам отверстий, и возникающих контактных напряжений на границах между изотропными включениями и изотропной бесконечной плоскостью (включения и стрингеры могут быть из различных упругих материалов).



Фиг. 1

Композиционная среда (фиг. 1) состоит из бесконечной изотропной плоскости S, в которой имеются M_1 криволинейных трещин, M_2 криволинейных замкнутых отверстий, M_3 прямолинейных стрингеров и M_4 криволинейных упругих включений. Кроме заданных усилий в плоскости среды могут действовать сосредоточенные силы $P_j + iQ_j$ в $z_j{}^*$ $(j = 1, \ldots, K^*)$ и моменты M_j в $z_j{}^{**}$ $(j = 1, \ldots, K^{**})$.

Возможно следующее задание граничных условий.

На берегах трещины l_j $(l_j = 1, \ldots, M_1)$ заданы нормальные и касательные напряжения (+ — верхний берег, — — нижний берег)

$$(\sigma_n{}^{\pm} - i\sigma_t{}^{\pm})\,|_{l_j} \qquad (1.1)$$

На контуре отверстий $\gamma_j{}^*$ $(j = 1, \ldots, M_2)$ задаются усилия

$$(\sigma_n - i\sigma_t)\,|_{\gamma_j^*} \qquad (1.2)$$

На границе $L_j\,(j = 1, \ldots M_3)$ между бесконечной средой и прямолинейным упругим включением (стрингер) задается следующая система граничных условий [14, 15]:

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^-, \quad \varepsilon_0 = du_t^+/dt = du_t^-/dt, \quad u_n^+ + iu_t^+ = u_n^- + iu_t^- \tag{1.3}$$

Первые два условия (1.3) приводят к выражению

$$ih\left[(\sigma_n^+ - i\sigma_t^+) - (\sigma_n^- - i\sigma_t^-)\right] + \frac{E^{(j)}S^{(j)}}{E}\frac{d}{dt}\left[(\sigma_n^+ + \sigma_s^+) - (1+\nu)\,\sigma_n^+\right] = 0 \tag{1.4}$$

где $(\sigma_n^+, \sigma_s^+, \sigma_t^+)$ — возникающие контактные напряжения на границе L_j между бесконечной пластинкой и стрингером L_j, h — толщина пластинки, $E^{(j)}$, E — модули упругости стрингера L_j и пластинки S соответственно, ν — коэффициент Пуассона, $S^{(j)}$ — площадь поперечного сечения стрингера L_j.

На границе контакта включения γ_j $(j = 1, \ldots, M_4)$ со средой S известно, что контактные напряжения равны между собой, т. е.

$$(\sigma_n^+ - i\sigma_t^+)\,|_{\gamma_j} = (\sigma_n^- - i\sigma_t^-)\,|_S \tag{1.5}$$

и задан скачок перемещений

$$g_0^{(j)}(t) = 2\mu_j\left[-\frac{d}{dt}\left(u_j^+(t) - u_j^-(t)\right) + i\frac{d}{dt}\left(v_j^+(t) - v_j^-(t)\right)\right] \tag{1.6}$$

где μ_j — модуль сдвига включения γ_j, u_j и v_j — компоненты смещений по осям x и y в общей системе координат (в отличие от u_n и u_t, v_n и v_t).

2. Построение комплексных потенциалов. Для рассматриваемого общего случая потенциалы Колосова — Мусхелишвили [19] имеют следующий вид:

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + \Gamma - \sum_{j=1}^{K^*}\frac{P_j + iQ_j}{2\pi(1+k)}\frac{1}{z - z_j^*} \tag{2.1}$$

$$\Psi_0(z) = \Psi(z) + \Gamma' + \sum_{j=1}^{K^*}\left[\frac{k(P_j - iQ_j)}{2\pi(1+k)}\frac{1}{z - z_j^*} - \frac{\bar{z}_j^*(P_j + iQ_j)}{2\pi(1+k)} \times \right.$$
$$\left.\times\frac{1}{(z - z_j^*)^2}\right] - i\sum_{j=1}^{K^{**}}\frac{M_j}{2\pi}\frac{1}{(z - z_j^{**})^2} \tag{2.2}$$

Здесь (ε_∞ — вращение на бесконечности)

$$\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) + \frac{2i\mu\varepsilon_\infty}{1+k}, \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)\,e^{-2i\alpha}$$

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\varphi_j(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \sum_{j=1}^{M_2}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j^*}\frac{\varphi_j^*(\tau)}{\tau - z}\,d\tau +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M_3}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\mu_j(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \sum_{j=1}^{M_4}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{G_j(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \tag{2.3}$$

$$k = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{для плоской деформации,} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{для плоского напряженного состояния,} \end{cases}$$

$\{\varphi_j(t), \varphi_j^*(t), \mu_j(t), G_j(t)\}$ — неизвестные плотности соответственно на границах $\{l_j, \gamma_j^*, L_j, \gamma_j\}$.

Чтобы построить выражение для потенциала $\Psi(z)$ в зависимости от плотностей $\{\varphi_j(t), \varphi_j^*(t), \mu_j(t), G_j(t)\}$, запишем граничные условия задачи с помощью комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$.

На берегах трещины l_j ($j = 1, \ldots, M_1$) нормальные и касательные усилия имеют вид

$$(\sigma_n{}^{\pm} - i\sigma_t{}^{\pm})|_{l_j} = \Phi_0{}^{\pm}(t) + \overline{\Phi_0{}^{\pm}(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^{\pm}(t) + \Psi_0{}^{\pm}(t)] \quad t \in l_j. \quad (2.4)$$

На замкнутом контуре $\gamma_j{}^*$ ($j = 1, \ldots, M_2$) имеет место аналогичное выражение:

$$q_j{}^*(t) = \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'(t) + \Psi_0(t)], \quad t \in \gamma_j{}^* \quad (2.5)$$

где $q_j{}^*(t) = (\sigma_n - i\sigma_t)|_{\gamma_j{}^*}$ — заданные усилия на контуре $\gamma_j{}^*$.

На L_j ($j = 1, \ldots, M_3$) будут выполняться следующие два условия (учитывается третье равенство (1.3) и (1.4)):

$$\Phi_0{}^+(t) - k\overline{\Phi_0{}^+(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0{}^+(t)] = \Phi_0{}^-(t) -$$
$$- k\overline{\Phi_0{}^-(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^-(t) + \Psi_0{}^-(t)], \quad t \in L_j \quad (2.6)$$

$$ih\Big[(\Phi_0{}^+(t) - \Phi_0{}^-(t)) + (\overline{\Phi_0{}^+(t)} - \overline{\Phi_0{}^-(t)}) +$$
$$+ \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}(\Phi_0'^+(t) - \Phi_0'^-(t)) + (\Psi_0{}^+(t) - \Psi_0{}^-(t))]\Big] +$$
$$+ \frac{E^{(j)}S^{(j)}}{E}\frac{d}{dt}\Big[2(\Phi_0{}^+(t) + \overline{\Phi_0{}^+(t)} - (1+\nu)\Big\{\Phi_0{}^+(t) +$$
$$+ \overline{\Phi_0{}^+(t)} + \mathrm{Re}\frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0{}^+(t)]\Big\}\Big] = 0, \quad t \in L_j \quad (2.7)$$

