Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 3, 1989

УДК 532.546

О. Ю. Динариев, О. В. Николаев

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Рассматриваются релаксационные изотермические процессы в недеформируемом пористом образце конечных размеров, насыщенном слабосжимаемой жидкостью. Эксперименты по установлению стационарного режима фильтрации жидкости показывают (см. п. 2), что для пористых образцов с характерным размером порядка нескольких метров уравнения нестационарной фильтрации, описывающие модель упругого режима [1, 2], несправедливы. Поэтому для описания нестационарных процессов в таких образцах естественно пользоваться более общими релаксационными моделями фильтрации [3, 4]. Исследуются общие свойства релаксационного ядра, характеризующего данную систему «жидкость — пористая среда». Приводится решение задачи об установлении стационарного режима фильтрации. Развитая теория прилагается к анализу экспериментальных результатов по нестационарной фильтрации маловязких слабосжимаемых жидкостей. Это позволяет получить общие заключения о виде релаксационных ядер для конкретных систем.

1. Пусть изотропная однородная недеформируемая пористая среда заполняет ограниченную область D в евклидовом пространстве R^n ($n = 1, 2, 3$). Значения $n = 1$ и $n = 2$ соответствуют одно- и двумерным задачам фильтрации. Будем предполагать, что граница области ∂D является C^1-подмногообразием в R^n.

Пусть пористая среда насыщена жидкостью. Будут изучаться процессы, в которых плотность жидкости ρ мало отличается от фиксированной величины ρ_0, поэтому можно принять линейное выражение для давления (E — объемный модуль упругости жидкости)

$$p = p_0 + E(\rho - \rho_0)/\rho_0 \tag{1.1}$$

В релаксационной теории фильтрации [3, 4] закон Дарси обобщается следующим образом:

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{r}) = -k\mu^{-1} \int K(t_0 - t)\, \nabla G(t, \mathbf{r})dt, \quad G = p + \varphi\rho \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации, k — проницаемость, φ — гравитационный потенциал, μ — вязкость жидкости, которую будем считать постоянной. Выше и всюду далее, если не указано противное, интегрирование ведется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Ядро $K = K(t)$ не зависит от пространственных координат и характеризует внутренние релаксационные процессы в системе «пористая среда — жидкость». Функция $K = K(t)$ удовлетворяет ряду условий, вытекающих из физических и термодинамических соображений.

Перечислим эти условия.

Если ∇G изменяется во времени, сохраняя в данной точке пространства постоянное направление, естественно предположить, что соответствующая скорость фильтрации имеет в данной точке во все моменты времени противоположное направление. Это предположение эквивалентно следующему условию:

1°. $K = K(t)$ — неотрицательная функция (возможно, обобщенная), имеющая размерность (время)$^{-1}$.

При постоянном во времени ∇G соотношение (1.2) должно переходить в закон Дарси, откуда

2°. $\int K(t)\, dt = 1$.

Ядро $K = K(t)$ описывает влияние поля ∇G на поле скорости фильтрации $\mathbf{u}$. В силу принципа причинности поле $\nabla G(t, \mathbf{r})$ не может оказывать влияния на $\mathbf{u}(t_0, \mathbf{r})$ при $t > t_0$. Значения же $\nabla G(t, \mathbf{r})$ при $t = t_0$ могут влиять на $\mathbf{u}(t_0, \mathbf{r})$ особым, сингулярным образом. Поэтому имеет место условие

3°. Носитель функции $K = K(t)$ лежит на полуоси $[0, +\infty)$. Функция $K = K(t)$ может иметь сингулярный носитель — точку $t = 0$. Например, закон Дарси является частным случаем закона (1.2) для ядра, равного δ-функции Дирака.

Поскольку влияние $\nabla G(t, \mathbf{r})$ на $\mathbf{u}(t_0, \mathbf{r})$ при возрастании разности $(t_0 - t)$ должно убывать, то естественно предположить, что

4°. При больших t функция $K = K(t)$ гладкая и быстроубывающая.

