

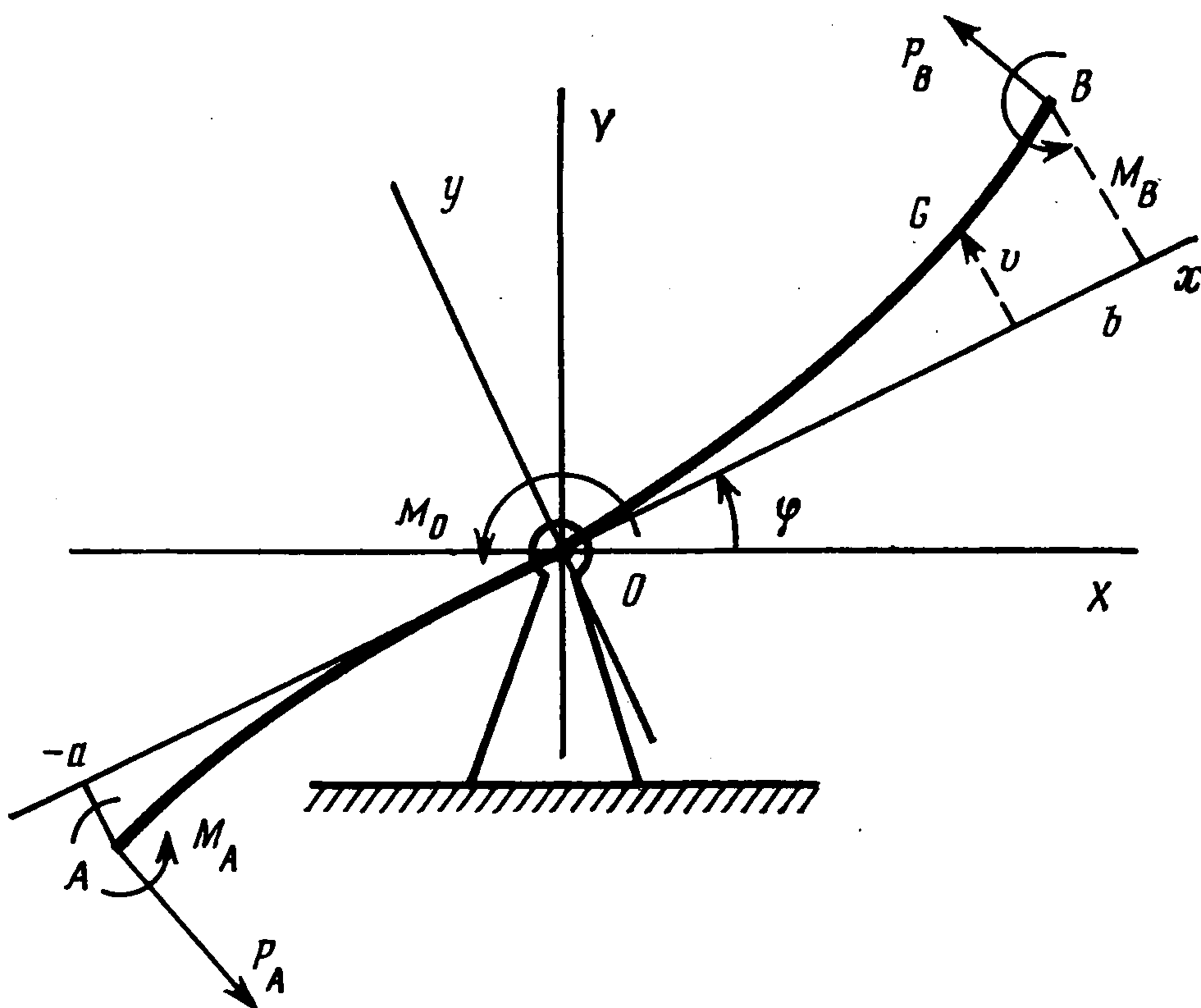
УДК 539.3 : 62—50

Л. Д. Акуленко, С. А. Михайлов

АНАЛИЗ УПРАВЛЯЕМЫХ ВРАЩЕНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ВОКРУГ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ

В рамках линейной теории малых деформаций [1] для однородного прямолинейного стержня исследуются управляемые плоские вращения вокруг произвольной оси под действием сосредоточенных (перерезывающих) сил и моментов сил [2, 3]. Для определенности рассматривается случай, когда моменты приложены относительно концов стержня и оси вращения, а ортогональные стержню силы также сосредоточены на концах. Аналитическими методами математической физики [4] и подхода работы [5] строится полное решение задачи Коши (по времени) для системы, описываемой краевой задачей, дается обоснование [6, 7] и устанавливается управляемость [8]. Рассматриваются представляющие прикладной интерес задачи в случаях реализаций «кинематического» и «динамического» управлений вращениями стержня, а также оценки погрешностей, обусловленных его упругостью. Результаты могут быть использованы при исследовании проблемы прецизионного управления механическими объектами, обладающими существенной упругой податливостью конструкций.