И наконец, условия (1.5) и (1.6) на границах контакта γ_j ($j = 1, \ldots, M_4$) между включениями и бесконечной средой запишутся следующим образом:

$$\Phi_0{}^+(t) + \overline{\Phi_0{}^+(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0{}^+(t)] = \Phi_0{}^-(t) + \overline{\Phi_0{}^-(t)} +$$
$$+ \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^-(t) + \Psi_0{}^-(t)], \quad t \in \gamma_j \quad (2.8)$$

$$\Phi_0{}^+(t) - k_j\overline{\Phi_0{}^+(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^+(t) + \Psi_0{}^+(t)] = \Gamma_0^{(j)}\Big\{\Phi_0{}^-(t) -$$
$$- k\overline{\Phi_0{}^-(t)} + \frac{dt}{d\bar{t}}[\bar{t}\Phi_0'^-(t) + \Psi_0{}^-(t)]\Big\} + g_0^{(j)}(t)$$
$$t \in \gamma_j \quad (\Gamma_0^{(j)} = \mu_j/\mu) \quad (2.9)$$

Разрешая каждое из выражений (2.4)—(2.6) и (2.8) относительно $\Psi^+(t) - \Psi^-(t)$ и применяя известные формулы Сохоцкого — Племеля, получим выражение для $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{M_1}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\overline{q_1^{(j)}(\tau)}}{\tau - z}\,d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\overline{\varphi_j(\tau)}}{\tau - z}\,d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_{l_j}\frac{\bar{\tau}\varphi_j(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau\Big] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M_2}\Big[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j{}^*}\frac{\overline{q_j{}^*(\tau)}}{\tau - z}\,d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j{}^*}\frac{\overline{\varphi_j{}^*(\tau)}}{\tau - z}\,d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j{}^*}\frac{\bar{\tau}\varphi_j{}^*(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau\Big] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M_3}\Big[\frac{k}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\overline{\mu_j(\tau)}}{\tau - z}\,d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\bar{\tau}\mu_j(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau\Big] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M_4}\Big[-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\overline{G_j(\tau)}}{\tau - z}\,d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_j}\frac{\bar{\tau}G_j(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau\Big] \quad (2.10)$$

Здесь

$$q_1^{(j)}(t) = [\sigma_n^{(j)+} - \sigma_n^{(j)-}] - i[\sigma_t^{(j)+} - \sigma_t^{(j)-}], \quad t \in l_j \quad (j = 1, \ldots, M_1)$$

$$q_j^*(t) = \sigma_n^{(j)} - i\sigma_t^{(j)}, \quad t \in \gamma_j^* \quad (j = 1, \ldots, M_2)$$

3. Вывод системы СИУ. Перейдем к построению системы уравнений, удовлетворяющей граничным условиям. Принимая во внимание выражения (2.4) и формулу Сохоцкого — Племеля для $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ при $z \to t \in l_k$, получим следующую систему СИУ:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{\overline{\varphi_k(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau} -$$

$$-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{\overline{\varphi_k(\tau)}}{\tau - t}\,\overline{d\tau} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{\bar\tau - \bar t}{(\tau - t)^2}\varphi_k(\tau)\,d\tau\right] +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{M}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_j^*}[K_{11}^{(j)}(\tau, t)\,\nu_j(\tau) + K_{12}^{(j)}(\tau, t)\,A(\tau, \bar\tau)\,\overline{\nu_j(\tau)}]\,d\tau =$$

$$= A_1^{(k)}(t, \bar t) - \frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\sum_{j=1}^{M_1}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{l_j}\frac{q_1^{(j)}(\tau)}{\tau - t}\,\overline{d\tau} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_j^*}\frac{q_j^*(\tau)}{\tau - t}\,\overline{d\tau}\right\}$$

$$t \in l_k \quad (k = 1, \ldots, M_1) \tag{3.1}$$

Здесь

$$A(\tau, \bar\tau) = \overline{d\tau}/d\tau,$$

$$K_{11}^{(j)}(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t}\left(1 - \frac{dt}{\overline{dt}}\,\frac{\bar\tau - \bar t}{\tau - t}\right), \quad j = 1, \ldots, M$$

$$K_{12}^{(j)}(\tau, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\bar\tau - \bar t}\left(1 + \dfrac{dt}{\overline{dt}}\,\dfrac{\bar\tau - \bar t}{\tau - t}\right), & j = 1, \ldots, M_{12}, M_{123} + 1, \ldots, M \\ -\dfrac{1}{\bar\tau - \bar t}\left(1 - k\dfrac{dt}{\overline{dt}}\,\dfrac{\bar\tau - \bar t}{\tau - t}\right), & j = M_{12} + 1, \ldots, M_{123} \end{cases}$$

$$M_1 + M_2 = M_{12}, \; M_{12} + M_3 = M_{123}, \; M_{123} + M_4 = M$$

$$L_j^* \to l_j, \; \nu_j(t) = \varphi_j(t), \; j = 1, \ldots, M_1$$

$$L_{j+M_1}^* \to \gamma_j^*, \; \nu_{j+M_1}(t) = \varphi_j^*(t), \; j = 1, \ldots, M_2$$

$$L_{j+M_{12}}^* \to L_j, \; \nu_{j+M_{12}}(t) = \mu_j(t), \; j = 1, \ldots, M_3$$

$$L_{j+M_{123}}^* \to \gamma_j, \; \nu_{j+M_{123}}(t) = G_j(t), \; j = 1, \ldots, M_4$$

$$A_1^{(k)}(t, \bar t) = [\sigma_n^{(k)+} + \sigma_n^{(k)-}] - i[\sigma_t^{(k)+} - \sigma_t^{(k)-}] -$$

$$-2\Gamma - 2\bar\Gamma - 2\frac{dt}{\overline{dt}}\Gamma' + \sum_{j=1}^{K^*}\left[2\,\mathrm{Re}\,\frac{P_j + iQ_j}{\pi(1 + k)}\,\frac{1}{t - z_j^*} -\right.$$

$$\left.-\frac{dt}{\overline{dt}}\left(k\frac{P_j - iQ_j}{\pi(1 + k)}\,\frac{1}{t - z_j^*} + \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1 + k)}\,\frac{\bar t - \bar z_j^*}{(t - z_j^*)^2}\right)\right] +$$

$$+ i\sum_{j=1}^{K^{**}}\frac{M_j}{\pi}\,\frac{dt}{\overline{dt}}\,\frac{1}{(t - z_j^{**})^2}$$