Далее, рассмотрим величину

$$A = -\int \mathbf{u}(t, \mathbf{r})\, \nabla G(t, \mathbf{r})\, dt \tag{1.3}$$

для произвольной вектор-функции $\nabla G(t, \mathbf{r})$, быстроубывающей при $|t| \to +\infty$. Величина A пропорциональна работе сил трения жидкости со скелетом породы в частице пористой среды. Согласно второму закону термодинамики величина A должна быть всегда неотрицательна. Отсюда следует, что

5°. Для любой быстроубывающей при $|t| \to +\infty$ функции $f = f(t)$ имеет место неравенство

$$\int dt_1 \int dt_2 K(t_1 - t_2)\, f(t_1)\, f(t_2) \geqslant 0$$

Для ненулевых функций $f = f(t)$ неравенство должно быть строгим.

Из условий 1°—5° можно вывести ряд следствий, касающихся фурье-образа ядра $K = K(t)$

$$K_F(\omega) = \int e^{-i\omega t} K(t)\, dt, \quad \omega \in R$$

Согласно условию 2° $K_F(0) = 1$. Далее, в силу вещественности функции $K = K(t)$ справедливо соотношение

$$\overline{K_F(\omega)} = K_F(-\omega), \quad \omega \in R \tag{1.4}$$

Из условия 1° по теореме Бохнера [5] вытекает, что $K_F = K_F(\omega)$ — положительно определенная функция. Это означает, что для любых комплексных чисел z_j и любых действительных чисел ω_j $(j = 1, \ldots, N)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i, j=1}^{N} \bar{z}_i z_j K_F(\omega_i - \omega_j) \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Положим $n = 2$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 0$. Из (1.4), (1.5) следует, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 имеет место неравенство

$$(|z_1|^2 + |z_2|^2) K_F(0) + 2\mathrm{Re}\,(\bar{z}_1 z_2 K_F(\omega)) \geqslant 0$$

что эквивалентно неравенству

$$|K_F(\omega)| \leqslant 1, \quad \omega \in R \tag{1.6}$$

Из условия 3° следует, что функция $K_F = K_F(\omega)$ продолжается по аналитичности в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости ω [6].

При этом соотношение (1.4) продолжается в комплексную плоскость

$$\overline{K_F(\overline{\omega})} = K_F(-\omega), \quad \omega \in C \tag{1.7}$$

В фурье-представлении условие 5° при учете (1.4) эквивалентно неравенству

$$\int_0^\infty |f_F(\omega)|^2 \operatorname{Re} K_F(\omega)\, d\omega \geqslant 0$$

Отсюда в силу произвольности $f_F(\omega)$ при $\omega \geqslant 0$ вытекает неотрицательность $\operatorname{Re} K_F(\omega)$. Далее будем использовать более сильное неравенство

$$\operatorname{Re} K_F(\omega) > 0, \quad \omega \in R \tag{1.8}$$

которое упрощает анализ и, по-видимому, всегда выполняется на практике.

Согласно условиям 3° и 4° функция $K_F(\omega)$ стремится к одной и той же постоянной при $\omega \to \pm\infty$. В силу этого замечания и неравенства (1.8) из общей теории [7] следует, что голоморфная функция $K_F = K_F(\omega)$ не имеет нулей при $\operatorname{Im}\omega < 0$. Таким образом, комплексная функция $K_F = K_F(\omega)$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im}\omega < 0$ на некоторую область в круге $|z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$, $z \in C$.

В дальнейшем будем предполагать, что функция $K_F = K_F(\omega)$ продолжается по аналитичности в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости и является мероморфной функцией [7]. Полюсов нет, если $K_F(\omega) = 1$, т. е. при отсутствии внутренних релаксационных процессов.

