

УДК 532.546

Э. Н. Береславский

ОТЖИМ ПРЕСНОЙ ВОДОЙ СОЛЕНОЙ ВОДЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КРОВОГО ОРОСИТЕЛЯ

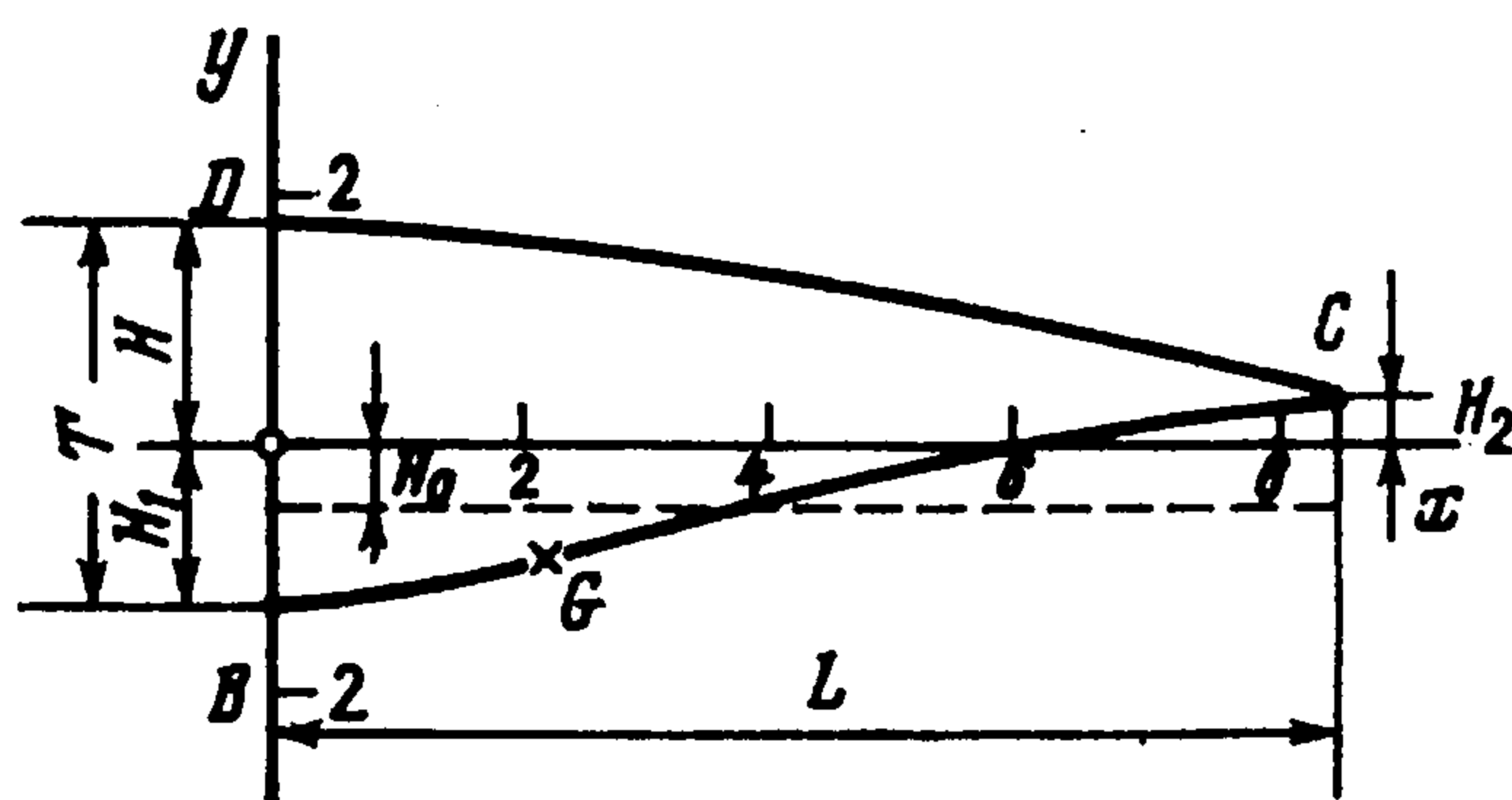
Методом П. Я. Полубариновой-Кочиной [1], основанным на применении аналитической теории дифференциальных уравнений, исследуется вопрос о возможных размерах линзы пресных вод, образующейся при фильтрации из кротового оросителя. Задача сводится к исследованию обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса, при интегрировании которого возникают принципиальные трудности. Они обусловлены прежде всего тем, что указанное уравнение принадлежит малоизученному классу, а также тем, что коэффициенты уравнения содержат неизвестные параметры, определение которых является одной из основных и наиболее трудных задач всей теории.