Принимая во внимание граничное условие (2.5) и опять же формулы Сохоцкого — Племеля для $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ при $z \to t \in \gamma_k^*$, получаем

$$\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma_k^*}\frac{\varphi_k^*(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma_k^*}\frac{\overline{\varphi_k^*(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau} -$$

$$-\frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma_k^*}\frac{\overline{\varphi_k^*(\tau)}}{\tau - t}\,\overline{d\tau} + \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma_k^*}\frac{\bar\tau - \bar t}{(\tau - t)^2}\varphi_k^*(\tau)\,d\tau\right] +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+M_1}}^{M}\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}[K_{21}^{(j)}(\tau,t)\,\nu_j(\tau)+K_{22}^{(j)}(\tau,t)\,A(\tau,\bar\tau)\,\overline{\nu_j(\tau)}]\,d\tau=$$

$$=A_2^{(k)}(t,\bar t)-\frac{dt}{d\bar t}\left[\sum_{j=1}^{M_2}\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma_j^*}\frac{q_j^*(\tau)}{\tau-t}\,d\bar\tau+\sum_{j=1}^{M_1}\frac{1}{\pi i}\int_{l_j}\frac{q_1^{(j)}(\tau)}{\tau-t}\,\overline{d\tau}\right]$$

$$t\in\gamma_k^*,\quad (k=1,\ldots,M_2) \tag{3.2}$$

Здесь

$$K_{21}^{(j)}(\tau,t)=\frac{1}{\tau-t}\left(1-\frac{dt}{d\bar t}\,\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}\right),\quad j=1,\ldots,M$$

$$K_{22}^{(j)}(\tau,t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\bar\tau-\bar t}\left(1+\dfrac{dt}{d\bar t}\,\dfrac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}\right), & j=1,\ldots,M_{12},M_{123}+1,\ldots,M\\[2ex] -\dfrac{1}{\bar\tau-\bar t}\left(1-k\dfrac{dt}{d\bar t}\,\dfrac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}\right), & j=M_{12}+1,\ldots,M_{123}\end{cases}$$

$$A_2^{(k)}(t,\bar t)=q_k^*(t)-\Gamma-\bar\Gamma-\frac{dt}{d\bar t}\Gamma'+\sum_{j=1}^{K^*}\left[\operatorname{Re}\frac{P_j+iQ_j}{\pi(1+k)}\,\frac{1}{t-z_j^*}-\right.$$

$$\left.-\frac{dt}{d\bar t}\left(k\frac{P_j-iQ_j}{2\pi(1+k)}\,\frac{1}{t-z_j^*}+\frac{P_j+iQ_j}{2\pi(1+k)}\,\frac{\bar t-\bar z_j^*}{(t-z_j^*)^2}\right)\right]+$$

$$+i\sum_{j=1}^{K^{**}}\frac{M_j}{2\pi}\,\frac{dt}{d\bar t}\,\frac{1}{(t-z_j^{**})^2}$$

Если в условии (2.7) заменить граничные значения $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ при $z\to t\in L_k$, то с использованием формулы Сохоцкого — Племеля приходим к следующей системе СИУ:

$$i(k+1)\,h\overline{\mu_k(t)}+\frac{E^{(k)}S^{(k)}}{E}\,\frac{d}{dt}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{3-\nu-k(1+\nu)}{2}\,\mu_k(t)+\right.\right.$$

$$+(1-\nu)\frac{1}{\pi i}\int_{L_k}\frac{\mu_k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-(1+\nu)\frac{dt}{d\bar t}\left\{\frac{k}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{\mu_k(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}\,\mu_k(\tau)\,d\tau\right\}\right]\right\}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k+M_{12}}}^{M}\frac{1}{\pi i}\int_{L_j^*}[K_{31}^{(j)}(\tau,t)\,\nu_j(\tau)+$$

$$+K_{32}^{(j)}(\tau,t)\,A(\tau,\bar\tau)\,\overline{\nu_j(\tau)}]\,d\tau=A_3^{(k)}(t,\bar t)+$$

$$+\frac{E^{(k)}S^{(k)}}{E}\,\frac{1+\nu}{2}\,\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\left\{\frac{dt}{d\bar t}\sum_{j=1}^{M_1}\frac{1}{\pi i}\int_{l_j}\frac{q_1^{(j)}(\tau)}{\tau-t}\,\overline{d\tau}+\right.$$

$$\left.\pm\sum_{j=1}^{M_2}\frac{1}{\pi i}\oint_{\gamma_j^*}\frac{q_j^*(\tau)}{\tau-t}\,\overline{d\tau}\right)\Bigg\},\quad t\in L_k\quad (k=1,\ldots,M_3) \tag{3.3}$$

Здесь

$$K_{31}^{(j)}(\tau,t)=\frac{1}{\tau-t}\left(1-\nu+\frac{1+\nu}{2}\,\frac{dt}{d\bar t}\,\frac{\bar\tau-\bar t}{\tau-t}\right),\quad j=1,\ldots,M$$

$$K_{32}^{(j)}(\tau,t)=\begin{cases}\dfrac{1+\nu}{2}\,\dfrac{dt}{d\bar t}\,\dfrac{1}{\tau-t}, & j=1,\ldots,M_{12},M_{123}+1,\ldots,M\\[2ex] -\dfrac{1+\nu}{2}\,k\,\dfrac{dt}{d\bar t}\,\dfrac{1}{\tau-t}, & j=M_{12}+1,\ldots,M_{123}\end{cases}$$

$$A_3^{(k)}(t,\bar t)=\frac{E^{(k)}S^{(k)}}{E}\,\frac{1+\nu}{2}\,\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{K^*}\left\{\frac{2(1-\nu)}{1+\nu}\,\frac{P_j+iQ_j}{\pi(1+k)}\,\frac{1}{t-z_j^*}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{dt}{d\bar t}\left(k\frac{P_j-iQ_j}{\pi(1+k)}\,\frac{1}{t-z_j^*}+\frac{P_j+iQ_j}{\pi(1+k)}\,\frac{\bar t-\bar z_j^*}{(t-z_j^*)^2}\right)\right\}-i\sum_{j=1}^{K^{**}}\frac{M_j}{\pi}\,\frac{1}{(t-z_j^{**})^2}\right\}$$

И наконец, подставляя в выражение (2.9) граничные значения $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ при $z \to t \in \gamma_k$ с использованием формул Сохоцкого — Племеля, получим еще одну систему СИУ:

$$-(k_k + 1 + \Gamma_0^{(k)} + \Gamma_0^{(k)} k)\overline{G_k(t)} + \frac{1-\Gamma_0^{(k)}}{\pi i} \oint_{\gamma_k} \frac{\overline{G_k(\tau)}}{\tau - t} \overline{d\tau} +$$

$$+ \frac{k_k - \Gamma_0^{(k)} k}{\pi i} \oint_{\gamma_k} \frac{\overline{G_k(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}} \overline{d\tau} - (1 - \Gamma_0^{(k)}) \frac{dt}{\overline{dt}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma_k} \frac{\overline{G_k(\tau)}}{\tau - t} \overline{d\tau} + \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma_k} \frac{\overline{\tau} - \overline{t}}{(\tau - t)^2} G_k(\tau)\, d\tau \right\} +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k + M_{123}}}^{M} \frac{1}{\pi i} \int_{L_j^*} [K_{41}^{(j)}(\tau, t)\, \nu_j(\tau) + K_{42}^{(j)}(\tau, t)\, A(\tau, \overline{\tau})\, \overline{\nu_j(\tau)}]\, d\tau =$$

$$= A_4^{(k)}(t, \overline{t}) - \frac{1-\Gamma_0^{(k)}}{\pi i} \frac{dt}{\overline{dt}} \left\{ \sum_{j=1}^{M_1} \int_{l_j} \frac{\overline{q_1^{(j)}(\tau)}}{\tau - t} \overline{d\tau} + \sum_{j=1}^{M_2} \oint_{\gamma_j^*} \frac{\overline{q_1^*(\tau)}}{\tau - t} \overline{d\tau} \right\},$$