1. Механическая модель и постановка задачи. Рассматриваются плоские вращения нерастяжимого упругого стержня вокруг неподвижной в инерциальном пространстве $OXYZ$ оси OZ , проходящей через произвольную фиксированную точку O стержня AB (фиг. 1). Предполагается, что стержень прямолинеен в недеформированном состоянии, а его характеристики: длина l , линейная плотность ρ и изгибная жесткость



Фиг. 1

EI , где E — модуль Юнга материала, I — момент инерции поперечного сечения, постоянны. Стержень AB подвержен действию внешних сосредоточенных сил P_A, P_B (в подвижных точках A, B) и моментов сил M_0, M_A, M_B (относительно неподвижной оси OZ и подвижных осей AZ, BZ , ортогональных плоскости OXY) (фиг. 1). Упругие смещения предполагаются малыми, допускающими исследование в линейном приближении

[1]. При этих условиях должны учитываться только нормальные к стержню составляющие сил P_A, P_B .

На основе указанных, часто принимаемых на практике, допущений уравнения абсолютного движения упругого стержня AB в плоскости OXY можно представить в форме [1]

$$\rho u'' = -EIu^{IV}, \quad u = u(t, x) \quad (1.1)$$

$$u(t, x) = \begin{cases} u_a(t, x), & x \in [-a, 0] \\ u_b(t, x), & x \in [0, b] \end{cases}$$

$$t \in [0, T], \quad T < \infty; \quad x \in [-a, b], \quad a + b = l$$

Искомую неизвестную функцию $u(t, x)$, определяющую полное смещение произвольной точки $G \in AB$, координата которой x , можно интерпретировать как сумму двух величин

$$u(t, x) = \varphi(t)x + v(t, x) \quad (1.2)$$

Здесь $\varphi = \varphi(t)$ — неизвестный угол между фиксированной осью OX и вращающейся связанной осью Ox ; т. е. φx — длина соответствующей дуги (фиг. 1). Для удобства исследования принято, что ось Ox совпадает с касательной к стержню AB в точке $O \in AB$ ($x = 0$). Неизвестная переменная $v(t, x)$ имеет смысл малых относительных упругих смещений точки $G \in AB$ стержня с эйлеровой координатой x , $x \in [-a, b]$.

Граничные условия в точках A, O, B (соответственно при $x = -a, 0, b$) имеют следующий естественный вид:

$$u_a(t, 0) = u_b(t, 0) = 0, \quad u_a'(t, 0) = u_b'(t, 0) \quad (1.3)$$

$$-EIu_a''(t, -a) = M_A(t), \quad -EIu_b''(t, b) = M_B(t)$$

$$-EIu_a'''(t, -a) = P_A(t), \quad -EIu_b'''(t, b) = P_B(t)$$

$$-EI[u_b''(t, 0) - u_a''(t, 0)] = M_0(t) \quad (1.4)$$

Первые три условия (1.3) имеют геометрический смысл, а остальные пять условий (1.4) (всего восемь соотношений) описывают влияние сосредоточенных внешних сил и моментов сил, как указано выше.

Внешние воздействия $M_{O,A,B}, P_{A,B}$ считаются заданными достаточно гладкими функциями времени, т. е. принадлежащими некоторому классу допустимых функций, определяемому далее; их реализация осуществляется идеальными приводами. Отметим, что если решение $u(t, x)$ краевой задачи (1.1), (1.3), (1.4), отвечающее допустимым начальным условиям, найдено, то, согласно (1.2), однозначно определяются переменные $\varphi(t)$ и $v(t, x)$ следующим образом [2]:

$$\varphi(t) = u'(t, 0), \quad v(t, x) = u(t, x) - u'(t, 0)x \quad (1.5)$$

Начальные условия имеют общий вид и, согласно (1.3), удовлетворяют условиям сопряжения

$$u(0, x) = f(x), \quad u'(0, x) = g(x), \quad x \in [-a, b]$$

$$f(x) = f_a(x), \quad g(x) = g_a(x), \quad x \in [-a, 0]$$

$$f(x) = f_b(x), \quad g(x) = g_b(x), \quad x \in [0, b] \quad (1.6)$$

$$f(0) = f_a(0) = f_b(0) = 0, \quad f_a'(0) = f_b'(0)$$

$$g(0) = g_a(0) = g_b(0) = 0, \quad g_a'(0) = g_b'(0)$$

Здесь $f(x) = f_{a,b}(x)$, $g(x) = g_{a,b}(x)$ — известные достаточно гладкие функции, которые, согласно (1.5), должны быть близкими к линейным.

При заданных допустимых внешних воздействиях (1.4) и начальных распределениях (1.6) требуется решить краевую задачу (1.1), (1.3), (1.4) для произвольных значений параметра a ($a \in [0, l]$, $a + b = l$).