Пусть S_1, S_2 — непустые открытые подмножества в ∂D, причем границы S_1 и S_2 в ∂D совпадают и являются C^1 — подмногообразием многообразия ∂D.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу определения функции $f \in W_2^1(D)$:

$$\Delta_n f = 0; \; f|_{S_1} = f_1, \; \partial f/\partial n|_{S_2} = f_2 \tag{1.9}$$

$$f_1 \in W_2^{1/2}(S_1), \quad f_2 \in W_2^{-1/2}(S_2)$$

Здесь Δ_n — n-мерный оператор Лапласа, обозначения функциональных пространств взяты из [8].

Задача (1.9) имеет единственное решение [8], которое можно представить в виде $f = L_1 f_1 + L_2 f_2$, где L_1, L_2 — подходящие линейные операторы.

Исследуем теперь задачу об установлении стационарного режима фильтрации в следующей постановке. Пусть при $t < 0$ жидкость в пористой среде покоилась, $p|_{t<0} = p_0$, а при $t \geqslant 0$ на границе пористого образца скачкообразно во времени задаются распределения давления и потока (n — внутренняя нормаль к ∂D)

$$p|_{S_1} = g_1, \; (\mathbf{u}, n)|_{S_2} = g_2, \; t \geqslant 0 \tag{1.10}$$

$$g_1 \in W_2^{1/2}(S_1), \quad g_2 \in W_2^{-1/2}(S_2)$$

Динамика изменения давления при $t \geqslant 0$ в пористом образце определяется уравнением неразрывности

$$\partial(m\rho)/\partial t + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1.11}$$

где m — пористость, а также соотношениями (1.1) и (1.2).

Будем пренебрегать влиянием гравитации. Из (1.1), (1.2), (1.11) следует уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t_0, \mathbf{r}) = \varkappa \int K(t_0 - t)\, \Delta_n p(t, \mathbf{r})\, dt, \quad \varkappa = \frac{kE}{\mu m} \tag{1.12}$$

При этом граничные условия (1.10) преобразуются к виду

$$p|_{S_1} = g_1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-t_0)\frac{\partial p}{\partial n}(t_0, \mathbf{r})|_{S_2} dt_0 = -\frac{\mu}{k} g_2, \quad t \geqslant 0 \qquad (1.13)$$

Применим к уравнениям (1.12), (1.13) преобразования Фурье — Лапласа по t [6]. Тогда получим

$$(i\omega - \varkappa K_F(\omega)\Delta_n) p_F = p_0$$

$$p_F|_{S_1} = -g_1\frac{i}{\omega}, \quad \left.\frac{\partial p_F}{\partial n}\right|_{S_2} = \frac{\mu}{k} g_2 \frac{i}{\omega K_F(\omega)} \qquad (1.14)$$

$$p_F = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\omega t} p(t)\, dt$$

Введем новую неизвестную функцию $G = G(\omega, \mathbf{r})$ по формуле

$$p_F = G + H, \quad H = -\frac{i}{\omega} L_1 g_1 + \frac{i\mu}{k\omega K_F(\omega)} L_2 g_2 \qquad (1.15)$$

Тогда из (1.14) следует, что

$$(i\omega - \varkappa K_F(\omega)\Delta_n) G = p_0 + i\omega H \qquad (1.16)$$

$$G|_{S_1} = 0, \ \partial G/\partial n|_{S_2} = 0 \qquad (1.17)$$

Давление $p = p(t, \mathbf{r})$ можно восстановить по $p_F = p_F(\omega, \mathbf{r})$ посредством формулы

$$p(t, \mathbf{r}) = (2\pi)^{-1}\int e^{i\omega t + \varepsilon t} p_F(\omega - i\varepsilon, \mathbf{r})\, d\omega \qquad (1.18)$$