Предлагается способ построения интегралов и определения неизвестных постоянных для одного класса фуксовых уравнений с четырьмя особыми точками, причем решение получено через элементарные функции. Показано, что в рассматриваемом случае аналогичные результаты дает и метод Фурье [1, 2]. Приводятся результаты численных расчетов и анализа влияния определяющих физических параметров схемы на фильтрационные характеристики.

Достаточно полная библиография работ, посвященных изучению различных математических моделей внутрипочвенного орошения, содержится в обзоре [3].

1. Постановка задачи. В линзе пресных вод, сформированной в однородном и изотропном почвенном слое над покоящимися солеными грунтовыми водами, происходит плоская установившаяся фильтрация из кротового оросителя. Поступление вод в линзу компенсируется их испарением со свободной поверхности с постоянной интенсивностью ε ($\neq 0$), отнесенной к коэффициенту фильтрации грунта.

При первоначальном рассмотрении ороситель заменим точечным источником, расположенным в точке A . Ввиду симметрии достаточно ограничиться правой половиной области движения $z = x + iy$, изображенной на фиг. 1. Задача состоит в определении кривой депрессии CD



Фиг. 1

и линии раздела BC при следующих краевых условиях:

$$AB: x = 0, \quad \psi = 0; \quad BC: \varphi - \rho y = H + (1 + \rho) H_2, \quad \psi = 0 \quad (1.1)$$

