Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 3, 1989

УДК 532.546

М. М. Алимов, Э. В. Скворцов

ОБ ОЦЕНКАХ РАСХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В развитие подхода, предложенного в [1, 2], показана возможность получения оценок расходных характеристик в случае пространственной стационарной линейной фильтрации несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. В качестве определяющих геометрических характеристик используются объем области фильтрации и площадь участка границы неопределенной формы (в плоском случае — площадь области и длина участка границы неопределенной формы). Выписаны соответствующие краевые задачи. Указаны подобласти области существования решения, в которой экстремальная оценка является оценкой снизу. Приводится пример.

Изложение ведется в терминах теории фильтрации. Ввиду известной аналогии между линейной фильтрацией и кондуктивной теплопроводностью все утверждения и выводы, касающиеся коэффициента продуктивности, переносятся на коэффициент теплоотдачи.

1. Рассмотрим установившуюся фильтрацию жидкости в области G с границей $\partial G = \Gamma \bigcup \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. Давление $p(x)$ удовлетворяет в G уравнению и краевым условиям

$$\operatorname{div}(k \nabla p) = 0 \tag{1.1}$$

$$p(\mathbf{x}) = P,\ \mathbf{x} \in \Gamma_1;\ p(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma_2;\ \partial p/\partial n = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma \tag{1.2}$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, P — перепад давления на входе и выходе фильтрационного потока ($P > 0$), $\mathbf{n}$ — вектор внешней по отношению к области G нормали к границе.

Пусть некоторый участок границы области имеет неопределенную конфигурацию. Обозначим через Φ и Ψ классы областей, имеющих такой участок на поверхности постоянного давления или непроницаемой поверхности соответственно. Пусть γ — гладкая без точек самопересечения поверхность, отвечающая некоторой конфигурации варьируемого участка, а γ^* — близкая к ней, вообще говоря, негладкая поверхность. Введем систему локальных ортогональных координат (ξ, η) на γ. Положение γ^* относительно γ аналитически задается непрерывной функцией $\delta n(\xi, \eta)$ алгебраической величины вектора приращения по нормали к γ. Условимся считать, что $\delta n > 0$, если указанный вектор совпадает по направлению с внешней к области G нормалью. Будем говорить, что поверхности γ и γ^* близки, если выполняется одно из двух условий

$$|\delta n| < \delta,\ |\nabla \delta n(\xi, \eta)| < \delta;\ |\delta n| < \delta,\ |\nabla\, \delta n(\xi, \eta)| < U \tag{1.3}$$

где величина U ограничена, δ — мала (в частности, меньше минимального радиуса кривизны поверхности γ). Поверхности, удовлетворяющие первому условию (1.3), будут удовлетворять и второму, так что последнее определяет более широкий класс поверхностей γ^*, который и будет подразумеваться всюду в дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев.

Будем предполагать также, что на краях поверхности γ выполняется одно из двух условий: либо поверхность γ перпендикулярна поверхности, с которой она граничит, либо δn (ξ, η) в таких точках равна нулю. Тогда γ^* вместе с заданной частью границы ∂G образует замкнутую без точек самопересечения поверхность и тем самым определяет некоторую физическую область течения G^*. Функцию распределения давления, удовлетворяющую в этой области уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2), обозначим $p^*(\mathbf{x})$.

Определим общий вид приращения коэффициента продуктивности C в зависимости от изменения конфигурации участка γ.

Утверждение 1. При оговоренных выше допущениях вариация функционала $C[\gamma]$ в классе областей Φ может быть представлена в следующем виде:

$$\delta C = -\int\limits_{\gamma} k \left| \frac{\nabla p}{P} \right|^2 \left[\delta n - \left(\varkappa + \frac{\partial \ln k}{\partial n} \right) \delta n^2 \right] d\sigma + + \int\limits_{G^*} k \left| \frac{\nabla \delta p}{P} \right|^2 dV + o(\delta^2), \quad \delta p = p^*(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

где $\varkappa$ — кривизна дуги γ при плоском или средняя кривизна поверхности γ при пространственном течении.