где ε — произвольная положительная величина. Интеграл в (1.18) может быть вычислен по формуле вычетов

$$p(t, \mathbf{r}) = i\sum_j \mathrm{Res}_{\omega_j}[e^{i\omega t} p_F(\omega, \mathbf{r})] \qquad (1.19)$$

где ω_j — полюсы функции $p_F(\omega, \mathbf{r})$. Из (1.14)—(1.16) видно, что полюсы ω_j разбиваются на три подмножества: а) одна точка $\omega_0 = 0$, б) ω_{1j} — корни уравнения $K_F(\omega) = 0$, в) ω_{2j} — значения ω, для которых оператор $(i\omega - \varkappa K_F(\omega)\Delta_n)$ необратим. В последнем случае под Δ_n понимается самосопряженный оператор в $L_2(D)$, выделяемый граничными условиями (1.17) [8].

Член в (1.19), соответствующий ω_0, можно выделить явно. Тогда

$$p(t, \mathbf{r}) = L_1 g_1 - \mu k^{-1} L_2 g_2 + R(t, \mathbf{r})$$

$$R(t, \mathbf{r}) = i\sum_j \mathrm{Res}_{\omega_{1j}}[e^{i\omega t} p_F(\omega, \mathbf{r})] + i\sum_j \mathrm{Res}_{\omega_{2j}}[e^{i\omega t} p_F(\omega, \mathbf{r})]$$

Видно, что комплексные числа ω_{1j}, ω_{2j} имеют положительные мнимые части, и потому слагаемое $R(t, \mathbf{r})$ описывает релаксацию системы к установившемуся режиму фильтрации.

В самом деле, то, что полюсы ω_{1j} лежат в верхней полуплоскости комплексной плоскости, следует из принятых предположений относительно функции $K_F = K_F(\omega)$. С другой стороны, пусть ω_{2j} — число, удовлетворяющее одному из уравнений

$$i\omega + \varkappa K_F(\omega)\lambda_l = 0, \ 0 < \lambda_l < \lambda_{l+1} \ (l = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1.20)$$

где λ_l — спектр оператора $(-\Delta_n)$. Если $\mathrm{Im}\, \omega_{2j} \leqslant 0$, то из (1.20) вытекает неравенство

$$\mathrm{Re}\, K_F(\omega_{2j}) = (\varkappa\lambda_l)^{-1}\mathrm{Im}\, \omega_{2j} \leqslant 0$$

что противоречит (1.8).

Пусть процесс релаксации к установившемуся режиму фильтрации наблюдается в эксперименте. Тогда из полного поля давления $p(t, \mathbf{r})$

можно выделить слагаемое $R(t, \mathbf{r})$, а затем посредством фурье-анализа функции $R(t, \mathbf{r})$ выделить комплексные частоты ω_{1j}, ω_{2j}. Эти частоты соответствуют счетному набору релаксационных процессов, протекающих в пористой среде, причем величины $\tau_{aj} = (\mathrm{Im}\,\omega_{aj})^{-1}$ есть соответствующие характерные времена релаксации. (Отметим, что согласно (1.7), (1.20) множества $\Omega_1 = \{\omega_{1j}\}$, $\Omega_2 = \{\omega_{2j}\}$ инвариантны относительно преобразования $\omega \mapsto (-\overline{\omega})$.)

Очевидно, что в эксперименте легче всего выделить процесс с наибольшим τ_{aj} (наименьшей величиной $\mathrm{Im}\,\omega_{aj}$), поскольку моды с меньшими временами релаксации «вымирают» быстрее. Докажем, что по крайней мере для больших образцов основной релаксационный процесс имеет чисто мнимую комплексную частоту, которая определяется уравнением

$$i\omega + \varkappa K_F(\omega)\,\lambda_0 = 0 \tag{1.21}$$

Будем рассматривать образцы пористой среды одинаковой формы, но с разными характерными размерами L. Видно, что величина λ_l будет зависеть от L простым образом: $\lambda_l(L) = \lambda_l(L_0)(L_0/L)^2$. Положим в уравнении (1.21) $\omega = iy$, $F(y) = K_F(iy)$, тогда (1.21) преобразуется к виду