$$t \in \gamma_k \quad (k = 1, \ldots, M_4) \qquad (3.4)$$

Здесь

$$K_{41}^{(j)}(\tau, t) = \frac{1-\Gamma_0^{(k)}}{\tau - t} \left(1 - \frac{dt}{\overline{dt}} \frac{\overline{\tau} - \overline{t}}{\tau - t}\right), \quad j = 1, \ldots, M$$

$$K_{42}^{(j)}(\tau, t) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{\tau} - \overline{t}} \left[k_k - \Gamma_0^{(k)} - (1 - \Gamma_0^{(k)}) \dfrac{dt}{\overline{dt}} \dfrac{\overline{\tau} - \overline{t}}{\tau - t}\right], & j = 1, \ldots, M_{12},\ M_{123} + 1, \ldots, M \\ \dfrac{1}{\overline{\tau} - \overline{t}} \left[k_k - \Gamma_0^{(k)} + k(1 - \Gamma_0^{(k)}) \dfrac{dt}{\overline{dt}} \dfrac{\overline{\tau} - \overline{t}}{\tau - t}\right], & j = M_{12} + 1, \ldots, M_{123} \end{cases}$$

$$A_4^{(k)}(t, \overline{t}) = 2 g_0^{(k)}(t) + 2(\Gamma_0^{(k)} - 1)\Gamma - 2(\Gamma_0^{(k)} k - k_k)\overline{\Gamma} +$$

$$+ 2 \frac{dt}{\overline{dt}} (\Gamma_0^{(k)} - 1)\Gamma' - \Gamma_0^{(k)} \sum_{j=1}^{K^*} \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+k)} \frac{1}{t - z_j^*} +$$

$$+ \Gamma_0^{(k)} k \sum_{j=1}^{K^*} \frac{P_j - iQ_j}{\pi(1+k)} \frac{1}{\overline{t} - \overline{z}_j^*} + \frac{dt}{\overline{dt}} \left[\Gamma_0^{(k)} \left[\sum_{j=1}^{K^*} \frac{k(P_j - iQ_j)}{\pi(1+k)} \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{1}{t - z_j^*} + \frac{P_j + iQ_j}{\pi(1+k)} \frac{\overline{t} - \overline{z}_j^*}{(t - z_j^*)^2} - i \sum_{j=1}^{K^{**}} \frac{M_j}{\pi} \frac{1}{(t - z_j^{**})^2}\right]\right]$$

Для решения построенных систем СИУ (3.1)—(3.4), к которым сводится обобщенная задача для многосвязной области, приведем выражения для плотностей на соответствующих контурах с учетом граничных условий, выраженных через комплексные потенциалы:

$$\varphi_j(t) = \frac{\overline{q_1^{(j)}(t)}}{k+1} + g_j(t), \quad t \in l_j \quad (j = 1, \ldots, M_1) \qquad (3.5)$$

Здесь

$$g_j(t) = \frac{2\mu}{k+1} \frac{d}{dt} \{(u_j^+(t) - u_j^-(t)) + i(v_j^+(t) - v_j^-(t))\}|_{l_j}$$

$$\varphi_j^*(t) = \frac{1}{k+1} \overline{q_j^*(t)} + \frac{2\mu}{k+1} \frac{d}{dt}(u_j^-(t) + i v_j^-(t)), \quad t \in \gamma_j^* \quad (j = 1, \ldots, M_2) \qquad (3.6)$$

$$\mu_j(t) = \frac{i(\sigma_t^+ - \sigma_t^-)}{k+1}, \quad t \in L_j \quad (j = 1, \ldots, M_3) \qquad (3.7)$$

$$G_j(t) = p_j(t)\left[\frac{1}{k_j+1} - \frac{1}{k+1}\right] - \frac{\overline{g_0^{(j)}(t)}}{k_j+1} +$$

$$+ \left(\frac{2\mu_j}{k_j+1} - \frac{2\mu}{k+1}\right)\frac{d}{dt}\left(u_j^-(t) + iv_j^-(t)\right), \quad t \in \gamma_j \quad (j = 1, \ldots, M_4) \qquad (3.8)$$

где $p_j(t) = \sigma_n - i\sigma_t$ — неизвестное контактное напряжение на соответствующей границе включения.

Для единственности решения поставленной задачи необходимо систему СИУ дополнить условием однозначности перемещений вокруг контуров $\{l_j, \gamma_j^*, L_j, \gamma_j\}$ соответственно.

Для каждой трещины будем иметь

$$\int_{l_j} \varphi_j(t)\,dt = \frac{1}{k+1}\int_{l_j} \overline{q_1^{(j)}(t)}\,dt, \quad j = 1, \ldots, M_1 \qquad (3.9)$$

Для контура отверстия будем иметь

$$\oint_{\gamma_j^*} \Phi_0^-(t)\,dt = \frac{1}{k+1}\oint_{\gamma_j^*} \overline{q_j^*(t)}\,dt, \quad j = 1, \ldots, M_2 \qquad (3.10)$$

Для прямолинейного контура, где расположен стрингер L_j, условие однозначности перемещений следующее:

$$\int_{L_j} \mu_j(t)\,dt = \frac{P_2^{(j)} - P_1^{(j)}}{(k+1)h}, \quad j = 1, \ldots, M_3 \qquad (3.11)$$

где $P_k^{(j)}$ $(k = 1, 2)$ — растягивающие или сжимающие усилия, направленные вдоль стрингера и приложенные на его концах.

Условие однозначности перемещений вдоль контура контакта γ_j будет иметь вид

$$\oint_{\gamma_j}\left[(1 - \Gamma_0^{(j)})\,p_j(t) - (k_j+1)\,\overline{\Phi_0^+(t)} + \Gamma_0^{(j)}(k+1)\,\overline{\Phi_0^-(t)}\right]dt =$$

$$= \oint_{\gamma_j} g_0^{(j)}(t)\,\overline{dt}, \quad j = 1, \ldots, M_4 \qquad (3.12)$$

4. Примеры расчетов. 1. Пусть жесткая круглая шайба S_1 единичного радиуса впаяна в круговое отверстие бесконечной пластинки S_2. Разность радиусов шайбы и отверстия $\delta = 0{,}001$ м. Пластина ослаблена прямолинейной ненагруженной трещиной, длина которой равна диаметру шайбы. Модули упругости и коэффициенты Пуассона шайбы и пластины: $E_1 = 20{,}59 \times 10^{10}$ Н/м², $\nu_1 = 0{,}28$ и $E_2 = 3{,}34 \times 10^9$ Н/м², $\nu_2 = 0{,}33$.