Доказательство проведем для пространственного течения. Аналогично [1] введем вспомогательный функционал

$$J[\gamma] = \int\limits_{G} k \,|\nabla p|^2 \,dV \tag{1.5}$$

где $p(\mathbf{x})$ удовлетворяет краевой задаче (1.1), (1.2). Применив к нему формулу Грина при учете (1.2), можно убедиться, что $J[\gamma] = P^2 C[\gamma]$. Таким образом, достаточно определить вид вариации функционала (1.5) при сохранении перепада давления.

Пусть функция $p(\mathbf{x})$ аналитически продолжима через поверхность γ и, следовательно, удовлетворяет уравнению (1.1) всюду в области G^*. Тогда указанная вариация функционала (1.5) представима в виде (далее $R = (G^* \setminus G) \cup (G \setminus G^*)$)

$$(\delta J)_p = \pm \int\limits_{R} k\,|\nabla p|^2 \,dV - \int\limits_{G^*} k\,|\nabla \delta p|^2 \,dV + 2 \int\limits_{G^*} k \nabla p^* \nabla \delta p \,dV \tag{1.6}$$

Здесь и далее знак плюс относится к области $G^* \setminus G$, минус — к области $G \setminus G^*$. Применив к последнему интегралу в (1.6) формулу Грина, найдем, что он будет равен $2\,(\delta J)_p$. Следовательно

$$(-\delta J)_p = \pm \int\limits_{R} k\,|\nabla p|^2 \,dV - \int\limits_{G^*} k\,|\nabla \delta p|^2 \,dV \tag{1.7}$$

Введем прямолинейную координату ζ, отсчитываемую от γ в направлении нормали n. Очевидно, совокупность (ξ, η, ζ) образует локальную ортогональную систему координат. Ненулевые компоненты метрического тензора в такой системе будут иметь вид

$$g_{11} = g_{11}^\circ (1 + \varkappa_1 \zeta)^2, \quad g_{22} = g_{22}^\circ (1 + \varkappa_2 \zeta)^2, \quad g_{33} = 1 \tag{1.8}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — кривизны линий $\eta = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ на поверхности γ; g_{11}° и g_{22}° — компоненты метрического тензора на поверхности γ, задающие ее внутреннюю геометрию [3].

Записывая дифференциальный оператор (1.1) в данной системе координат, найдем, что на γ $\partial\,|\nabla p|\,/\,\partial\zeta = -\,|\nabla p|\,(\varkappa + \partial \ln k/\partial\zeta)$, где $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ — средняя кривизна поверхности γ.

Будем предполагать, что функции $k(\mathbf{x})$ и $|\nabla p(\mathbf{x})|$ в окрестности γ аналитичны по переменной ζ и, следовательно, разложимы в ряд Тейлора. Учитывая это, а также тот факт, что в окрестности γ справедливо равенство $dV = (1 + \varkappa_1\zeta)(1 + \varkappa_2\zeta)\,d\sigma\,|d\zeta|$, проинтегрируем первые два интеграла в (1.7) по ζ от 0 до δn, после чего убедимся в справедливости формулы (1.4).

Замечание 1. Если рассматривается вариация функционала $C[\gamma]$ в классе областей Ψ, то последний интеграл в (1.6) будет равен нулю. Таким образом, вариация функционала (1.5) в этом случае имеет вид, отличающийся от (1.7) только противоположным знаком. Все остальные рассуждения доказательства остаются в силе, поэтому и окончательный вид приращения коэффициента продуктивности в этом случае отличается от (1.4) только противоположным знаком.

Во вторую вариацию функционала $C[\gamma]$ входит интеграл по области G^*, который не удается выразить через δn и параметры течения, соответствующего γ. Вместе с тем можно получить некоторые оценки.

Утверждение 2. Для интеграла по области G^*, входящего в (1.4), имеет место следующая оценка:

$$\int\limits_{G^*} k \left| \frac{\nabla \delta p}{P} \right|^2 dV \geqslant \int\limits_{\gamma} k \left| \frac{\nabla p}{P} \right|^3 \delta n^2 \, d\sigma \tag{1.9}$$

Доказательство. Разобьем поток, соответствующий конфигурации γ^*, непроницаемыми поверхностями на множество тонких трубок тока, соответствующих течению с конфигурацией γ варьируемого участка. Коэффициент продуктивности такого течения C', равный сумме коэффициентов продуктивности течений в каждой отдельно взятой трубке, будет не больше действительного C^* [4]. Припишем каждой трубке тока свой номер и рассмотрим, например, i-ю трубку.

