

ДК 538.4

А. П. Курячий

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА — ТЕЙЛОРА

В рамках линейной теории устойчивости исследуется влияние электрогидродинамического (ЭГД) взаимодействия на значения критического числа Тейлора потери устойчивости течения униполярно заряженной жидкости между концентрическими вращающимися цилиндрами при наличии радиального электрического поля. Показана возможность стабилизирующего влияния ЭГД-взаимодействия.

Ранее [1] исследовалась ЭГД неустойчивость равновесия слабопроводящей жидкости, расположенной между цилиндрическими электродами, при наличии инъекции заряда с одного из электродов. Аналогичная задача решалась и в случае сферических электродов [2, 3]. Ниже изучается возможность влияния ЭГД-взаимодействия на устойчивость течения с криволинейными линиями тока.

1. Рассматривается течение вязкой несжимаемой униполярно заряженной жидкости между концентрическими вращающимися диэлектрическими цилиндрами при наличии радиального электрического поля. Для определенности предполагается, что плотность объемного заряда положительна. В дальнейшем рассматривается случай, когда внешний цилиндр покоится. Пусть r^* , θ , z^* — цилиндрические координаты, R_1^* и R_2^* — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно, Ω^* — угловая скорость внутреннего цилиндра. Звездочкой обозначаются размерные величины.

Если θ - и z -составляющие вектора напряженности электрического поля равны нулю, то из системы уравнений электрогидродинамики [4] следует, что поле скоростей основного невозмущенного движения жидкости не зависит от наличия объемного заряда и описывается выражением [5]

$$u_\theta^* = V^*(r^*) = A^*r^* + B^*/r^* \quad (1.1)$$

$$A^* = -\Omega^* \frac{\eta^2}{1-\eta^2}, \quad B^* = \Omega^* R_1^{*2} \frac{1}{1-\eta^2}, \quad \eta = \frac{R_1^*}{R_2^*}$$

Для определения электрических параметров основного течения (плотности объемного заряда и напряженности электрического поля) используются уравнения Пуассона и неразрывности тока [4]. Последнее в осесимметричном случае, когда $\partial j_\theta^*/\partial \theta = 0$, сводится к уравнению $j_r^* = 0$ (j_θ^* и j_r^* — компоненты вектора плотности тока).

Сформулируем граничные условия для электрических величин. Предполагается заданным значение радиальной компоненты напряженности электрического поля на внешней поверхности внутреннего цилиндра E_θ^* . В рассматриваемом осесимметричном случае вследствие отсутствия вихрей электрического поля компонента $E_\theta^* \equiv 0$. Поле такой конфигурации может быть создано осесимметричным распределением заряда, расположенного в области $r^* \leq R_1^*$, например равномерно заряженным металлическим цилиндром с диэлектрическим покрытием на внешней поверхности $r^* = R_1^*$. В этом случае значение вектора напряженности поля, имеющего только радиальную составляющую, при $r^* = R_1^*$ может быть определено по распределению заряда в области $r^* \leq R_1^*$ на основе

теоремы Остроградского — Гаусса. Электрическое поле в промежутке между цилиндрами определяется значением E_0^* и объемным зарядом в этой области и не зависит от заряда на внешнем цилиндре.

Кроме граничного условия для напряженности поля необходимо условие, налагаемое на плотность объемного заряда, которое в данной постановке задается в интегральном виде как выражение для отнесенного к единице длины электрического тока I^* , обусловленного переносом заряда движущейся жидкостью.