$$\varkappa\lambda_0 = y/F(y) \tag{1.22}$$

Поскольку правая часть в уравнении (1.22) обращается в нуль при $y = 0$ и монотонно возрастает при малых положительных y, то уравнение (1.22) имеет действительное решение по крайней мере при достаточно больших L с асимптотикой

$$y_0 = \varkappa\lambda_0(L) + O(L^{-4}) = \varkappa\lambda_0(L_0)(L_0/L)^2 + O(L^{-4})$$

Соответствующее время релаксации

$$\tau_r = 1/y_0 \tag{1.23}$$

для достаточно больших L больше, нежели времена релаксации, возникающие от других решений уравнения (1.22) или от решений уравнения (1.20) при $l \neq 0$. Так как времена релаксации, возникающие при решении уравнения $K_F(\omega) = 0$, не зависят от L, то для больших образцов формула (1.23) дает ведущее время релаксации.

Обозначим $\tau' = (\varkappa\lambda_0)^{-1}$. Из (1.22) видно, что τ' совпадает с τ_r, когда $F \equiv 1$, т. е. когда внутренние релаксационные процессы в системе «пористая среда — жидкость» отсутствуют. Поэтому разность $\tau = \tau_r - \tau'$ характеризует степень отклонения режима фильтрации от упругого режима. Для больших образцов

$$\tau = -\int_0^\infty tK(t)\,dt + O(L^{-2}) \tag{1.24}$$

Итак, наблюдение процесса установления стационарного режима позволяет в принципе получить необходимую информацию для восстановления релаксационного ядра $K = K(t)$. Например, если наблюдать ведущий релаксационный процесс на образцах разных размеров, то из соотношения (1.22) можно получить функцию $F(y)$, а затем посредством аналитического продолжения получить функцию $K_F(\omega)$ и, следовательно, ядро $K(t)$. В более частном случае, когда известен общий функциональный вид ядра $K = K(t)$ с одним произвольным параметром, этот параметр может быть зафиксирован в результате экспериментального измерения параметра τ.

2. Для определения внутренних релаксационных характеристик системы «пористая среда — жидкость» были проведены эксперименты по установлению стационарного режима фильтрации ацетона и толуола в цилиндрическом образце, представляющем собой плотную упаковку молотого кварцевого песка. Длина образца $L = 5$ м, диаметр $d = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$ м, пористость $m = 0{,}222$. Перед заполнением жидкостью все узлы измерительной системы вместе с образцом пористой среды вакуумировались, жидкость предварительно дегазировалась. В обозначениях п. 1 здесь $n = 1$, $D = [0, L]$, $S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{L\}$. В эксперименте задавались: давление в S_1 и поток в S_2, измерялось давление $p(t)$ в S_2, которое экспоненциально приближалось к постоянному p_e.

Обработка экспериментальных зависимостей производилась методом Паде-аппроксимации изображения Лапласа функции $p(t)$ [9]. Результатом обработки являлось ведущее время релаксации τ_r. После выхода системы на стационарный режим определялась проницаемость k. Затем при учете выражения для спектра $\lambda_l = [\pi(2l+1)/(2L)]^2$ ($l = 0, 1, \ldots$) вычислялись величины τ' и τ. Эксперименты проводились при разных объемных расходах Q. Исходное давление во всех опытах равно $p_0 = 12{,}4$ МПа. Результаты приведены в таблице (первые три строки — для опытов с толуолом, последние три — с ацетоном).