Для задачи о включении с трещиной с учетом общего подхода получим систему уравнений

$$\frac{1}{\pi i}\int_l \frac{g(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau} - \frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - t}\,\overline{d\tau} + \frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\bar\tau - \bar t}{(\tau - t)^2}\,g(\tau)\,d\tau\right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{G(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau} -$$

$$- \frac{dt}{\overline{dt}}\left[\frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{G(\tau)}}{\tau - t}\,\overline{d\tau} + \frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{\bar\tau - \bar t}{(\tau - t)^2}\,G(\tau)\,d\tau\right] = 0, \qquad t \in l$$

$$-(k_1 + 1 + \Gamma_0 + \Gamma_0 k_2)\,\overline{G(t)} + \frac{1 - \Gamma_0}{\pi i}\left(\oint_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_l \frac{g(\tau)}{\tau - t}\,d\tau +\right.$$

$$\left. + \frac{k_1 - \Gamma_0 k_2}{\pi i}\left[\oint_\gamma \frac{\overline{G(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau} + \int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau}\right] - (1 - \Gamma_0)\frac{dt}{\overline{dt}}\left\{\frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{G(\tau)}}{\tau - t}\,\overline{d\tau} + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{\bar\tau - \bar t}{(\tau - t)^2}\,G(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - t}\,\overline{d\tau} + \frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\bar\tau - \bar t}{(\tau - t)^2}\,g(\tau)\,d\tau\Big\} = 2g_0(t), \quad t \in \gamma$$

$$\int_l g(t)\,dt = 0$$

$$\oint_\gamma \Big\{(1-\Gamma_0)\,p(t) - \frac{\Gamma_0 k_2 + \Gamma_0 + k_1 + 1}{2}\,\overline{G(t)} -$$

$$- \frac{\Gamma_0 k_2 + \Gamma_0 - k_1 - 1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\overline{G(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau} - \frac{\Gamma_0(k_2+1)}{2\pi i}\int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar\tau - \bar t}\,\overline{d\tau}\Big\}\,\overline{dt} = 0 \qquad (4.1)$$

Здесь

$$\Gamma_0 = \mu_1/\mu_2,\ g_0(t) = 2\mu_1\delta$$

$$G(t) = p(t)\left[\frac{1}{1+k_1} - \frac{1}{1+k_2}\right] - \frac{2\mu_2}{1+k_2}\,\delta$$

$$g(t) = g_1(t) + i g_2(t) = \frac{2\mu_2}{1+k_2}\frac{d}{dt}\{(u^+(t) - u^-(t)) + i(v^+(t) - v^-(t))\}$$

$$(g(t) = i\{(b-t)(t-a)\}^{-1/2} g^*(t),\quad t\in[a,b])$$

Применяя формулы численного интегрирования для функции по контуру круга [21]

$$G(t) \approx u_n(G,t) = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} G(\tau_j)\left(\frac{t}{\tau_j}\right)^{-n}[1-(t/\tau_j)^{2n+1}][1-(t/\tau_j)]^{-1} \qquad (4.2)$$

$$G(\tau_j) = u_n(G,\tau_j),\ \tau_j = \exp[2\pi(2n+1)^{-1} j]$$

$$\frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \approx \frac{1}{\pi i}\oint_\gamma \frac{u_n(G,\tau)}{\tau - t}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} G(\tau_j)\left(1 + \frac{2i\sin[n(\vartheta-\vartheta_j)/2]\sin[(n+1)(\vartheta-\vartheta_j)/2]}{\sin[(\vartheta-\vartheta_j)/2]}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma G(\tau)\,d\vartheta = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} G(\tau_j)$$

и формулы численного интегрирования по методу Лобатто — Чебышева для $g^*(t)$ [22, 23], можно определить значения плотностей $g^*(t)$ и $G(t)$ в точках интерполяций на контурах интегрирования. Метод Лобатто — Чебышева дает возможность сразу определить функцию $g^*(t)$ на концах трещины $[a, b]$, а значит, и коэффициенты интенсивности напряжений в угловых точках [14]:

$$K_{\mathrm{I}} = \left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{1/2}\left[\cos\frac{\psi+\vartheta}{2}\,g_1^*(b) + \sin\frac{\psi+\vartheta}{2}\,g_2^*(b)\right]$$

$$K_{\mathrm{II}} = \left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{1/2}\left[\sin\frac{\psi+\vartheta}{2}\,g_1^*(b) - \cos\frac{\psi+\vartheta}{2}\,g_2^*(b)\right] \qquad (4.3)$$

$$\psi = \arg(b-a),\ \rho = |b-a|$$

где ϑ — угол между трещиной и осью x.

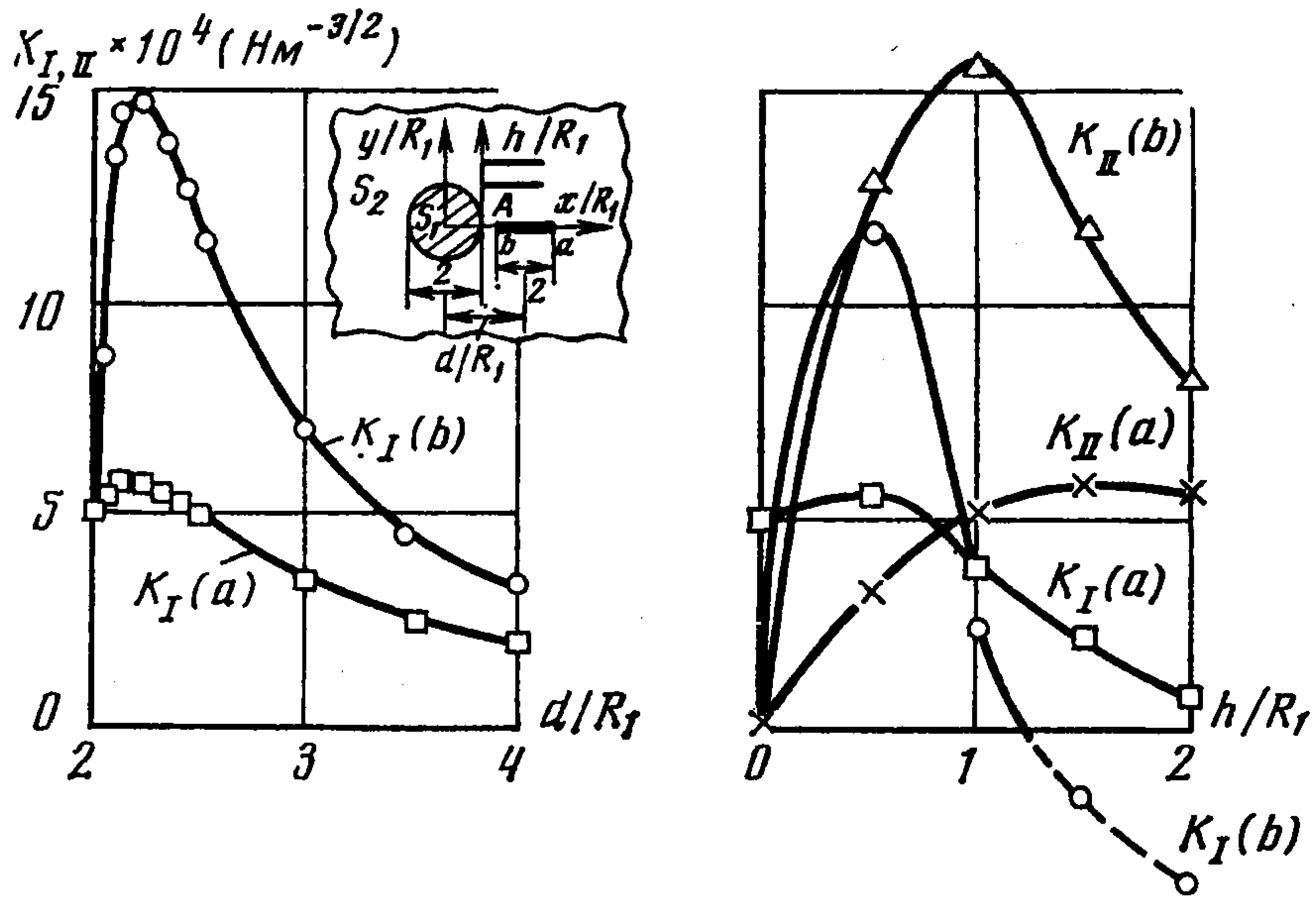
Эта же задача рассматривалась [16] как частный случай контактной задачи двух тел без трения, одно из которых содержит трещину.