Таким образом, плотность объемного заряда и напряженность электрического поля в области течения могут быть определены на основе решения следующей задачи:

$$(r^*E^*)' = r^*Q^*/\varepsilon^*, \quad D^*Q^{*'} - b^*E^*Q^* = 0 \quad (1.2)$$

$$E^*(R_1^*) = E_0^*, \quad \int_{R_1^*}^{R_2^*} V^*Q^* dr^* = I^*$$

Штрихом обозначено дифференцирование по r^* , $E^*(r^*)$ — напряженность электрического поля, $Q^*(r^*)$ — плотность объемного заряда, ε^* — диэлектрическая проницаемость жидкости, b^* и D^* — коэффициенты подвижности и диффузии ионов. Отметим, что входящее в систему уравнений электрогидродинамики [4] уравнение $\text{rot } E^* = 0$ в рассматриваемом случае выполняется автоматически.

Вводя безразмерные величины

$$d^* = R_2^* - R_1^*, \quad R_0^* = 1/2(R_2^* + R_1^*), \quad r^* = R_0^* + d^*x \quad (1.3)$$

$$E^* = ED^*/(b^*d^*), \quad Q^* = QD^*\varepsilon^*/(b^*d^{*2})$$

а также используя выражение для скорости жидкости (1.1), на основе уравнений (1.2) для определения электрических параметров течения получим следующую задачу:

$$(rE)' = rQ, \quad Q' - EQ = 0$$

$$r(x) = x + 1/2 \frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad E(-1/2) = E_0 \quad (1.4)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{1}{r(1-\eta)^2} - r \right] Q dx = I, \quad I = \frac{b^*I^*}{\varepsilon^*D^*\Omega^*} \frac{1-\eta^2}{\eta^2}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по x .

Вводя в рассмотрение функцию $\varphi(x) = r(x)E(x)$, на основании (1.4) получим уравнение

$$r\varphi'' - \varphi' - \varphi\varphi' = 0$$

Интегрируя его один раз, получим

$$\varphi' = [(\varphi + 2)^2 + C_1]/(2r) \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) может быть проинтегрировано еще раз, причем вид решения будет зависеть от знака постоянной C_1 . Пусть $C_1 = a^2$, тогда интегрирование (1.5) с использованием граничного условия (1.4) дает решение в виде

$$E = \frac{a}{r} \operatorname{tg} X - \frac{2}{r}, \quad Q = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos^{-2} X$$

$$X = \frac{a}{2} \ln \left(\frac{1-\eta}{\eta} r \right) + \operatorname{arctg} \frac{\eta E_0 + 2(1-\eta)}{(1-\eta)a}$$

В случае $C_1 = -a^2$ имеем

$$E = \frac{a - 2 + (a + 2) C_2 r^a}{r(1 - C_2 r^a)}, \quad Q = \frac{2a^2 C_2 r^{a-2}}{(1 - C_2 r^a)^2}$$

$$C_2 = \left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right)^a \frac{2 - a + \eta(E_0 - 2 + a)}{2 + a + \eta(E_0 - 2 - a)}$$

Наконец, при $C_1 = 0$

$$E = -\frac{2(X+1)}{r}, \quad Q = \frac{2}{(rX)^2}, \quad X = [\eta E_0 + 2(1 - \eta)] \times$$

$$\times \left\{ 2(1 - \eta) \left[\ln \left(\frac{1 - \eta}{\eta} r \right) - 1 \right] + \eta E_0 \ln \left(\frac{1 - \eta}{\eta} r \right) \right\}^{-1}$$

Значение постоянной C_1 (или a) определяется из второго условия (1.4), которое может быть записано в виде

$$\frac{2}{(1 - \eta)^2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{E}{r^2} dx = I + E_0 \frac{1 + \eta}{\eta}$$

2. Для вывода системы уравнений и граничных условий, описывающих развитие малых возмущений в рассматриваемом течении, обозначим возмущения r -, θ -, z -компонент скорости через u^* , v^* , w^* соответственно. Пусть, кроме того, p^* , q^* , e_r^* , e_θ^* , e_z^* — возмущения давления, плотности объемного заряда и компонент вектора напряженности электрического поля.