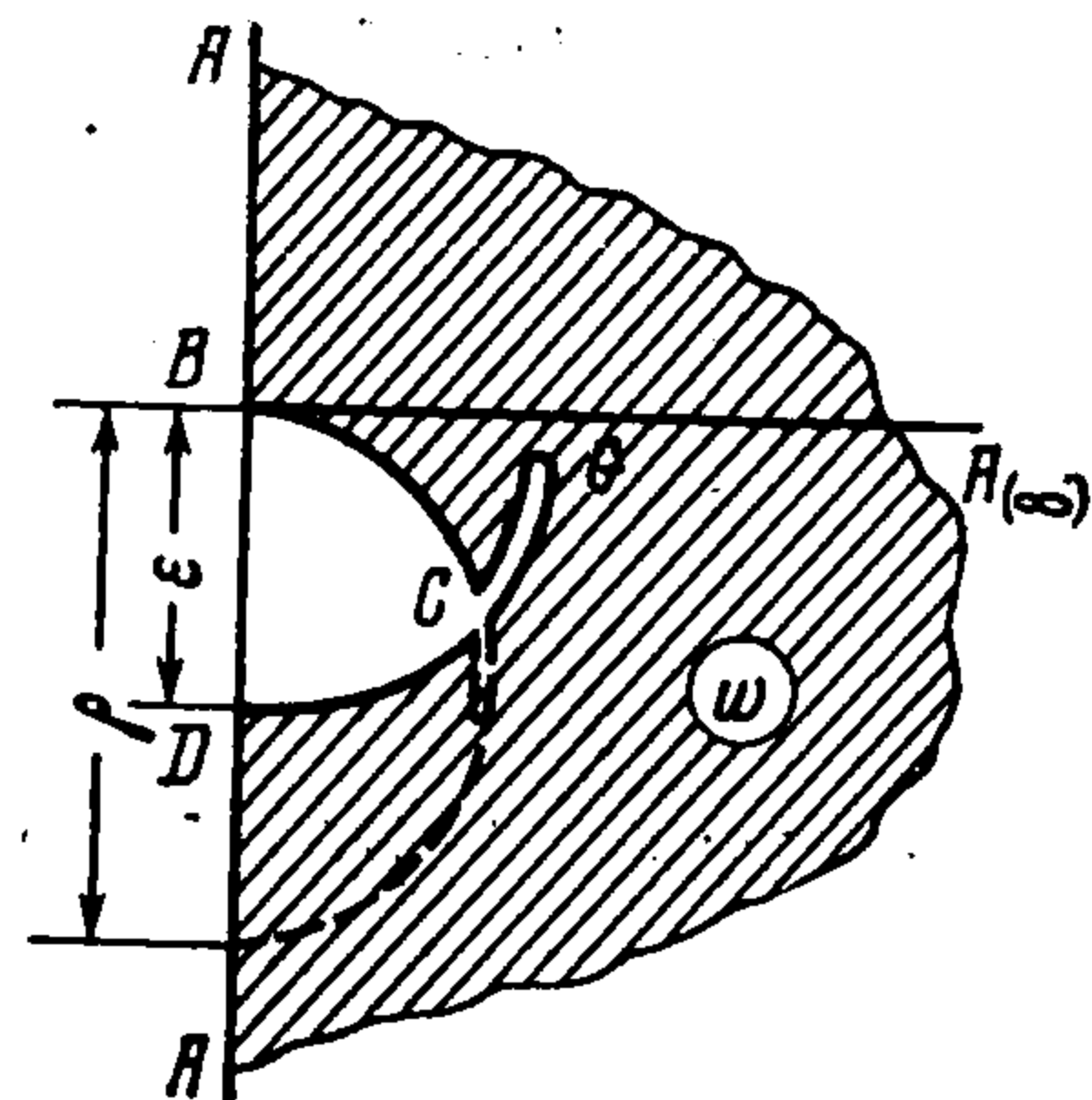
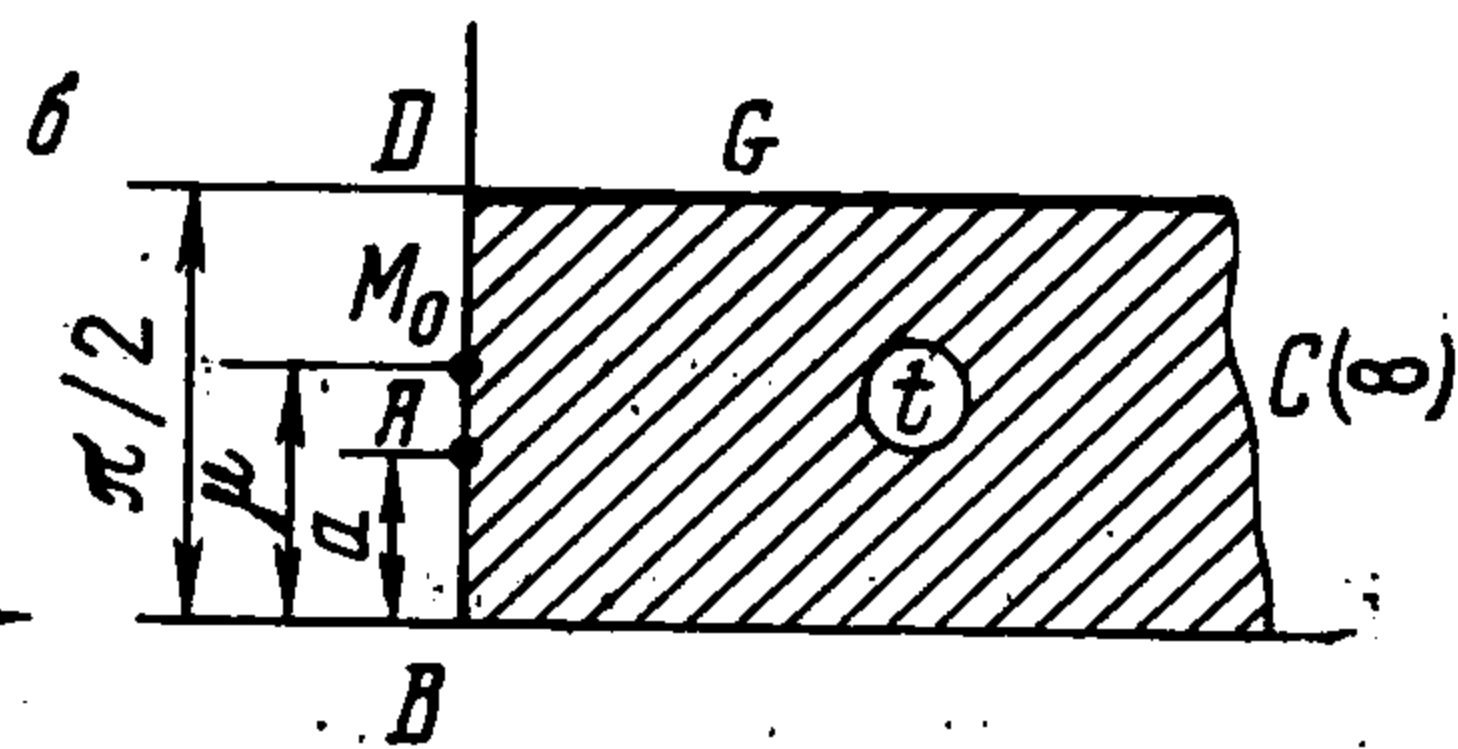
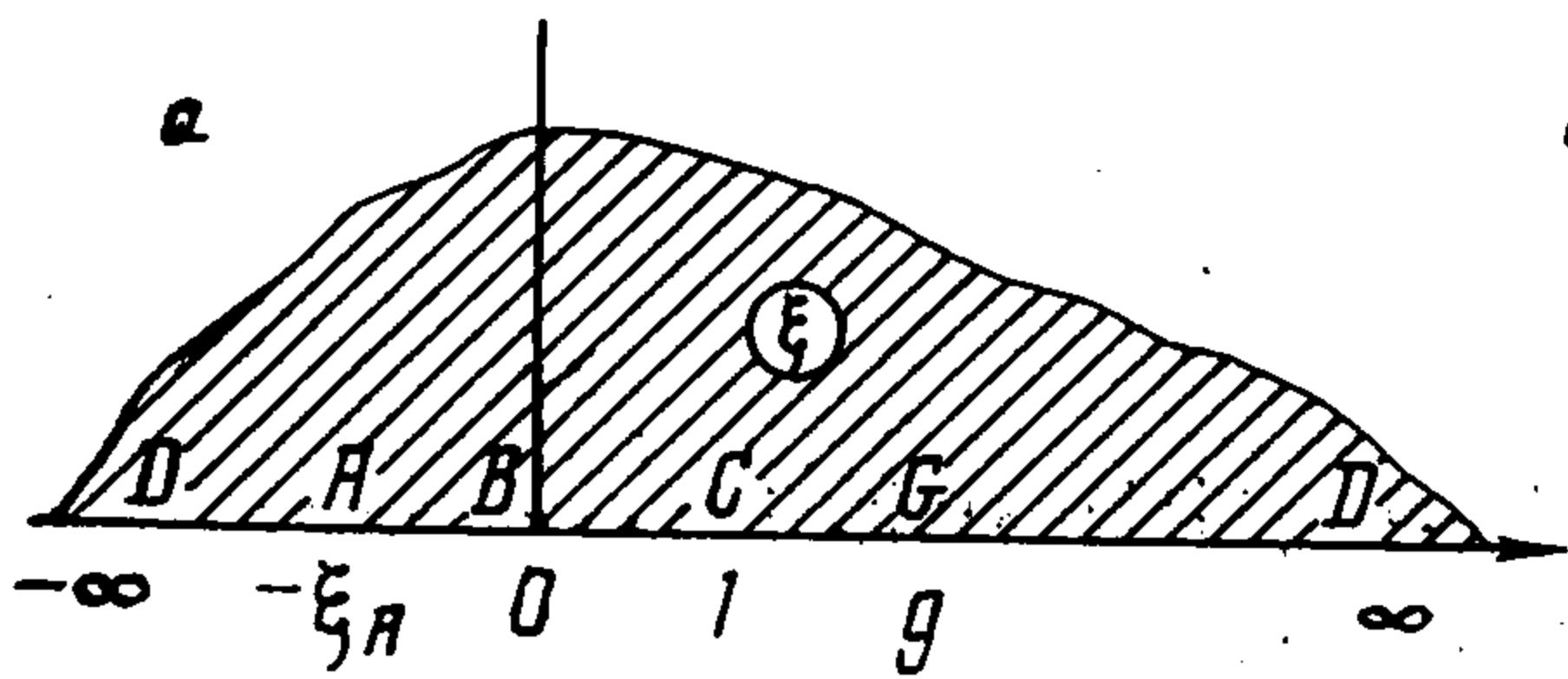
$$CD: \varphi + y = H, \quad \psi + \varepsilon x = 1/2 Q; \quad AD: x = 0, \quad \psi = 1/2 Q$$