Далее без ограничения общности можно положить $l = \rho = EI = 1$, что достигается введением безразмерных аргументов и переменных по формулам

$$t^* = vt, \quad v^2 = EI / (\rho l^4), \quad x^* = x/l, \quad u^* = u/l$$

$$M_{0,A,B}^* = M_{0,A,B} / (\rho l^3 v^2), \quad P_{A,B}^* = P_{A,B} / (\rho l^2 v^2) \quad (1.7)$$

$$f^*(x^*) = f(lx^*)/l, \quad g^*(x^*) = g(lx^*)/(lv), \quad a^* = a/l, \quad b^* = b/l$$

Звездочка далее для сокращения записи опускается.

2. Решение краевой задачи на собственные значения и функции. Для построения искомого решения $u(t, x)$ по аналогии с [2, 3] применяется метод Фурье [4] и прием Г. А. Гринберга [5]. Сначала методом разделения переменных строятся системы собственных значений и функций соответствующей пространственной переменной x самосопряженной краевой задачи

$$S^{IV} - \lambda^4 S = 0, \quad S = S(x) = S_{a,b}(x), \quad x \in [-a, b]$$

$$S_{a,b}(0) = 0, \quad S_a'(0) = S_b'(0); \quad S_a''(0) = S_b''(0)$$

$$S_a''(-a) = S_a'''(-a) = S_b''(b) = S_b'''(b) = 0 \quad (2.1)$$

$$(u(t, x) \sim \Theta(t) S(x), \quad \Theta'' + \lambda^4 \Theta = 0, \quad t \in [0, T])$$

Нахождение и запись системы вещественных собственных значений $\{\lambda\}$ и собственных функций $\{S_{a,b}(x)\}$ упрощается, если ввести новые пространственные аргументы x_a, x_b на соответствующих интервалах их изменения следующим образом: $x_a = a + x$, $x_a \in [0, a]$; $x_b = b - x$, $x_b \in [0, b]$; тогда $S_a(x) = S_a(x_a - a) \equiv Q_a(x_a)$, $S_b(x) = S_b(b - x_b) \equiv Q_b(x_b)$. Согласно (2.1)

$$Q_{a,b}(x_{a,b}) = A_{a,b} \cos \lambda x_{a,b} + B_{a,b} \sin \lambda x_{a,b} +$$

$$+ C_{a,b} \operatorname{ch} \lambda x_{a,b} + D_{a,b} \operatorname{sh} \lambda x_{a,b}; \quad A_{a,b} = C_{a,b}, \quad B_{a,b} = D_{a,b} \quad (2.2)$$

Четыре соотношения (2.2) между постоянными коэффициентами $A_{a,b}$ и $C_{a,b}$, $B_{a,b}$ и $D_{a,b}$ следуют из нулевых условий (2.1) на концах стержня, т. е. при $x_{a,b} = 0$. Для определения $A_{a,b}$ и $D_{a,b}$ используются четыре условия (2.1) при $x = 0$, т. е. $x_a = a$, $x_b = b$. Элементарными преобразованиями эти условия удобно привести к следующим соотношениям между D_a и D_b :

$$D_a [q(\alpha) - s(\alpha)r(\alpha)/q(\alpha)] = -D_b [q(\beta) - s(\beta)r(\beta)/q(\beta)]$$

$$D_a [r(\alpha) - p(\alpha)s(\alpha)/q(\alpha)] = D_b [r(\beta) - p(\beta)s(\beta)/q(\beta)]$$

$$A_a = -D_a s(\alpha)/q(\alpha), \quad A_b = -D_b s(\beta)/q(\beta) \quad (2.3)$$

$$p(\xi) = \operatorname{ch} \xi - \cos \xi, \quad q(\xi) = \operatorname{ch} \xi + \cos \xi \geq 2$$

$$r(\xi) = \operatorname{sh} \xi - \sin \xi, \quad s(\xi) = \operatorname{sh} \xi + \sin \xi$$

$$\xi = \alpha \vee \beta; \quad \alpha = \lambda a, \quad \beta = \lambda b$$

Из первых двух уравнений (2.3) относительно D_a, D_b получим характеристическое уравнение, определяющее собственные значения $\lambda = \lambda(a, b)$:

$$\Delta(\alpha, \beta) = [q^2(\alpha) - s(\alpha)r(\alpha)] [r(\beta)q(\beta) - p(\beta)s(\beta)] +$$

$$+ [q^2(\beta) - s(\beta)r(\beta)] [r(\alpha)q(\alpha) - p(\alpha)s(\alpha)] = 0$$

$$\{\lambda\} = \{\lambda_n(a, b)\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \lambda_0 \equiv 0 \quad (2.4)$$

Функция $\Delta(\alpha, \beta)$ в (2.4) есть нечетная функция λ относительно $\lambda = 0$; поэтому $\lambda_0 = 0$ и далее можно считать, что $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где λ_n — неотрицательные корни характеристического уравнения. Нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратный, однако ему отвечает только одна собственная функция $S_0(x) = x$. Ненулевые собственные значения λ_n простые и симметричные относительно перестановки аргументов a и b : $\lambda_n(a, b) = \lambda_n(b, a)$ ($n \geq 1, a + b = 1$). Поэтому достаточно построить функции $\lambda_n(a, b)$ — решения уравнения (2.4) на интервале $a \in [0, 1/2], b = 1 - a$ (или $b \in [0, 1/2], a = 1 - b$).