Ограничимся рассмотрением осесимметричных периодических по z^* и монотонных по времени возмущений типа вихрей Тейлора, задаваемых в виде [6]

$$u^*(r^*, z^*, t^*) = u^*(r^*) \exp(\sigma^* t^*) \cos(\alpha^* z^*) \text{ для } u^*, v^*, p^*, q^*, e_r^*, e_\theta^*$$

$$w^*(r^*, z^*, t^*) = w^*(r^*) \exp(\sigma^* t^*) \sin(\alpha^* z^*) \text{ для } w^*, e_z^*$$

где σ^* и α^* действительны. Случай комплексного σ^* , т. е. возмущения колебательного типа, не рассматривается.

Граничными условиями для компонент скорости являются условия прилипания. Возмущения электрических параметров должны удовлетворять условиям отсутствия тока на поверхностях обоих цилиндров. Кроме этого, на поверхности внутреннего цилиндра должна быть непрерывна тангенциальная составляющая вектора напряженности поля, а разрыв нормальной к поверхности составляющей поля равен плотности поверхностного заряда. Поскольку предполагается, что поле, создаваемое зарядом, расположенным при $r^* < R_1^*$, не возмущается, то тангенциальная компонента напряженности поля при $r^* = R_1^*$ равна нулю. Плотность поверхностного заряда, вообще говоря, связана с объемной плотностью заряда у поверхности, поэтому граничное условие при $r^* = R_1^*$ для нормальной компоненты поля в общем случае будет иметь вид $e_r^* + \beta^* q^* = 0$, где β^* — некоторый коэффициент, характеризующий адсорбционные свойства поверхности. В дальнейшем будет предполагаться, что диэлектрическая поверхность цилиндра не адсорбирует поверхностный заряд, т. е. $\beta^* = 0$.

Подставляя приведенные выше выражения для возмущений в систему уравнений электрогидродинамики и отбрасывая нелинейные члены, получим краевую задачу, описывающую эволюцию малых возмущений рассматриваемого типа, в которой в отличие от задачи, описывающей основное невозмущенное течение, уравнения для электрических величин не

отделяются от «гидродинамической части» задачи, т. е. гидродинамические и электрические возмущения взаимозависимы.

Краевую задачу для малых возмущений представим в виде

$$\begin{aligned} L_1^* u^* + \alpha^* w^* &= 0, \quad \rho^* v^* (L^* L_1^* - \alpha^{*2} - \sigma^*/v^*) u^* = \\ &= L^* p^* - 2\rho^* V^* v^*/r^* - E^* q^* - Q^* e_r^* \\ v^* (L^* L_1^* - \alpha^{*2} - \sigma^*/v^*) v^* &= 2A^* u^* \\ \alpha^* p^* &= -\rho^* v^* (L_1^* L^* - \alpha^{*2} - \sigma^*/v^*) w^* - Q^* e_z^* \\ \alpha^* q^* &= -\varepsilon^* (L_1^* L^* - \alpha^{*2}) e_z^*, \quad D^* (L_1^* L^* - \alpha^{*2} - \sigma^*/D^*) q^* = \\ &= b^* E^* L^* q^* + 2b^* Q^* q^*/\varepsilon^* + (be_r^* + u^*) L^* Q^* \\ \alpha^* e_r^* + L^* e_z^* &= 0, \quad e_\theta^* = 0 \\ r^* = R_1^*, \quad u^* = v^* = w^* = e_r^* = e_z^* &= (D^* L^* - b^* E^*) q^* = 0 \\ r^* = R_2^*, \quad u^* = v^* = w^* = (D^* L^* - b^* E^*) q^* - b^* Q^* e_r^* &= 0 \\ (L^* = d/dr^*, \quad L_1^* = d/dr^* + 1/r^*) & \end{aligned}$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется на основе выражений (1.3), а также соотношений

$$\begin{aligned} u^* &= u \frac{v^* \Omega^* R_1^*}{2A^* d^{*2}} = -u \frac{v^*}{2d^*} \frac{1+\eta}{\eta}, \quad v^* = v \Omega^* R_1^* \\ \alpha^* &= \frac{\alpha}{d^*}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma v^*}{d^{*2}}, \quad e_z^* = \frac{e D^*}{b^* d^*}, \quad V^* = g(x) \Omega^* r^* \\ g(x) &= \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \left[\frac{4\xi^2(x)}{(1+\eta)^2} - 1 \right], \quad \xi(x) = \frac{1+\eta}{1+\eta+2(1-\eta)x} \end{aligned}$$