Пусть G_i и G_i^* — части областей G и G^*, а γ_i и γ_i^* — участки поверхностей γ и γ^*, отсекаемые трубкой; $\Delta\sigma_i$ и $\Delta\sigma_i^*$ — площади этих участков, $p_i(\mathbf{x})$ и $p_i^*(\mathbf{x})$ — давления, а C_i и C_i^* — коэффициенты продуктивности областей G_i и G_i^* соответственно. Используя утверждение 1 и учитывая малость $\Delta\sigma_i$, найдем

$$\delta C_i = -k \left| \frac{\nabla p}{P} \right|^2 \left[\delta n - \left(\varkappa + \frac{\partial \ln k}{\partial n} \right) \frac{\delta n^2}{2} \right] \Bigg|_{\gamma_i} \Delta\sigma_i +$$

$$+ \frac{k}{P^2} \delta p_i \delta \left(\frac{\partial p_i}{\partial n} \right) \Bigg|_{\gamma_i^*} \Delta\sigma_i^* + o(\delta^2) + o(\Delta\sigma_i) \tag{1.10}$$

Последнее слагаемое получено после перехода от соответствующего интеграла в (1.4) по области G_i^* к контурному интегралу по ∂G_i^* и учета граничных условий. Преобразуем это слагаемое. Функцию $p_i(\mathbf{x})$ разложим в ряд Тейлора по переменной ζ. Учтем, что вследствие несжимаемости жидкости $\delta(\partial p_i/\partial n)\,\Delta\sigma_i^* = -P\delta C_i$ на γ_i^*. Используя с точностью до величин порядка δ выражение (1.10), получим

$$\frac{k}{P^2} \delta p_i \delta \left(\frac{\partial p_i}{\partial n} \right) \Bigg|_{\gamma_i^*} \Delta\sigma_i^* = k \left| \frac{\nabla p_i}{P} \right|^3 \delta n^2 \Bigg|_{\gamma_i} \Delta\sigma_i + o(\delta^2)$$

Подставляя это соотношение в (1.10) и производя суммирование по i в пределе при $\Delta\sigma_i \to 0$, найдем

$$C' - C = \delta C - \int\limits_{G^*} k \left| \frac{\nabla \delta p}{P} \right|^2 dV + \int\limits_{\gamma} k \left| \frac{\nabla p}{P} \right|^3 \delta n^2 \, d\sigma + o(\delta^2)$$

Учитывая, что $\delta C \geqslant C' - C$, сравним последнее выражение с (1.4), после чего убедимся в справедливости оценки (1.9).

Фиксируя ту или иную интегральную геометрическую характеристику области и тем самым задавая некоторый подкласс областей из Φ или Ψ, можно рассматривать изопериметрические задачи на экстремум коэффициента продуктивности в этом подклассе. Вид второй вариации коэффициента продуктивности в (1.4) при учете оценки (1.9) позволяет в отдельных случаях судить о характере экстремума.

2. Возьмем в качестве определяющей геометрической характеристики объем (при плоском течении — площадь) V области фильтрации. Приращение его как функционала конфигурации участка γ с учетом (1.8) можно записать в виде

$$\delta V = \pm \int\limits_{R} (1 + \varkappa_1 \zeta)(1 + \varkappa_2 \zeta)\, d\sigma \, |d\zeta|$$

После интегрирования по ζ от 0 до δn получим

$$\delta V = \int_{\gamma} \left(\delta n + \varkappa \frac{\delta n^2}{2}\right) d\sigma \tag{2.1}$$