$$\rho = \rho_2 / \rho_1 - 1, \quad \rho > \varepsilon$$

Здесь φ и ψ — гармонические внутри области z взаимно сопряженные функции: потенциал скорости и функция тока, отнесенные к коэффициенту фильтрации грунта, ρ_1 и ρ_2 — плотности пресных и соленых вод, Q — искомый фильтрационный расход оросителя на единицу его длины, отнесенный к коэффициенту фильтрации.

Полагая во втором условии для участка CD $x = L$, получим

$$Q = 2\varepsilon L \quad (1.2)$$



Фиг. 2

Фиг. 3

Это соотношение выражает равенство расхода из оросителя величине испарения со свободной поверхности в условиях установившейся фильтрации.

Вводится вспомогательная переменная $\xi = \zeta + i\eta$ и функции: $z(\xi)$, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на область z (соответствие точек указано на фиг. 2, а), комплексная скорость $w = d\omega/dz$, а также

$$F(\xi) = d\omega/d\xi, \quad Z(\xi) = dz/d\xi \quad (1.3)$$

2. Построение функции w . На фиг. 3 изображена область изменения комплексной скорости, соответствующая крайевым условиям (1.1). Эта область представляет собой круговой четырехугольник $BCGD$ с прямыми углами при вершинах B и D , углом $\pi\nu = \arccos[(2\varepsilon + \rho\varepsilon - \rho)/(\rho(1 + \varepsilon))]$ при вершине C так, что $z_C = [\sqrt{\varepsilon(\rho + 1)(\rho - \varepsilon)} - i\varepsilon]/(\rho + 1 - \varepsilon)$, и углом 2π при вершине разреза G .

Известно [1, 4], что задача о конформном отображении кругового четырехугольника на верхнюю полуплоскость тесно связана с некоторым линейным дифференциальным уравнением второго порядка класса Фукса с четырьмя особыми точками. В рассматриваемом случае это уравнение имеет вид

$$v'' + \left(\frac{1}{2\xi} + \frac{1-\nu}{\xi-1} - \frac{1}{\xi-g} \right) v' + \frac{\nu(1+\nu)\xi - \lambda}{4\xi(\xi-1)(\xi-g)} v = 0 \quad (2.1)$$

Известно также [1, 4], что при интегрировании уравнений подобного типа возникают трудности принципиального характера, связанные с тем, что коэффициенты уравнения (2.1) кроме неопределенной величины g содержат еще и так называемый аксессуарный параметр λ , также не известный заранее. Эти параметры, которые не удается полностью определить по заданному четырехугольнику, нужно находить одновременно с построением интегралов, и до настоящего времени не существует достаточно общего и удобного метода их определения. Поэтому для изучения свойств интегралов приходится прибегать к различным косвенным приемам. Здесь прежде всего следует отметить работы [5, 6], в которых для построения некоторых решений применялась задача линейного сопряжения.

Покажем, что в рассматриваемом случае уравнение (2.1) допускает непосредственное нахождение решений, причем через элементарные функции. В уравнении (2.1) сделаем замену переменных

$$\xi = \text{th}^2 t \quad (2.2)$$

которая переводит верхнюю полуплоскость ξ^* в полуполосу $u > 0$, $0 < v < \pi/2$ плоскости $t = u + iv$ (фиг. 2, б), и будем искать решение по-

лученного уравнения в виде

$$v_1 = (C_1 \operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + C_2 \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt) / \operatorname{ch} t^{1+v} \quad (2.3)$$

где C_1, C_2 — некоторые не обращающиеся одновременно в нуль произвольные постоянные. Можно убедиться, что результат подстановки (2.3) в преобразованное уравнение (2.1) тождественно обращается в нуль, если выполняются следующие два условия:

$$gv [(v - 1) C_1 + 2C_2] - \lambda C_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$g (2 + v - v^2) C_2 - \lambda C_2 = 2 (C_2 - v C_1)$$

Из этой системы находим искомые параметры g и λ .

Аналогично строится второе линейно независимое решение

$$v_2 = (C_1 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C_2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt) / \operatorname{ch} t^{1+v} \quad (2.5)$$

Функция, конформно отображающая полуполосу плоскости t на круговой четырехугольник плоскости w , должна выражаться через отношение линейных комбинаций решений v_1 и v_2 . Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием точек B, C и D на плоскостях t и z , то получим

$$w = \gamma \rho f_1(t) / f_2(t), \quad f_1(t) = \operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + \\ + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt, \quad f_2(t) = \operatorname{ch} t (\operatorname{ch} vt + i\gamma \operatorname{sh} vt) + \\ + C \operatorname{sh} t (\operatorname{sh} vt + i\gamma \operatorname{ch} vt) \quad (2.6)$$

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon / [(\rho + 1)(\rho - \varepsilon)]}, \quad C = \operatorname{ctg} a (1 - \gamma \operatorname{tg} va) / (\gamma + \operatorname{tg} va)$$

Анализ выражения (2.6) показывает, что функция w достигает своего экстремума на стороне CD четырехугольника при $\lambda^{-1} < C < -1$ или $0 < C < 1$, что соответствует $g > 1$ (этому случаю отвечает разрез, изображенный на фиг. 3). При $-1 < C < -\lambda$ или $C > 1$ параметр $g < 1$ и экстремум функции w достигается на стороне BC (этому случаю соответствует штриховой разрез на фиг. 3).