Исключая из полученной безразмерной системы уравнений давление, плотность объемного заряда, z-компоненту скорости и радиальную компоненту напряженности поля, после учета уравнений (1.4) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий десятого порядка:

$$\begin{aligned} (LL_1 - \alpha^2 - \sigma) (LL_1 - \alpha^2) u &= -2Tg(x)v + \\ &+ 2\alpha\eta(1+\eta)^{-1} \lambda^{-2} NE (L_1 L - \alpha^2 - Q) e \\ (LL_1 - \alpha^2 - \sigma) v &= u \tag{2.1} \\ (L_1 L - \alpha^2 - \lambda\sigma - 2Q) (L_1 L - \alpha^2) e - E (LL_1 - \alpha^2 + Q) Le &= \\ &= 1/2 \alpha \lambda Q E (1+\eta) \eta^{-1} u \\ T = 4 \left(\frac{\Omega^* d^{*2}}{v^*} \right)^2 \frac{\eta^2}{1-\eta^2}, \quad \lambda = \frac{v^*}{D^*}, \quad N = \frac{\varepsilon^*}{\rho^* b^{*2}} \\ x = -1/2, \quad u = Lu = v = e = Le = 0 \\ (L + 1 - \eta - E) L^2 e &= 0 \\ x = 1/2, \quad u = Lu = v = 0 \\ [LL_1 L - EL_1 L - (Q + \alpha^2) L + \alpha^2 E] e &= 0 \\ (L = d/dx, \quad L_1 = d/dx + 1/r(x)) & \end{aligned}$$

Функция $r(x)$ описывается выражением (1.4), а $E(x)$ и $Q(x)$ — решение задачи (1.4).

3. Решение краевой задачи (2.1) осуществляется методом сведения ее к задаче Коши [7]. В этом случае решение ищется в виде комбинации четырех линейнонезависимых решений, каждое из которых удовлетворяет граничным условиям на внутреннем цилиндре (суммирование от $i = 1$ до $i = 4$)

$$u = A_i u_i, \quad v = A_i v_i, \quad e = A_i e_i \tag{3.1}$$

При этом из вводимых в рассмотрение десяти функций $u_i, Lu_i, L^2u_i, L^3u_i, v_i, Lv_i, e_i, Le_i, L^2e_i, L^3e_i$ считаются отличными от нуля при $x = -1/2$ следующие:

$$Lv_1 = 1, \quad L^2u_2 = 1, \quad L^3u_3 = 1, \quad L^2e_4 = 1, \quad L^3e_4 = E(-1/2) + (n-1)/\eta \quad (3.2)$$

Уравнения (2.1) представляются в виде системы десяти уравнений первого порядка относительно введенных выше функций, которая интегрируется методом Рунге — Кутта от $x = -1/2$ до $x = 1/2$ для каждого независимого решения с соответствующими начальными условиями (3.2). При $x = 1/2$ строятся решения вида (3.1). Из условия выполнения граничных условий (2.1) при $x = 1/2$ получается система однородных линейных алгебраических уравнений относительно входящих в (3.1) четырех неизвестных постоянных A_i . Определитель этой системы является характеристической функцией задачи на собственные значения (2.1). При фиксированных значениях параметров σ и α методом Ньютона ищется собственное значение числа Тейлора T , обращающее в нуль характеристическую функцию.