$Q \cdot 10^8$, м³/с	p_e, МПа	$k \cdot 10^{15}$, м²	τ_r, с	τ', с	τ, с
0,083	12,8	13,0	700	91	609
1,67	19,3	13,3	760	89	671
3,33	26,4	13,1	800	90	710
6,67	27,4	13,6	666	44	622
3,40	20,1	13,5	614	44	570
0,22	12,9	13,6	604	44	560

Интересно, что во всех экспериментах получилось $\tau > 0$ (в отличие от (1.24)). Согласно (1.22) неравенство $\tau > 0$ возможно, только если

$$0 < F(1/\tau_r) < 1 \tag{2.1}$$

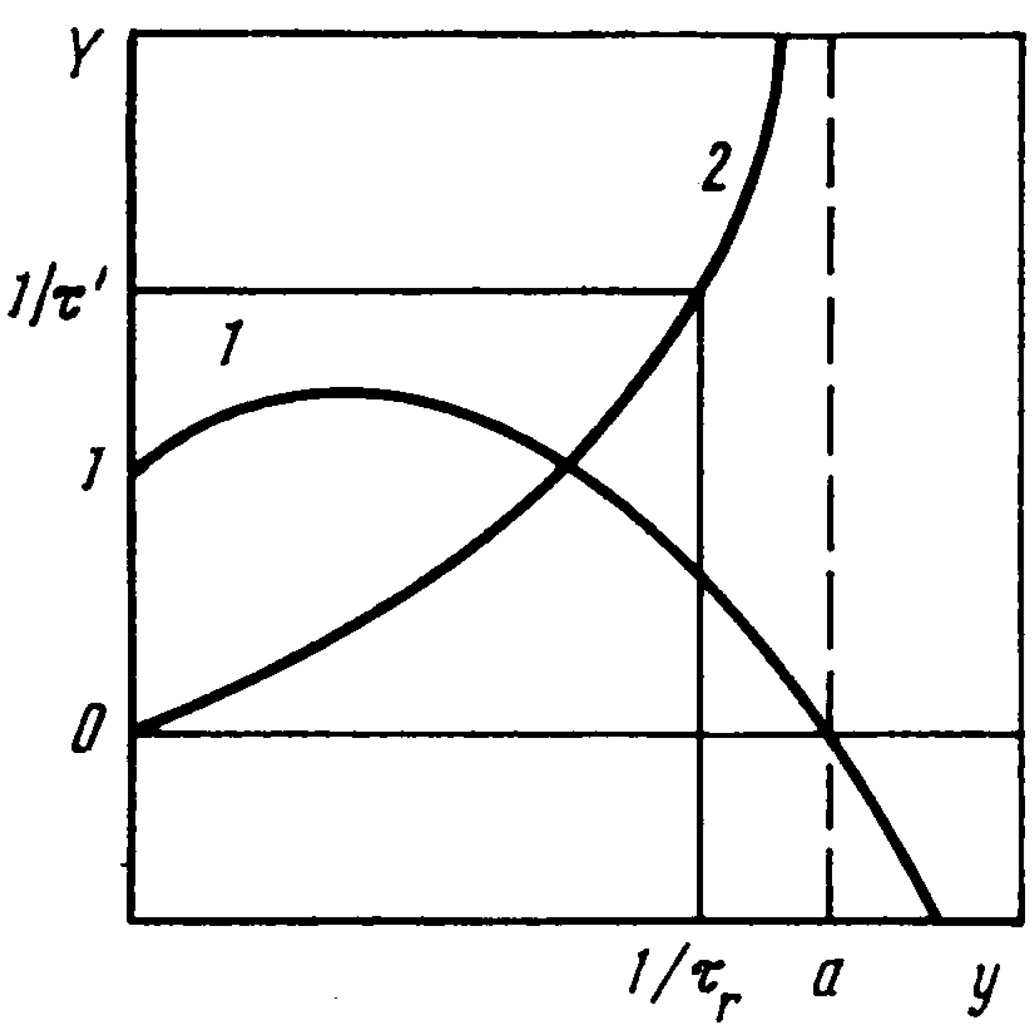
Рассмотрим простейшие релаксационные ядра, предложенные в [3]. В фурье-представлении они имеют вид

$$K_{1F}(\omega) = 1 + i\omega\tau_p;\ \tau_p > 0 \tag{2.2}$$

$$K_{2F}(\omega) = (1 + i\omega\tau_u)^{-1};\ \tau_u > 0 \tag{2.3}$$

$$K_{3F}(\omega) = (1 + i\omega\tau_p)(1 + i\omega\tau_u)^{-1};\ \tau_p,\ \tau_u > 0 \tag{2.4}$$