Рассмотрим задачу на экстремум коэффициента продуктивности в классе областей Φ, имеющих фиксированный объем. Она относится к числу изопериметрических, сводящихся, как известно, к задаче на абсолютный экстремум некоторого функционала, в данном случае $C + \lambda V$, где λ — неопределенная постоянная. Необходимым условием его экстремума является равенство нулю первой, а достаточным — еще и сильная положительность второй вариации. Учитывая это, из (1.4), (2.1) приходим к краевой задаче (1.1), (1.2) с дополнительным условием на неизвестной части границы

$$k \mid P^{-1} \nabla p \mid^2 = \lambda, \ \mathbf{x} \in \gamma \tag{2.2}$$

Если ее решение существует и найденная в результате конфигурация γ удовлетворяет условию

$$\varkappa + \mid P^{-1} \nabla p \mid + \partial \ln k / \partial n > 0 \tag{2.3}$$

то обеспечивается локальный минимум коэффициента продуктивности в классе областей Φ, имеющих фиксированный объем.

Для плоского случая эта задача была сформулирована в работе [1]. В работе [2] была дана ее формулировка для широкого класса законов пространственной фильтрации; следует отметить, что при этом на классе областей фиксированного объема реализуется экстремум функционала, вообще говоря, не равного коэффициенту продуктивности.

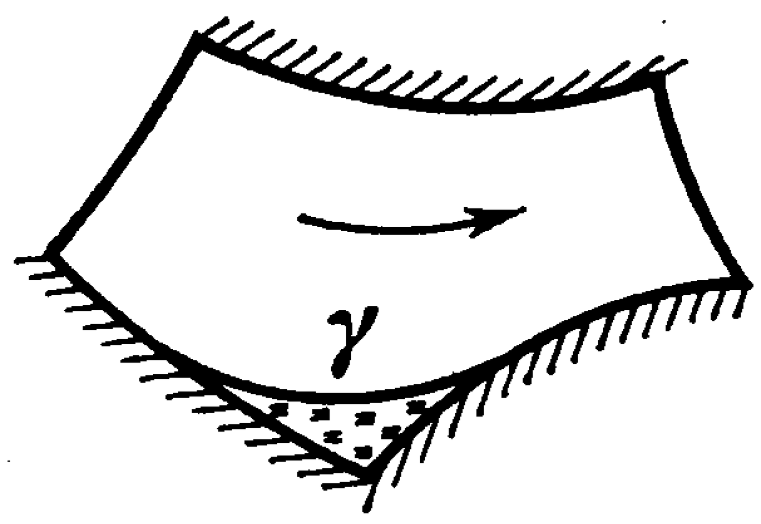
В работе [2] при $k =$ const и плоском течении было получено условие более жесткое чем (2.3), и указан класс плоских задач, для которых краевая задача (1.1), (1.2), (2.2) эффективно решается. Задачи для усложненной геометрии течения и степенного закона фильтрации рассмотрены в [5].

Замечание 2. Если рассматривать задачу на экстремум коэффициента продуктивности в классе областей, принадлежащих Ψ и имеющих фиксированный объем, то, вводя функционал $C—\lambda V$, также придем к задаче (1.1), (1.2), (2.2) с неизвестным участком границы $\gamma \in \Gamma$. Если решение существует и найденная в результате конфигурация γ всюду выпукла по отношению к области, то при этом реализуется локальный максимум коэффициента продуктивности с заданного объема (см. замечание 1); вместе с тем ввиду свойства взаимности изопериметрических задач при фиксированном коэффициенте продуктивности реализуется локальный минимум объема области фильтрации.