На фиг. 2 показано изменение коэффициентов интенсивности напряжений K_{I} и K_{II} в зависимости от расположения трещины относительно жесткого включения, на фиг. 3 — изменение контактного напряжения $p(t)$ в точке A при приближении трещины к границе контакта.

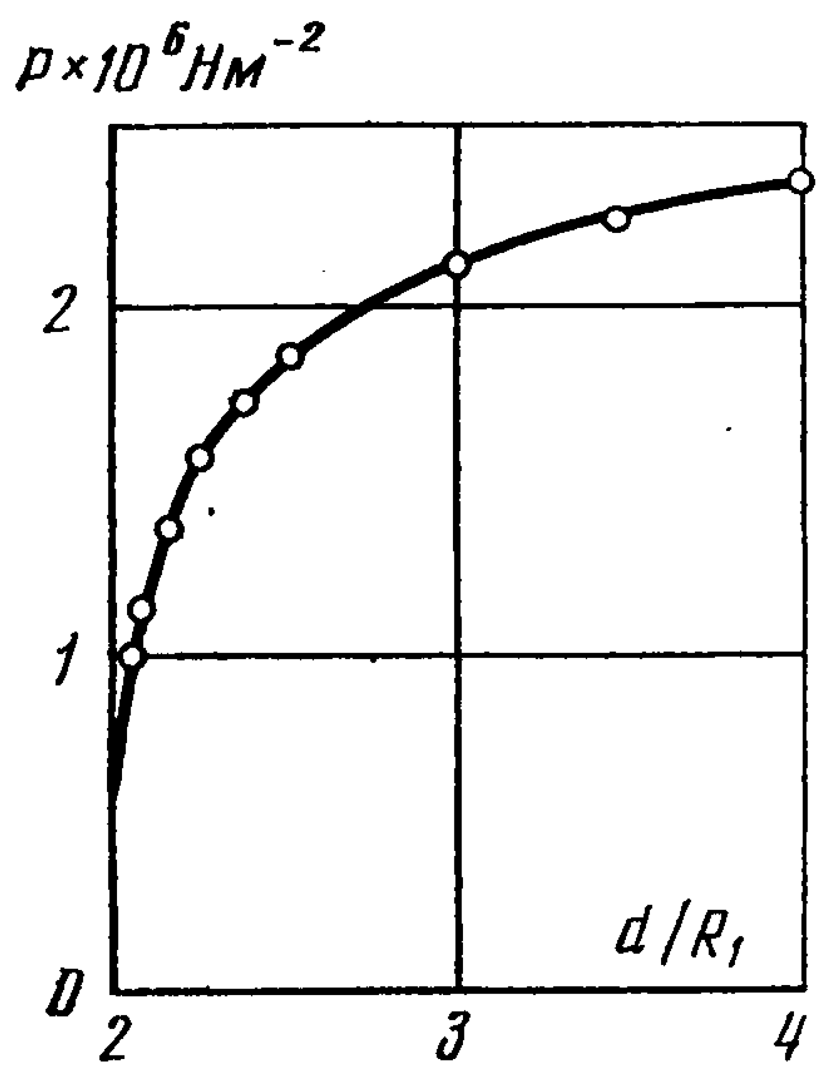
2. Пусть бесконечная пластина с одной стороны ослаблена прямолинейной ненагруженной трещиной, а с другой — усилена стрингером, на концах которого приложены растягивающие силы P. Задача сводится к следующей системе уравнений:

$$\frac{1}{\pi i}\int_l \frac{g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\,\overline{d\tau} - \frac{\overline{dt}}{dt}\left[\frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau} + \frac{1}{\pi i}\int_l \frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}\,g(\tau)\,d\tau\right] +$$

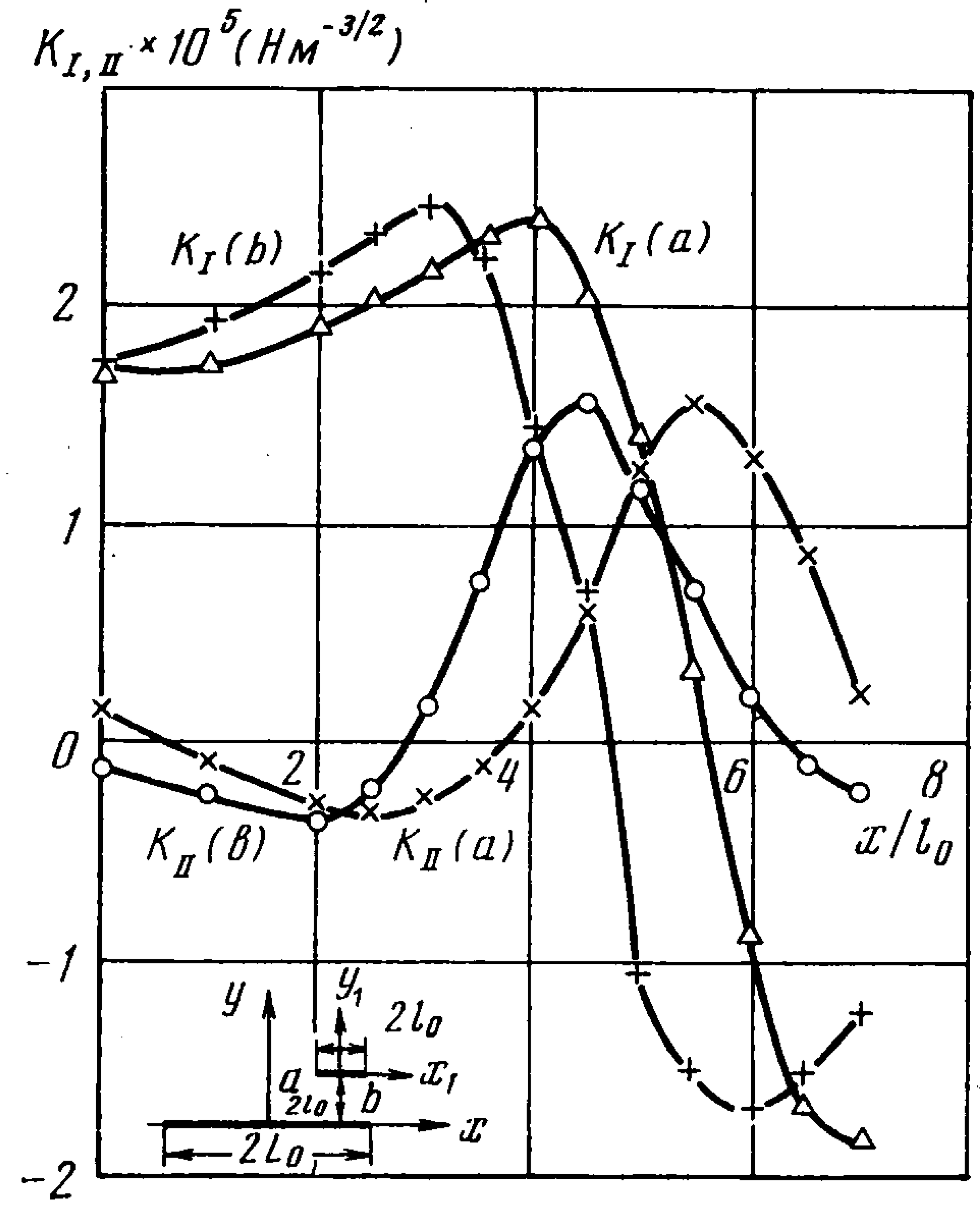
$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\mu(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\,\overline{d\tau} - \frac{\overline{dt}}{dt}\left[-\frac{k}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\mu(\tau)}}{\tau-t}\,\overline{d\tau} + \right.$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}\,\mu(\tau)\,d\tau\Bigg] = A_1(t,\bar t),\qquad t\in l,\qquad l=[a,b],$$