Ядро (2.2) формально совместимо с (2.1), причем при этом $\tau_p \equiv \tau$. Однако ядро (2.2) несовместимо с (1.6), т. е. с условием положительной определенности. Ядро (2.3) удовлетворяет всем общим условиям 1°—5°, предъявляемым к ядрам, но несовместимо с (2.1).



Формула (2.4) задает ядро, удовлетворяющее условиям 1°—5°, если $\tau_p < \tau_u$. При этом $F_3(y) = K_{3F}(iy)$ может удовлетворять неравенству (2.1) в области $y > 1/\tau_p$. Однако область $y > 1/\tau_p$ соответствует более быстрым релаксационным процессам, чем релаксационный процесс, обусловленный нулем функции $F_3 = F_3(y) : y_1 = 1/\tau_p$. Поэтому, если привлекать ядро (2.4) для интерпретации приведенных выше экспериментальных данных, необходимо просто положить $\tau_r = \tau_p$. Если еще при этом взять в соответствии с результатами [3] $\tau_u = 2\tau_p$, то параметры релаксационного ядра оказываются полностью определенными.

Такую интерпретацию результатов эксперимента на основе ядра (2.4) нельзя считать полностью удовлетворительной. В самом деле, она предполагает, что длина L пористого образца случайно оказалась в диапазоне, когда релаксация к установившемуся режиму фильтрации доминируется внутренними релаксационными процессами в системе «пористая среда — жидкость». Представляется более естественным предположить, что на некотором интервале $y \in (0, a)$, $a > 0$, функция $F = F(y)$ положительна,

$F(a) = 0$, и при $y \in [0, a)$ функция $H_1(y) = y/F(y)$ монотонно возрастает. Тогда ведущее время релаксации определяется уравнениями (1.22), (1.23).

Графическое решение уравнения (1.22) для выбранного вида функции $F = F(y)$ качественно представлено на фигуре, где кривым *1* и *2* соответствуют $F(y)$ и $y/F(y)$.

Если аппроксимировать $F = F(y)$ вблизи $y = a$ выражением $F(y) = -K_1(y - a)$, $K_1 > 0$, то уравнение (1.22) позволяет найти асимптотическое решение для малых L

$$\tau_r = a^{-1} + (K_1 a)^{-1}\tau' + O(L^4)$$

Полученных экспериментальных данных недостаточно, чтобы определить параметры K_1, a. Тем не менее, если считать, что использованный образец достаточно мал, следует сделать вывод, что $a \approx 1/\tau_r$.

Таким образом, проведенные теоретические и экспериментальные исследования указывают, что нестационарную фильтрацию жидкостей следует описывать средствами релаксационной теории фильтрации. Уравнения упругого режима для процессов с характерными временами порядка 10^3 с дают результаты, расходящиеся с экспериментом. Экспериментальные исследования показывают также, что фурье-образ релаксационного ядра должен на определенном интервале мнимой оси принимать значения, лежащие в интервале (0, 1). Последнее условие значительно сужает класс релаксационных ядер, имеющих физический смысл.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
2. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
3. *Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Штанин А. В.* Релаксационная фильтрация. Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1980. 136 с.
4. *Молокович Ю. М.* Основы релаксационной фильтрации // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 142—153.
5. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.
6. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 с.
7. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 1. Основные понятия и принципы. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 364 с.
8. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 798 с.
9. *Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.III.1988