Следует отметить, что при $a = 0$ ($b = 1$) или $a = 1$ ($b = 0$) ($\lambda_n(0, 1) = \lambda_n(1, 0)$) собственные значения λ_n^f совпадают с соответствующими значениями краевой задачи для шарнирно опертого на одном конце стержня [2, 3], что очевидно.

Итак, имеем соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda &= \operatorname{th} \lambda \quad (a = 0, b = 1 \vee a = 1, b = 0) \\ \lambda_1^f &\simeq 3,927, \quad \lambda_2^f \simeq 7,069, \quad \lambda_3^f \simeq 10,21, \quad \lambda_4^f \simeq 13,35, \quad \lambda_5^f \simeq 16,49 \quad (2.5) \\ \lambda_n^f &= \pi/4 + \pi n + O_n^f, \quad O_n^f \sim \exp[-(2\pi n + \pi/2)], \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Достаточно просто исследуется также случай $a = b = 1/2$, для которого получаем характеристическое уравнение и его решения:

$$(\operatorname{tg} 1/2\lambda - \operatorname{th} 1/2\lambda)(\cos 1/2\lambda \operatorname{ch} 1/2\lambda + 1) = 0 \quad (a = b = 1/2) \quad (2.6)$$

$$\{\lambda_n\} = \{\lambda_{n'}^s\} \cup \{\lambda_{n''}^a\}, \quad n' = 0, 1, 2, \dots, \quad n'' = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_1^a \simeq 3,750, \quad \lambda_2^a \simeq 9,388, \quad \lambda_3^a \simeq 15,71, \quad \lambda_4^a \simeq 21,99, \quad \lambda_5^a \simeq 28,27$$

$$\lambda_{n''}^a = \pi + 2\pi n'' + O_{n''}^a, \quad O_{n''}^a \sim \exp(-2\pi n''), \quad n'' \geq 1$$

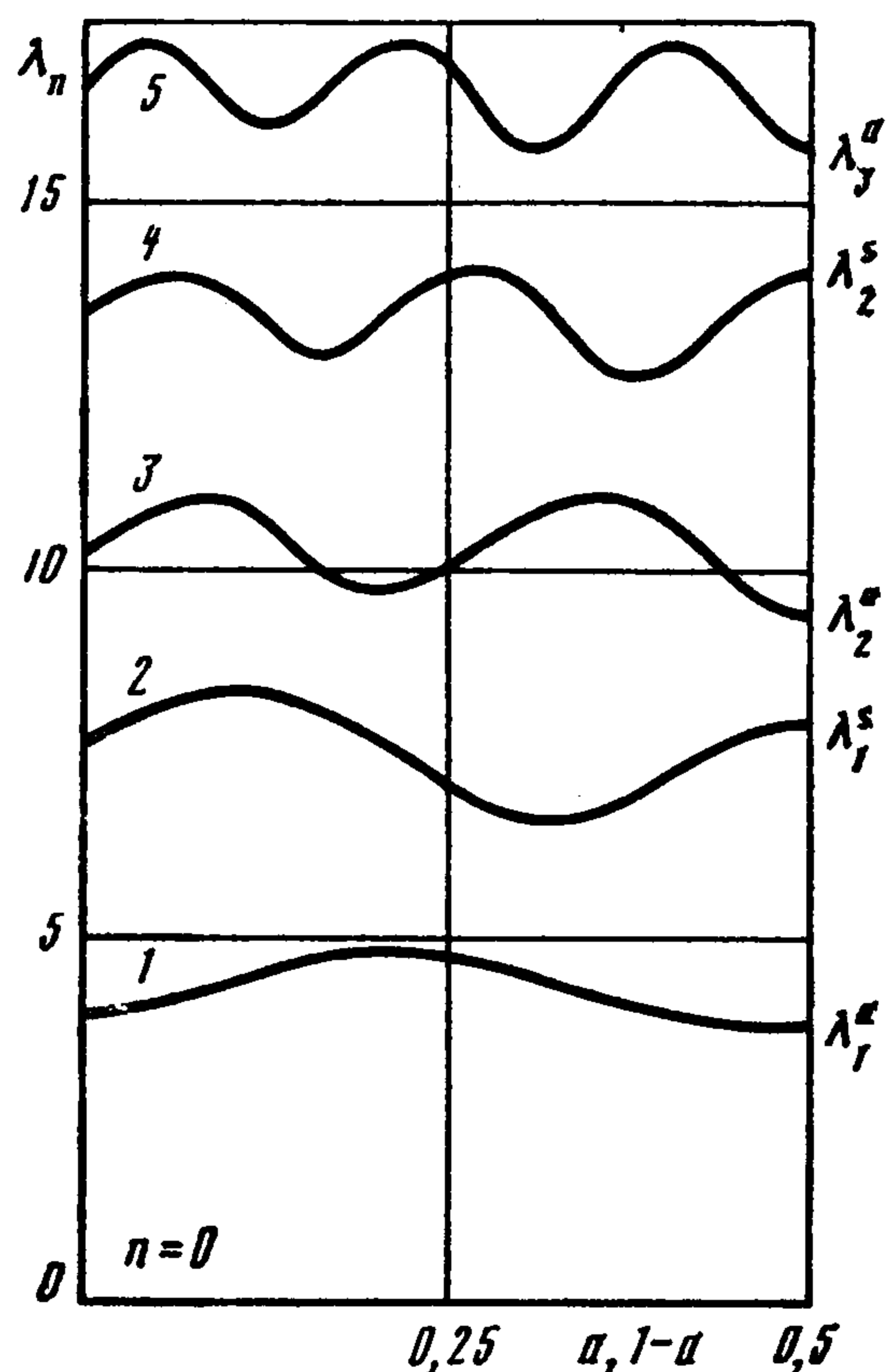
Собственные значения $\{\lambda_{n'}^s\}$, отвечающие симметричным формам колебаний стержня (нулям первого сомножителя уравнения (2.6)), получаются на основе выражений (2.5): $\lambda_{n'}^s = 2\lambda_{n'}(0, 1)$. Эти собственные значения и собственные значения $\{\lambda_{n''}^a\}$, отвечающие антисимметричным формам колебаний стержня (нулям второго сомножителя в левой части уравнения (2.6)), попеременно чередуются, что естественно. Первые шесть собственных значений $\lambda_n(a, 1-a)$ ($n = 0, 1, \dots, 5$) для $a \in [0, 1/2]$ приведены на фиг. 2; как отмечалось, $\lambda_n(a, 1-a) = \lambda_n(1-a, a)$, $\lambda_n(0, 1) = \lambda_n(1, 0) = \lambda_n^f$.