Отметим, что если рассматривать уравнения (2.4) как систему относительно C_1 и C_2 , то для того чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$\Delta = \lambda^2 - 2\lambda [1 + g(v^2 - v - 1)] + v(1 + v)g[(1 - v)(2 - v)g - 2] = 0 \quad (2.7)$$

Любопытно, что (2.7) совпадает с известным условием П. Я. Полубариновой-Кочиной для точки G , являющейся концом разреза ([1], с. 255).

3. Построение функций F и Z методом П. Я. Полубариновой-Кочиной. Согласно этому методу [1], функции F и Z — решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса с регулярными особыми точками, каковыми являются особые точки функций ω и z , такие, что

$$w = F/Z \quad (3.1)$$

Определяя показатели функций F и Z около особых точек, найдем, что эти функции представляют собой линейные комбинации двух ветвей сле-

дующей функции Римана:

$$\frac{1}{(\xi + \xi_A) \sqrt{\xi(1-\xi)^{1+v}}} \mathbf{P} \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & g & \infty \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+v}{2} \\ \frac{1}{2} & v & 2 & -\frac{v}{2} \end{matrix} \right\} \xi = \frac{v}{(\xi + \xi_A) \sqrt{\xi(1-\xi)^{1+v}}} \quad (3.2)$$

где v — решение уравнения (2.1).

Учитывая (3.2), (3.1) и (2.2), найдем

$$\frac{d\omega}{dt} = A \frac{f_1(t)}{h_-(t)}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{A}{\gamma\rho} \frac{f_2(t)}{h_-(t)}$$

$$h_{\pm}(t) = \operatorname{ch} 2t \pm \cos 2a, \quad A > 0, \quad a = \operatorname{arctg} \sqrt{\xi_A} \quad (3.3)$$

Можно проверить, что функции (1.3), определенные на основании соотношений (3.3) и (2.2), удовлетворяют граничным условиям (1.1), записанным в терминах упомянутых функций, и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи.

4. Второй способ. Нахождение функций F и Z методом интеграла Фурье. В рассматриваемом случае вид области z позволяет также прибегнуть к решению задачи посредством интеграла Фурье. Для того чтобы удовлетворить граничному условию $\operatorname{Im} F = 0$ на линии раздела, на мнимой оси ниже этой границы расположим симметричный точечный сток равного расхода и применим так называемый метод зеркального отображения [1, 2, 7, 8]. Функции F и Z в полуполосе плоскости t (фиг. 2, б) будем искать в виде (ниже и далее интегрирование по α ведется от 0 до ∞)

$$\begin{aligned} dz/dt &= \int [C_1(\alpha) \cos \alpha t + iC_2(\alpha) \sin \alpha t] d\alpha \\ d\omega/dt &= (2\pi)^{-1} Q [1/(t - ia) + 1/(t + ia)] + \int C_3(\alpha) \sin \alpha t d\alpha \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $C_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, 3$) — некоторые неизвестные функции, подлежащие определению. Очевидно, что при любых $C_i(\alpha)$ функции F и Z удовлетворяют краевым условиям (1.1) на сторонах AB , AD и второму условию на стороне BC , записанным в терминах этих функций.

Чтобы впоследствии использовать оставшиеся три граничных условия, воспользуемся следующими интегральными представлениями ([9], с. 491):

$$\frac{t}{t^2 + a^2} = \begin{cases} \int e^{-\alpha a} \sin \alpha t d\alpha, & v < a \\ -i \int e^{i\alpha t} \operatorname{ch} \alpha a d\alpha, & v > a \end{cases}$$