$$i(k+1)h\overline{\mu(t)}+\frac{E_0S_0}{E}\,\frac{d}{dt}\Bigg\{\mathrm{Re}\Bigg[\frac{3-\nu-k(1+\nu)}{2}\,\mu(t)+$$

$$+(1-\nu)\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi i}\int\limits_l\frac{g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right)-$$

$$-(1+\nu)\,\frac{dt}{d\bar t}\left[\frac{k}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\mu(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\,d\bar\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}\,\mu(\tau)\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\overline{g(\tau)}}{\bar\tau-\bar t}\,d\bar\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l\frac{\bar\tau-\bar t}{(\tau-t)^2}\,g(\tau)\,d\tau\right]\Bigg]\Bigg\}=A_3(t,\bar t),\qquad t\in L,\qquad L=[-L_0,L_0]$$

$$\int\limits_l g(t)\,dt=0,\qquad \int\limits_L \mu(t)\,dt=0 \tag{4.4}$$

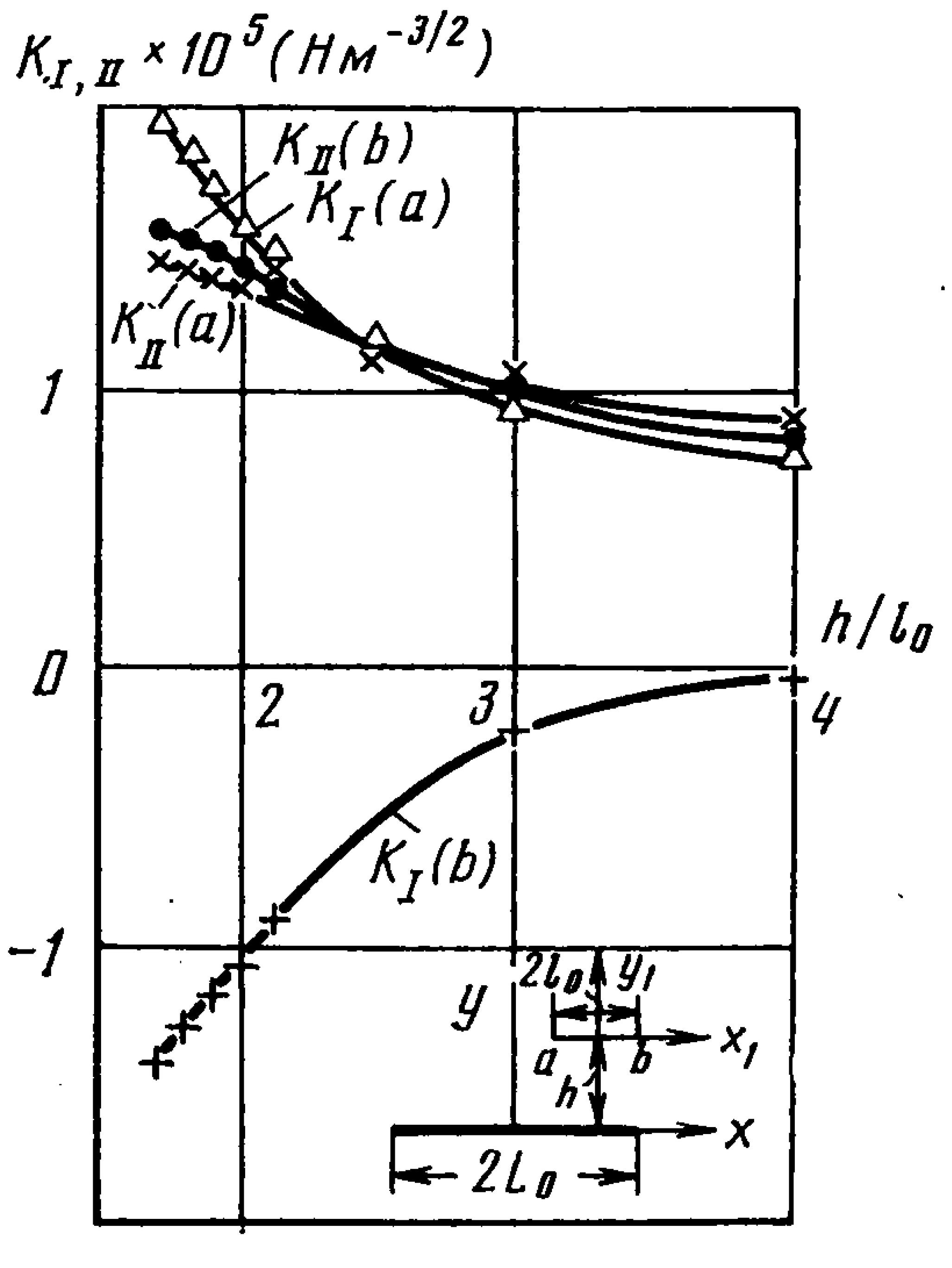
Здесь $A_1(t,\bar t)$ и $A_3(t,\bar t)$ — выражения, которые входят в правые части уравнений (3.1) и (3.3), где силы P_j+iQ_j и моменты M_j приложены в точках