После того как собственные значения (числа) $\lambda_n(a, b)$ определены, собственные функции $S_n^{a,b}(x)$, согласно (2.2), (2.3), представимы в виде

$$\begin{aligned} S_0(x) &= x, \quad x \in [-a, b] \\ S_n^a(x) &= -s(\alpha_n) q(\alpha_n + \lambda_n x) / q(\alpha_n) + \\ &+ s(\alpha_n + \lambda_n x), \quad x \in [-a, 0] \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^b(x) &= [s(\beta_n) q(\beta_n - \lambda_n x) / q(\beta_n) - s(\beta_n - \lambda_n x)] [q(\alpha_n) - \\ &- s(\alpha_n) r(\alpha_n) / q(\alpha_n)] [q(\beta_n) - s(\beta_n) r(\beta_n) / q(\beta_n)]^{-1}, \quad x \in [0, b] \end{aligned}$$

$$\alpha_n = \lambda_n a, \quad \beta_n = \lambda_n b, \quad S_{-n}^{a,b}(x) = -S_n^{a,b}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$



Фиг. 2

В (2.7) для определенности полагается $D_a = 1$, а коэффициент D_b берется из первого соотношения (2.3); возможны другие эквивалентные представления. Функция $S_0(x)$ — нулевая форма отвечает вращению стержня без упругих смещений (как абсолютно жесткого: $v(t, x) \equiv 0$).

Из выражений (2.7) следует, что собственные функции $S_n^{a,b}(x)$ удовлетворяют краевым условиям (2.1) по построению и, кроме того, $S_n^a(x) \equiv 0$ при $a = 0$ и $S_n^b(x) \equiv 0$ при $b = 0$. Функции $S_n(x)$ ($x \in [-a, b]$, $n = 1, 2, \dots$) аналитичны на отрезках $x \in [-a, 0)$ и $x \in (0, b]$, а в точке $x = 0$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно. Обратим внимание, что достаточно взять функции $S_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Система собственных функций $\{S_n(x)\}$ (2.7) для самосопряженной краевой задачи (2.1) ортогональна в обычном смысле [4, 6]

$$\begin{aligned} (S_n, S_m) &= \int_{-a}^b S_n(x) S_m(x) dx = \int_{-a}^0 S_n^a(x) S_m^a(x) dx + \int_0^b S_n^b(x) S_m^b(x) dx = \\ &= \|S_n\|^2 \delta_{nm}, \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad \|S_n\|^2 = \int_{-a}^0 S_n^{a2}(x) dx + \int_0^b S_n^{b2}(x) dx \\ \sigma_n(x) &= S_n(x) / \|S_n\|, \quad (\sigma_n, \sigma_m) = \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Действительно, умножим соотношение (2.1) для $S = S_n^{a,b}$, $\lambda = \lambda_n$ на $S_m^{a,b}$, проинтегрируем по x на соответствующих интервалах изменения x и сложим. Интегрируя по частям и используя граничные условия (2.1) для $S_n^{a,b}$, получим выражения (2.8).