Учтем теперь, что линии раздела BC на плоскости t отвечает прямая $v = 0$, а кривой депрессии — $v = \pi/2$. Отделяя в выражениях для F и Z действительные и мнимые части и удовлетворяя не использованным пока граничным условиям на CD и первому условию на BC , получим для определения неизвестных функций $C_i(\alpha)$ систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi\alpha C_1(\alpha) - \operatorname{ch} \frac{1}{2}\pi\alpha [C_2(\alpha) + C_3(\alpha)] &= \pi^{-1} Q e^{-1/2\pi\alpha} \operatorname{ch} \alpha a \times \\ \times \rho C_2(\alpha) - C_3(\alpha) &= \pi^{-1} Q e^{-\alpha a} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon \operatorname{ch} \frac{1}{2}\pi\alpha C_1(\alpha) - \operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi\alpha [\varepsilon C_2(\alpha) - C_3(\alpha)] = \pi^{-1} Q e^{-1/2\pi\alpha} \operatorname{ch} \alpha a$$

Решая систему (4.2), определитель которой, как можно убедиться, отличен от нуля, найдем $C_i(\alpha)$. Внося полученные значения $C_i(\alpha)$ в урав-

нения (4.1) и используя известные ([9], с. 519) значения интегралов, окончательно получим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Q}{\pi h_-(t)} [B_1 \operatorname{sh}(1 + \nu)t + B_2 \operatorname{sh}(1 - \nu)t], \quad \frac{dz}{dt} = \frac{Q}{\pi \gamma \rho h_-(t)} \times \\ \times \{B_1 [\operatorname{ch}(1 + \nu)t + i\gamma \operatorname{sh}(1 + \nu)t] - B_2 [\operatorname{ch}(1 - \nu)t - i\gamma \operatorname{sh}(1 - \nu)t]\} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} B_1 = \cos(1 - \nu)a + \gamma \sin(1 - \nu)a, \quad B_2 = \cos(1 + \nu)a - \\ - \gamma \sin(1 + \nu)a \end{aligned}$$

Учитывая, что $C = (B_1 + B_2)/(B_1 - B_2)$, и вводя постоянную A , связанную с расходом Q соотношением

$$Q = \pi A [2 \sin a (\sin a\nu + \gamma \cos a\nu)]^{-1} \quad (4.4)$$

снова приходим к (3.3).

5. Расчет линзы. Обсуждение. Уравнения (3.3) являются параметрическим решением задачи для источника. Распространим теперь полученные результаты на случай оросителя малого, близкого к полукругу поперечного сечения. Для этого примем в качестве контура оросителя линию равного напора, проходящую через верхнюю точку сечения оросителя M_0 с координатами $x = 0$, $y = 1/2 D$, где D — диаметр оросителя, и обозначим через μ — аффикс этой точки в плоскости t (фиг. 2, б). Предположим, что на контуре оросителя напор равен h_0 . Тогда уравнения (3.3) содержат три неизвестные постоянные a , μ и A . Для определения этих постоянных служит радиус оросителя $1/2 D$, напор на его контуре h_0 , а также глубина H_0 исходной (до формирования линзы) поверхности соленых грунтовых вод, для которой имеем следующее выражение [1]:

$$LH_0 = - \int_0^L y_{BC}(x) dx \quad (5.1)$$

В результате интегрирования (3.3) вдоль соответствующих участков границы области t получаем

$$h_0 = A \int_{\mu}^{1/2 \pi} [\cos \tau \sin \nu \tau + C \sin \tau \cos \nu \tau] \frac{d\tau}{h_-(\tau)} \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{2} D = \frac{A}{\gamma \rho} \int_a^{\mu} [\cos \tau (\cos \nu \tau - \gamma \sin \nu \tau) - C \sin \tau (\sin \nu \tau + \gamma \cos \nu \tau)] \frac{d\tau}{h_-(\tau)}$$

Система уравнений (5.1) и (5.2) определяет искомые параметры. После их нахождения определению подлежат величина расхода Q по формуле (4.4), ширина линзы $2L$ по формуле (1.2), толщина (мощность) линзы в максимальном сечении $T = H + H_1$, где H — максимальная высота кривой депрессии, H_1 — наибольшее расстояние границы раздела от уровня заложения оросителя, а также ее наименьшее расстояние H_2 . Используются безразмерные величины: все линейные характеристики (размеры линзы L , H , H_1 , H_2 , T , включая фильтрационный расход Q) отнесены к величине H_0 ; оставим за этими величинами их прежние обозначения.