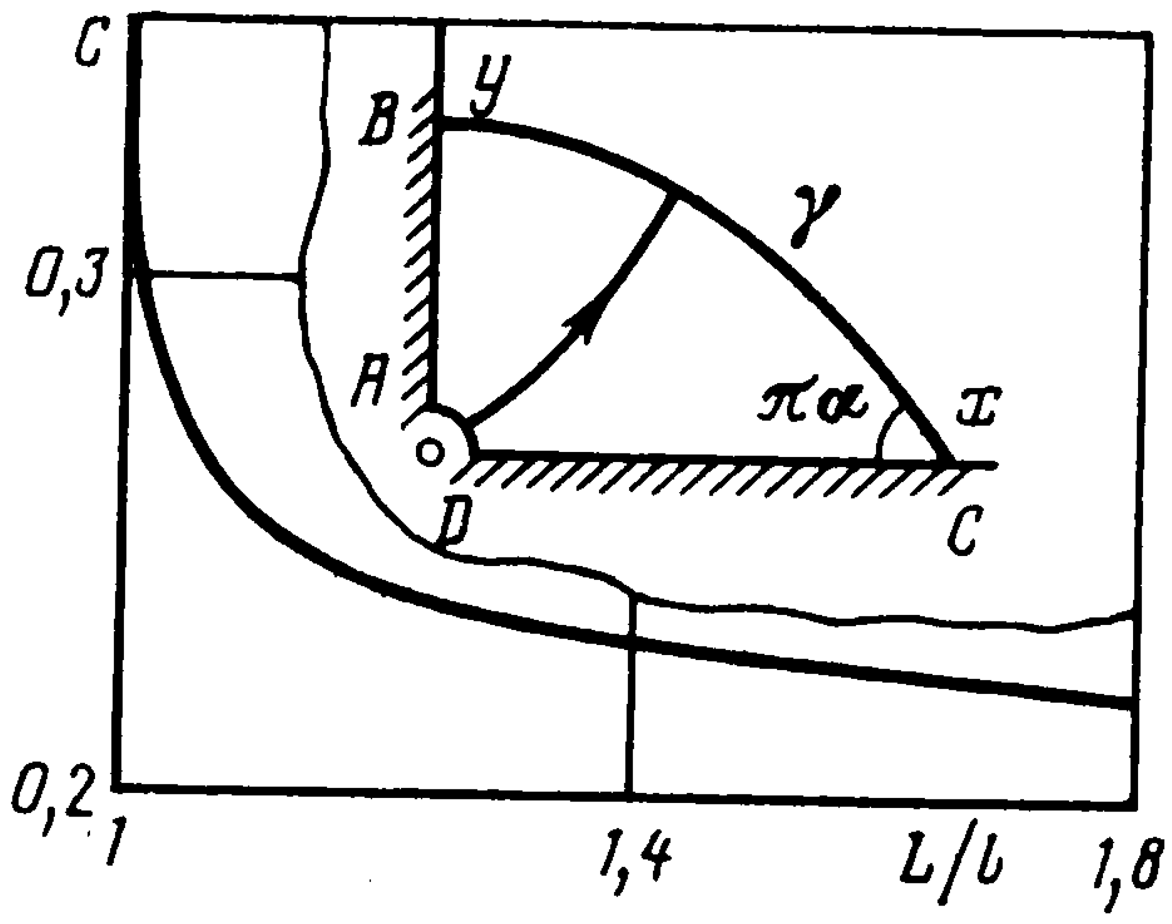
Было высказано [4] предположение, что находимая при помощи модели фильтрации жидкости с начальным градиентом [6, 7] «...оценка потерь нефти по объему предельно-равновесных целиков — это оценка сверху». Замечание 2 позволяет его обосновать. Пусть имеется плоская область G с известными границами, из которой вязкопластическая жидкость (нефть) вытесняется вязкой (водой) при $k =$ const. Предположим, течение установилось и вблизи какой-то части непроницаемой границы остался целик нефти неизвестной конфигурации (фиг. 1). В упомянутой модели граница целика находится из условий

$$\mid \nabla p \mid \geqslant \tau_0, \ \mathbf{x} \in G; \ \mid \nabla p \mid = \tau_0, \ \mathbf{x} \in \gamma \tag{2.4}$$

где γ — граница целика, τ_0 — начальный градиент. Очевидно, что краевая задача (1.1), (1.2), (2.4) совпадает с задачей (1.1), (1.2), (2.2). Дополнительное условие из (2.4), накладываемое на $\mid \nabla p \mid$ в области G, приводит к необходимому условию выпуклости границ целика по отношению к области [8]. Но тогда из замечания 2 следует, что решение этой задачи реализует при фиксированном C локальный минимум площади области, охваченной фильтрационным потоком, и, таким образом, позволяет по известному коэффициенту продуктивности оценить сверху потери нефти в целиках (при этом τ_0 — определяемый в ходе решения задачи параметр). Можно показать, что ука-



Фиг. 1



Фиг. 2

занная оценка остается оценкой сверху и в случае таких вариаций γ, при которых точки соприкосновения ее с заданной непроницаемой границей смещаются вдоль последней от целика и замечание 2 уже неприменимо.