Нормы $\|S_n\|$ собственных функций $S_n(x)$, используемых в (2.8) для построения ортонормированной системы $\{\sigma_n(x)\}$, зависят симметрично от параметров a и $b = 1 - a$ относительно $a = 1/2$ и перестановки аргументов аналогично $\lambda_n(a, b)$. Поэтому достаточно построить их графики на интервале $a \in [0, 1/2]$. Аналитическое представление функций $\|S_n\|$ от $a, b = 1 - a$ чрезвычайно громоздко для $n \geq 1$; в частности

$$\|S_0\|^2 = 1/3 (a^3 + b^3) = (a^2 - a + 1/3) \geq 1/12$$

Таким образом, согласно (2.4), (2.7), (2.8) построены искомые системы собственных значений $\{\lambda_n\}$ и ортонормированных функций $\{\sigma_n(x)\}$ для краевой задачи (2.1). При $a = 0, 1/2, 1$ система $\{\sigma_n(x)\}$ представляет известные полные ортонормированные системы, т. е. базисы в пространстве $L^2[-a, b]$. Доказательство полноты в общем случае проводится на основе теории интегральных операторов [6]. Свойства равномерной сходимости и дифференцируемости рядов Фурье, соответствующих более узким классам функций, устанавливаются аналогично теореме Стеклова [7] и используются далее для решения исходной задачи (1.1), (1.3), (1.4), (1.6).

3. Решение задачи о движении упругого стержня при заданных силах и моментах. Искомая функция $u(t, x)$ строится методом Фурье [2, 4, 5, 7] на основе полной ортонормированной системы (базиса) $\{\sigma_n(x)\}$. Применяемый ниже метод Г. А. Гринберга [5] заключается в следующем. Согласно (1.1) (при $l = \rho = EI = 1$) и (2.8), получим счетную систему уравнений для неизвестных коэффициентов Фурье $\Theta_n(t)$ ($n = 0, 1, \dots$) функции $u(t, x)$ по базису $\{\sigma_n(x)\}$:

$$\Theta_n'' = - \int_{-a}^0 u^{IV} \sigma_n^a(x) dx - \int_0^b u^{IV} \sigma_n^b(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Интегрируя выражения справа в (3.1) по частям и используя краевые условия (1.3), (1.4), (2.1) для $u_{a,b}(t, x)$, $\sigma_n^{a,b}(x)$, получим счетную систему уравнений и начальных значений для неизвестных переменных $\Theta_n(t)$:

$$\Theta_n'' + \lambda_n^4 \Theta_n = F_n(t), \quad t \in [0, T], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$F_n(t) \equiv \sigma_n^b(b) P_B(t) - \sigma_n^a(-a) P_A(t) + \\ + \sigma_n'(0) M_0(t) + \sigma_n^{a'}(-a) M_A(t) - \sigma_n^{b'}(b) M_B(t)$$

$$\Theta_n(0) = \Theta_n^0 \equiv f_n = (f, \sigma_n), \quad \Theta_n'(0) = \Omega_n^0 \equiv g_n = (g, \sigma_n)$$

Здесь f_n, g_n — коэффициенты Фурье функций $f(x), g(x)$ (1.6) по базису $\{\sigma_n(x)\}$. Если функции $P_{A,B}(t), M_{O,A,B}(t)$ заданы, что и предполагается, то элементарно определяем искомые $\Theta_n(t), \Theta_n'(t)$:

$$\Theta_n(t) = f_n \cos \omega_n t + \frac{g_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t - \tau) F_n(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$\Theta_n'(t) = d\Theta_n(t)/dt; \quad \omega_n = \lambda_n^2(a, b), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Выражения $\Theta_0(t), \Theta_0'(t)$ получаются из (3.3) при $n = 0$ предельным переходом $\omega_n \rightarrow 0$. На основе полученных коэффициентов $\Theta_n(t)$ (3.3) строится искомое решение $u(t, x)$ задачи, поставленной в разд. 1

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(t) \sigma_n(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in [-a, b]$$

$$\varphi(t) = u'(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n'(0) \Theta_n(t) \quad (3.4)$$

$$v(t, x) = u(t, x) - \varphi(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) [\sigma_n(x) - x\sigma_n'(0)]$$

Зависимость решения $u(t, x)$ (3.4) от параметров задачи $a, b = 1 - a$ для сокращения записи не указывается. Отметим, что если начальные отклонения и скорости исчезающе малы, а размерные частоты асимптотически велики, то соотношения (3.4) описывают вращения абсолютно жесткого стержня

$$u(t, x) = \varphi(t)x, \quad v(t, x) \equiv 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in [-a, b]$$

$$\varphi(t) = \varphi^0 + \omega^0 t + J^{-1/2}(a, b) \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

$$J(a, b) = \|S_0\|^2 = 1/3(a^3 + b^3) = a^2 - a + 1/3, \quad 1/12 \leq J \leq 1/3$$

$$F_0(t) = J^{-1/2}(a, b) M_{\Sigma}(t), \quad M_{\Sigma} \equiv bP_B + aP_A + M_O + M_A - M_B$$

Коэффициент $J(a, b)$ в (3.5) имеет смысл безразмерного момента инерции абсолютно жесткого тонкого стержня единичной длины и плотности относительно точки $x = a, a \in [0, 1]$.