Приведем здесь параметрические уравнения для координат двух искомых границ линзы ($0 \leq \tau < +\infty$):

Таблица 1

ε	L	T	Q	ρ	L	T	Q
10^{-4}	8497	139,4	0,849	0,02	175,3	50,8	1,753
10^{-3}	1097	55,7	1,097	0,05	163,7	32,7	1,637
$5 \cdot 10^{-3}$	275	30,1	1,374	0,2	140,0	16,1	1,401

Таблица 2

D	L	T	Q	h_0	L	T	Q
0,05	86,6	13,1	0,866	0,1	68,7	10,4	0,687
0,1	105,5	15,9	1,055	0,4	152,4	23,0	1,524
0,3	152,4	23,0	1,524	0,6	197,8	29,9	1,978

для свободной поверхности CD

$$x = \frac{A \cos^{1/2} \pi \nu}{\varepsilon} \int_0^{\tau} [\operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \nu \tau + C \operatorname{ch} \tau \operatorname{ch} \nu \tau] \frac{d\tau}{h_+(\tau)} \quad (5.3)$$

$$y = H - A \sin^{1/2} \pi \nu \int_0^{\tau} [\operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \nu \tau + C \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \nu \tau] \frac{d\tau}{h_+(\tau)}$$

для поверхности раздела BC

$$x = \frac{A}{\gamma \rho} \int_0^{\tau} [\operatorname{ch} \tau \operatorname{ch} \nu \tau + C \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \nu \tau] \frac{d\tau}{h_-(\tau)} \quad (5.4)$$

$$y = -H_1 + \frac{A}{\rho} \int_0^{\tau} [\operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \nu \tau + C \operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \nu \tau] \frac{d\tau}{h_-(\tau)}$$

На фиг. 1 изображены кривая депрессии и линия раздела, рассчитанные при $\varepsilon = 0,08$; $\rho = 0,3$; $H_0 = 0,5$; $D = 0,4$ и $h_0 = 0,5$. В табл. 1 и 2 сведены результаты расчетов размеров линзы L и T , а также расхода Q при некоторых значениях параметров ε , ρ , D и h_0 . Таблицы состоят из нескольких разделов, в каждом из которых изменению подвергается один из указанных параметров, а остальные фиксируются при значениях $\varepsilon = 0,01$; $\rho = 0,1$; $H_0 = 1,0$; $D = 0,3$ и $h_0 = 0,4$.

Результаты табл. 1 позволяют сделать некоторые заключения о влиянии параметров ε , ρ на размеры линзы. Видно, что при убывании ε линза увеличивается в размерах, главным образом вширь, так как величина L возрастает пропорционально $1/\varepsilon$ (см. (1.2)). С уменьшением ρ , т. е. с ослаблением подпора со стороны соленых вод, наблюдается существенный рост толщины линзы, т. е. теперь линза в основном углубляется. Отметим, что в отношении влияния параметров ε и ρ видим некоторое сходство с линзами в зоне каналов, описанными в [10].

Представленные в табл. 2 расчеты по изучению влияния диаметра D и величины напора h_0 на форму и размеры линз показывают, что зависимость величин L и T здесь прямопропорциональна.

Специальный интерес представляет изучение поведения точки перегиба G , отмеченной на фиг. 1 крестиком. Оказывается, что при фиксировании ε и H_0 с увеличением параметра ρ точка перегиба G перемещается по свободной поверхности (согласно результатам п. 2, в этом случае $g > 1$),

а затем переходит на линию раздела (тогда $g < 1$). В приводимом на фиг. 1 примере точка перегиба G находится на линии раздела и имеет координаты $x = 2,128$, $y = -0,961$.

Автор благодарит Д. Ф. Шульгина за советы и замечания, способствовавшие значительному улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Ризенкамф Б. К. Об одном случае фильтрации воды в многослойном грунте // Учен. зап. Саратов. ун-та. Сер. гидравлики. 1940. Т. 15. Вып. 5. С. 94—100.
3. Шульгин Д. Ф., Новосельский С. Н. Математические модели и методы расчета влагопереноса при внутрипочвенном орошении // Математика и проблемы водного хозяйства. Киев: Наук. думка, 1986. С. 73—90.
4. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
5. Чибрикова Л. И. О применении краевой задачи Римана при построении интегральных представлений некоторых решений уравнений класса Фукса // Теория функций комплексного переменного. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1983. С. 160—172.
6. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 4. С. 563—566.
7. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
8. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967)/Под ред. Полубариновой-Кочиной П. Я. М.: Наука, 1969. 545 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. Эмих В. Н. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 115—119.

Ленинград

Поступила в редакцию
18.IV.1988