3. Возьмем в качестве определяющей геометрической характеристики площадь (при плоском течении — длину) Σ варьируемого участка γ границы области. Найдем вид приращения Σ как функционала конфигурации γ. Записывая на поверхности γ^* риманову метрику $(dl)^2 = g_{11}(d\xi)^2 + g_{22}(d\eta)^2 + g_{33}(d\zeta)^2$, с учетом того, что при этом $\zeta = \delta n(\xi, \eta)$, найдем ненулевые компоненты метрического тензора $G_{ij}{}^\circ$, задающего ее внутреннюю геометрию в локальных координатах

$$G_{11}{}^\circ = g_{11} + g_{33}\delta n_\xi{}^2\,|_{\zeta=\delta n}, \quad G_{22}{}^\circ = g_{22} + g_{33}\delta n_\eta{}^2\,|_{\zeta=\delta n}$$
$$G_{12}{}^\circ = G_{21}{}^\circ = g_{33}\delta n_\xi \delta n_\eta\,|_{\zeta=\delta n} \tag{3.1}$$

Приращение площади Σ варьируемого участка γ представимо в виде [3]

$$\delta\Sigma = \int\limits_\Omega \left[\sqrt{G_{11}{}^\circ G_{22}{}^\circ - G_{12}{}^\circ G_{21}{}^\circ} - \sqrt{g_{11}{}^\circ g_{22}{}^\circ}\right] d\xi\, d\eta$$

где Ω — область в плоскости (ξ, η), соответствующая участку γ границы области. Считая справедливым первое из условий (1.3) и используя (3.1), найдем

$$\delta\Sigma = \int\limits_\gamma \left[\varkappa\delta n + \frac{1}{2}|\nabla\delta n(\xi, \eta)|^2\right] d\sigma + o(\delta^2) \tag{3.2}$$

Рассмотрим задачу на экстремум коэффициента продуктивности в классе областей из Φ, имеющих заданную площадь (длину) варьируемого участка границы. Рассуждая аналогично п. 2, приходим к краевой задаче (1.1), (1.2) с дополнительным условием на свободном участке границы

$$k\,|\,P^{-1}\nabla p\,|^2 = \lambda\varkappa, \quad \mathbf{x} \in \gamma \tag{3.3}$$

При этом на основании (1.4), (3.2) можно утверждать, что достаточным условием минимума C при фиксированном Σ является выпуклость свободного участка границы. В случае фильтрации жидкости в однородной пористой среде краевая задача (1.1), (1.2), (3.3) математически эквивалентна задачам теории струй идеальной жидкости при учете капиллярных сил. Эффективные методы их решения для плоских течений описаны в [9, 10].

Рассмотрим в качестве примера задачу об изоляции бесконечно длинного тонкого проводника тепла круглого сечения радиуса r однородным материалом единичной теплопроводности с поверхностью, симметричной относительно осей x и y, в постановке (1.1), (1.2), (3.3). Четвертая часть сечения проводника и изоляции изображена в верхней части фиг. 2.

Пусть l — ширина изоляции AC, L — длина дуги BC. Для корректной постановки задачи необходимо потребовать, чтобы точка B была точкой гладкости, а точка C, вообще говоря, точкой излома, где касательная к границе скачком поворачивается на некоторый угол $2\pi\alpha$.