Все моды парциальных колебаний упругого стержня согласно (3.2) оказываются связанными общими внешними воздействиями $P_{A,B}(t), M_{O,A,B}(t)$, которые могут рассматриваться как управления и выбираться из требуемых свойств движения. Согласно [8], счетная система (3.2) управляема на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T < \infty$. Однако конструктивное построение управления посредством конечного числа управляющих функций $P_{A,B}(t), M_{O,A,B}(t)$ в отличие от распределенного управления вызывает принципиальные трудности [2, 3, 9, 10]. В качестве основного практического подхода используется так называемое конечномодовое приближение [3], при котором учитываются коэффициенты $\Theta_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}$). Соответствующие управления подставляются в исходную систему и оценивается их влияние на более высокие моды колебаний ($n > n_{\max}$).

Влияние возмущений или техническая реализация управляющих воздействий $P_{A, B}(t)$, $M_{O, A, B}(t)$ могут приводить к непосредственной связи между переменными Θ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Например, часто в приложениях управляющий момент сил M_O относительно OZ имеет вид $M_O = m(\varphi, \dot{\varphi}) + \mu(\dot{\varphi}, e(t))$, где m — момент сил сопротивления, μ — электромагнитный момент, e — электрическое напряжение, рассматриваемое как управление электромеханическим приводом. Далее, силовые воздействия $P_{A, B}$ могут быть реализованы посредством линейных шаговых двигателей в виде

$$P_{A, B} = P_{A, B}(u(t, x), u'(t, x), e_{A, B}(t))|_{x=-a, b} \approx P_{A, B}(x\varphi(t), x\dot{\varphi}(t), e_{A, B}(t))|_{x=-a, b}$$

Потребности практики приводят к необходимости разработки приближенных методов решения задач управления движениями и их оптимизации для систем с распределенными параметрами, т. е. обладающими значительной упругой податливостью элементов и конструкций.

4. Оценки упругих смещений и точности позиционирования. Для практических целей обычно интересна постановка задачи о приведении упругого стержня в требуемое угловое положение ($\varphi(T) = \varphi^T$, $\dot{\varphi}(T) = 0$) или состояние равномерного вращения ($\dot{\varphi}(T) = \omega^T$) без относительных колебаний ($v(T, x) = v'(T, x) \equiv 0$). Поскольку точное решение построить не удастся, то стержень будет иметь остаточные упругие смещения. Вычисление величины $v(t, x)$, определяющей эти отклонения, позволит оценить различные характеристики точности управления вращениями стержня. Для исследования такой задачи удобно перейти к переменным $v(t, x)$, $\varphi(t)$; в результате получим систему интегродифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} v'' &= -v^{IV} - x\varphi'', & v &= v(t, x) = v_{a, b}(t, x) \\ v_a(t, 0) &= v_a'(t, 0) = v_b(t, 0) = v_b'(t, 0) = 0 \\ (-[v_b''(t, 0) - v_a''(t, 0)]) &= M_O(t), & t &\in [0, T] \\ -v_a''(t, -a) &= M_A(t), & -v_a'''(t, -a) &= P_A(t) \\ -v_b''(t, b) &= M_B(t), & -v_b'''(t, b) &= P_B(t) \\ v(0, x) &= h(x) \equiv f(x) - \varphi^0 x, & v'(0, x) &= k(x) \equiv g(x) - \omega^0 x \\ x &\in [-a, b], & h(0) &= h'(0) = k(0) = k'(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} J(a, b)\varphi'' + \int_{-a}^b v''(t, x)x dx &= M_\Sigma(t) \\ \varphi(0) &= \varphi^0, & \dot{\varphi}(0) &= \omega^0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Задача (4.1), (4.2) эквивалентна исходной (1.1), (1.3), (1.4), (1.6). Однако тип краевой задачи для v иной — изменились граничные условия; она может быть решена методом, аналогичным указанному в разд. 2, 3.