$$z^*_{1,4}=z^{**}_{1,4}=L_0\pm ic,\qquad z^*_{2,3}=z^{**}_{2,3}=-L_0\pm ic$$

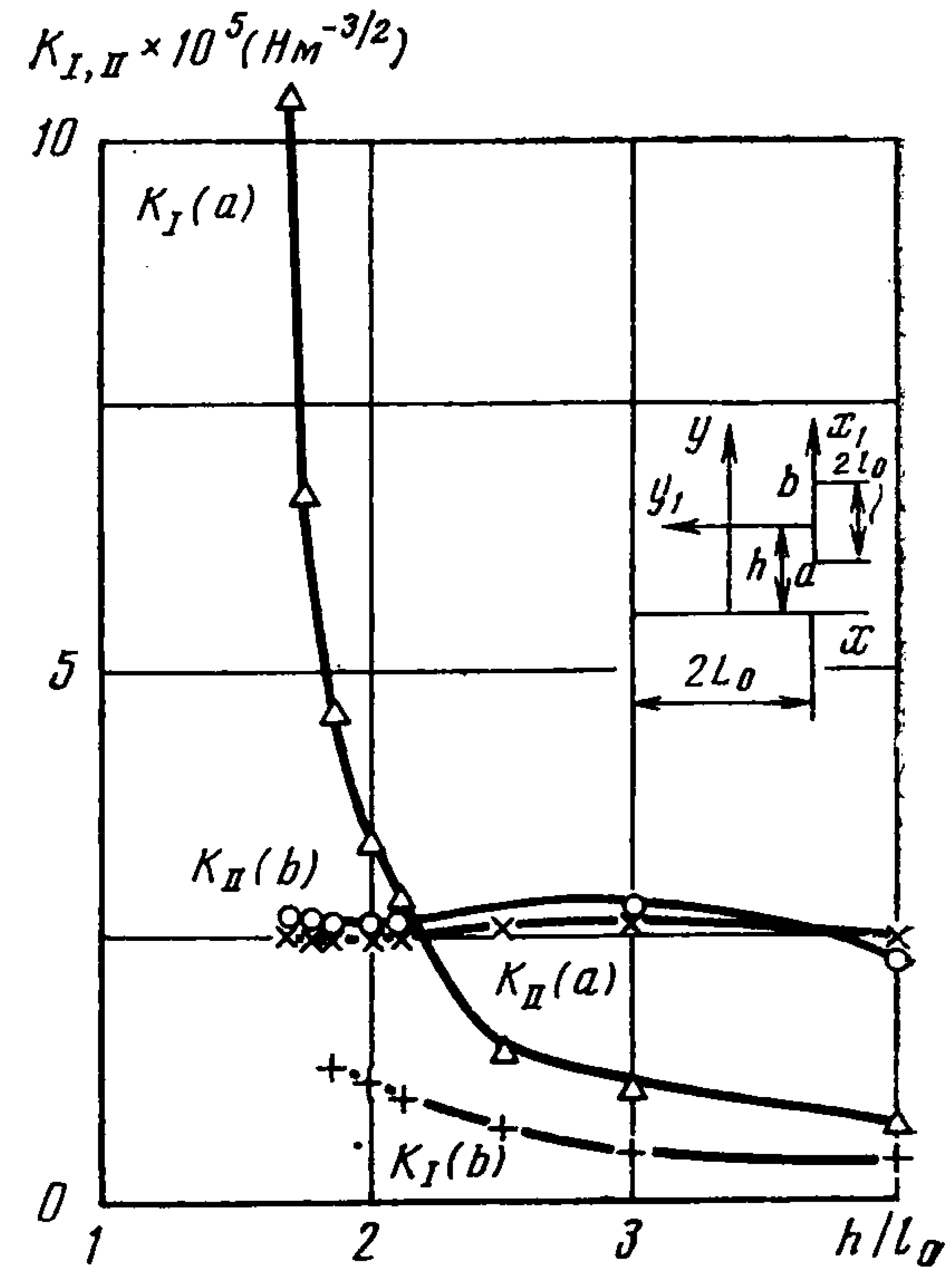
и

$$2P_j=\begin{cases}P, & j=1,4\\ -P, & j=2,3\end{cases}\qquad Q_j=0,\quad j=1,\ldots,4;\qquad 2M_j=\begin{cases}Pc, & j=1,3\\ -Pc, & j=2,4\end{cases}$$

а c — сравнительно малая величина.



Фиг. 5



Фиг. 6

Так как особенность у края стрингера такая же, как и у трещины, т. е.

$$\mu(t) = i\{(-L_0 - t)(t - L_0)\}^{-1/2} \mu^*(t), \; t \in [-L_0, L_0]$$

для разрешения системы (4.4) применяем метод Лобатто — Чебышева [15]. После решения алгебраической системы уравнений относительно плотностей $g^*(t)$ и $\mu^*(t)$ в точках интерполяции на соответственных контурах интегрирования можно при помощи формул (4.3) найти коэффициенты интенсивности напряжений K_{I} и K_{II} у края трещины.

Для случая алюминиевой пластинки на фиг. 4—6 показано изменение коэффициентов интенсивности напряжений K_{I} и K_{II} у края трещины ($2\,l_0 = 0{,}02$ м) в зависимости от ее расположения относительно стального стрингера ($2\,L_0 = 0{,}1$ м), на концах которого приложена сила P в 16 раз бо́льшая, чем величина усилия на бесконечности ($N_1 = 9{,}81 \times 10^4$ Н/м^2, $N_2 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
2. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
3. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
4. *Партон В. З.* Об одной оценке взаимного упрочения трещин при их шахматном расположении // ПМТФ. 1965. № 5. С. 94—97.
5. *Партон В. З.* Задачи взаимодействия и инерционный эффект в механике разрушения // Проблемы прочности. 1970. № 1. С. 56—63.
6. *Морозов Е. М., Партон В. З.* Некоторые задачи механики разрушения для плоскости с разрезами // Прочность и деформация материалов в физических полях. М.: Атомиздат, 1968. Вып. 2. С. 147—152.
7. *Морозова Е. А., Партон В. З.* О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещин // ПМТФ, 1961. № 5. С. 112—114.
8. *Линьков А. М.* Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными уравновешенными системами сил // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1294—1297.
9. *Линьков А. М.* Плоские задачи о статическом нагружении кусочнооднородной линейно-упругой среды // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 644—651.
10. *Greif R., Sanders J. L. Jr.* The effect of a stringer on the stress in a cracked sheet // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 1. P. 59—66: Пер. с англ. (Прикл. механика: Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. 1965. Т. 32. № 1. С. 66—74.
11. *Sanders J. L. Jr.* Effect of a stringer on the stress concentration due to a crack in a thin sheet // NASA Techn. Rep. 1959. № R-13. P. 1—10.
12. *Koiter W. T.* On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. V. 8. № 2. P. 164—178.
13. *Theocaris P. S., Dafermos D.* The elastic strip under mixed boundary conditions // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. № 4. P. 714—716.

14. *Theocaris P. S., Bardzokas D.* The influence of a finite stringer on the strees intensities around cracks in plates // Eng. Fract. Mech. 1981. V. 14. № 3. P. 493—506.
15. *Theocaris P. S., Bardzokas D.* Reinforcement of a crack by a loaded strip-inclusion // Ing.— Archiv. 1985. V. 55. № 1. P. 45—56.
16. *Theocaris P. S., Bardzokas D.* The frictionless contact of cracked elastic bodies // ZAMM. 1983. V. 63. № 2. P. 89—102.
17. *Theocaris P. S., Bardzokas D.* The plane frictionless contact of two elastic bodies — The inclusion problem // Ing.— Archiv. 1987. V. 57. № 4. P. 315—327.
18. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* The inclusion problem in plane elasticity // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1977. V. 30. № 4. P. 437—448.
19. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
20. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
21. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968. 287 с.
22. *Theocaris P. S.* Numerical solution of singular integral equations. I. Methods. II. Applications // Proc. Amer. Cos. Civil Eng., J. Eng. Mech. Div. 1981. V. 107. № 5. P. 733—771.
23. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* Numerical integration methods for the solution of singular integral equations // Quart. Appl. Math. 1977. V. 35. № 1. P. 173—183.

Афины,
Москва

Поступила в редакцию
20.IV.1988