Найдем сначала решение задачи об изоляции точечного источника тепла (граница AD стягивается в точку A при сохранении расхода). Введем комплексный потенциал теплового потока $W = -t + i\psi$, параметрическую комплексную переменную u, изменяющуюся в полукруге $|u| < 1$, $\operatorname{Im} u \geqslant 0$ (точкам A, B, C отвечает $u = 1, -1, 0$), и вспомогательную функцию Мак-Леода [10]

$$\omega(z) = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^{z} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz + i$$

Учитывая вид областей изменения ω и W, конформными отображениями найдем

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{2(1-\alpha)\sin(\pi\alpha)\,u^{\alpha}}{(u^{\alpha}-u)^2}, \qquad \frac{dW}{du} = \frac{2q}{\pi\sqrt{u}\,(u-1)}$$

после чего геометрия области восстанавливается квадратурой. Связь безразмерной длины дуги BC с параметром α определяется формулой

$$\frac{L}{l} = \frac{2\pi(1-\alpha) + \sin 2\pi\alpha}{2[\sin\pi\alpha + \pi(1-\alpha)\cos\pi\alpha]}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Отсюда вытекает, что задача разрешима при $L/l \leqslant 2$.

Вернемся теперь к исходной задаче. Границе AD в области изменения u соответствует дуга окружности с центром в точке $u = 1$ малого по сравнению с единицей радиуса ρ

$$\rho = (r/l)[1 + \pi(1-\alpha)\operatorname{ctg}\pi\alpha](1-\alpha)^{-2} + o(r/l)$$

Искомый коэффициент теплоотдачи представляется выражением

$$C = (\pi/2)[\ln(\rho/4)^{-1} + O(r/l)]^{-1}$$

Зависимость C от L/l при $r/l = 10^{-3}$ изображена на фиг. 2.

Покажем, как можно находить нижние оценки коэффициента теплоотдачи описанного проводника в случае, когда сечение G изоляции имеет произвольную конфигурацию. Одну такую оценку можно получить, измерив площадь области G и определив расход в задаче с расположением изоляции в виде концентрического с проводником круга этой площади. Чтобы получить другую оценку, проведем симметризацию области G относительно двух взаимоперпендикулярных осей (при этом расходные характеристики не увеличиваются [4]). Выбирая бóльшую из полуосей полученного овала за характерную длину l и определяя четверть его периметра, по графику фиг. 2 найдем нижнюю оценку величины C.

Рассмотрим подробнее случай, когда область G — эллипс, а проводник расположен в его центре. Фильтрационной трактовке соответствует задача о течении от скважины радиуса r к эллиптическому контуру питания. Пусть для определенности отношение полуосей равно 0,1. Выберем большую полуось за характерное расстояние l. Тогда при $r/l = 10^{-3}$ найдем [11] значение коэффициента $C = 0{,}31$ и его нижнюю оценку по площади эллипса $C \geqslant 0{,}27$. По графику фиг. 2 получим оценку по периметру эллипса $C \geqslant 0{,}29$. Она оказалась точнее. Это объясняется тем, что во второй оценке помимо интегральной характеристики области (периметра) была учтена ширина изоляции.

При необходимости вторую оценку можно улучшить, если использовать дополнительную информацию о длине h отрезка AB (верхняя часть фиг. 2). Для этого рассмотренную задачу следует решать в более общей постановке, считая B точкой излома, в которой касательная скачком поворачивается на некоторый угол, определяемый заданием величины h.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костерин А. В., Скворцов Э. В.* Об оценке минимального расхода по заданной площади области фильтрации // Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. Вып. 6. С. 47—57.
2. *Ентов В. М., Костерин А. В., Скворцов Э. В.* Об оценках расхода фильтрационного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 80—87.
3. *Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 431 с.

4. *Баренблатт Г. И.*, *Ентов В. М.*, *Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
5. *Алимов М. М.*, *Скворцов Э. В.* Наименьший расход при заданной площади области фильтрации // Инж.-физ. журн. 1987. Т. 52. № 4. С. 633—637.
6. *Алишаев М. Г.*, *Вахитов Г. Г.*, *Гехтман М. М.*, *Глумов И. Ф.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 166—169.
7. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР / Под ред. Кочиной П. Я. М.: Наука, 1969. 545 с.
8. *Котляр Л. М.*, *Скворцов Э. В.* Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 141 с.
9. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 536 с.
10. *McLeod E. B.* The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension // J. Rat. Mech. Anal. 1955. V. 4. № 4. P. 557—567.
11. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

Казань

Поступила в редакцию
15.VIII.1988