Отметим, что из написанной системы девяти граничных условий могут быть выбраны любые восемь. Кроме того, уравнение (4.2), содержащее интеграл от $v''(t, x)x$, в силу (4.1) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} -v_b'''(t, b) - v_a'''(t, -a) - [v_b''(t, 0) - v_a''(t, 0)] - \\ -v_a''(t, -a) + v_b''(t, b) &= M_\Sigma(t), & t &\in [0, T] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подстановка в (4.3) граничных значений согласно (4.1) приводит к тождеству, как и следовало ожидать. Если задана функция $\dot{\varphi} = \gamma(t)$ («кинематическое» управление), то соотношение (4.3) представляет условие на силовые воздействия, при выполнении которого реализуется заданное вращательное движение касательной Ox («прямая» задача динамики). Отметим, что левая часть уравнения (4.3) есть линейный интегральный опе-

ратор от γ , $P_{A, B}$, $M_{O, A, B}$. Далее, если заданы функции $P_{A, B}(t)$, $M_{O, A, B}(t)$, то соотношение (4.3) есть линейное интегральное уравнение типа Вольтерры с разностным ядром первого рода [11] со всеми особенностями согласования гладкости и порядка нулей. Из структуры решения, получаемого методом Фурье, следует, что интегральное уравнение имеет вид

$$\int_0^t L(t-\tau)\gamma(\tau) d\tau = H(t), \quad L(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{\Omega_n} \sin \Omega_n t \quad (4.4)$$

Здесь L_n — коэффициенты Фурье функции $l(x) \equiv x$ по базису, порождаемому краевой задачей (4.1); Λ_n , $\Omega_n = \Lambda_n^2$ — собственные значения и частоты соответственно. Функция $H(t)$ определяется через известные $P_{A, B}(t)$, $M_{O, A, B}(t)$ и коэффициенты Фурье функций $h(x)$, $k(x)$. Обратим внимание, что ядро интегрального оператора обращается в нуль при $t = \tau$, что требует согласования порядка нулей правой части $H(t)$, если решение $\gamma(t)$ строится в классе непрерывных (не обобщенных) функций [11], что диктуется физическими условиями прочности.

Типичная постановка задачи («динамического» управления для системы (4.1), (4.2) заключается в выборе допустимых (и оптимальных по некоторому критерию качества) управлений $P_{A, B}(t)$, $M_{O, A, B}(t)$, приводящих при $t = T$ систему в требуемое состояние вращения или покоя как целого (без упругих смещений, $v(T, x) = v^*(T, x) \equiv 0$). Это состояние будет сохраняться для $t > T$, если управления положить равными нулю.

Для приложений представляет интерес состояние статического прогиба $v = v^0(x)$ стержня, для которого $v^*(t, x) \equiv 0$, $\gamma(t) = \gamma^0 = \text{const}$. Оно осуществляется при постоянных управляющих воздействиях $P_{A, B}$, $M_{O, A, B}$, в частности $\gamma(t) \equiv 0$, если при этом $M_{\Sigma}(t) \equiv 0$. Интегрируя уравнения статического прогиба, получим

$$v_{a, b}^0(x) = \frac{x^2}{2!} \left(-\frac{1}{3} l_{a, b}^3 \gamma^0 - M_{A, B} + l_{a, b} P_{A, B} \right) + \frac{x^3}{3!} \left(\frac{1}{2} l_{a, b}^2 \gamma^0 - P_{A, B} \right) - \frac{x^5}{5!} \gamma^0, \quad \gamma^0 = \frac{M_{\Sigma}}{J(a, b)} \quad (4.5)$$

$$l_a = -a, \quad l_b = b; \quad \varphi'' = \gamma^0, \quad M_{\Sigma}, P_{A, B} = M_{O, A, B} = \text{const}$$

Из (4.5) просто следуют условия на управления, для которых $v_a^0(x) \equiv 0$ ($M_A = P_A = \gamma \equiv 0$), но $v_b^0(x) \neq 0$; аналогично $v_b^0(x) \equiv 0$ (если $M_B = P_B = \gamma \equiv 0$), но $v_a^0(x) \neq 0$. Весь стержень остается прямым, если и только если все функции $P_{A, B}(t) = M_{O, A, B}(t) \equiv 0$, что очевидно. Элементарные выражения (4.5) полезны, когда $T \gg T_1$, где $T_1 = 2\pi/\Omega_1$ — период низшей моды упругих колебаний. В случае плавных, практически постоянных управлений собственные колебания затухнут и вращение стержня будет описываться соотношениями (4.5).

Построенные согласно (2.7), (2.8) собственные ортонормированные функции $\sigma_n(x)$ (3.2), (3.3) и коэффициенты Фурье $\Theta_n(t)$ и вычисленные из (2.4) (см. также (2.5), (2.6), (3.3)) собственные значения $\lambda_n(a, b)$ и частоты $\omega_n = \lambda_n^2$ позволяют просто строить рациональные законы управления, оценивать в каждом конкретном случае точность получающегося движения по отношению к требуемому и конструктивно выбирать состав управляющих воздействий и параметр a для улучшения качества процесса управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Акуленко Л. Д., Лукасян А. А.* Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 33—41.
3. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управлении поворотом упругого звена манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1984. № 1. С. 167—173.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
5. *Гринберг Г. А.* Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 2. С. 141—168.
6. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
7. *Крылов А. Н.* Собрание трудов. Т. 3. Ч. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1949. 481 с.
8. *Полтавский Л. Н.* О финитной управляемости бесконечных систем маятников // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 1318—1321.
9. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
10. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1095—1103.
11. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 192 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.XII.1987