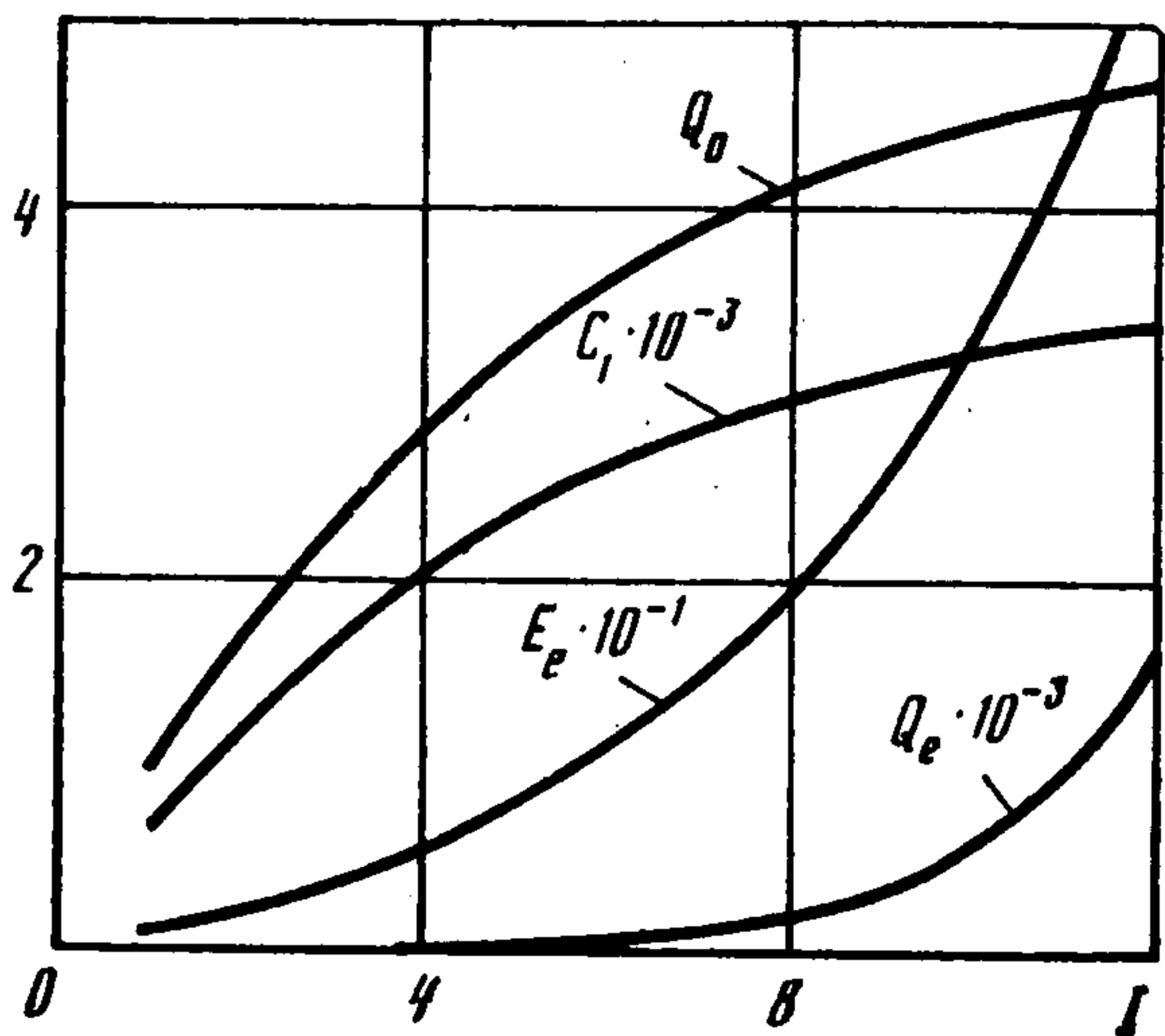
Исследуем влияние ЭГД-взаимодействия на значения критического числа Тейлора потери устойчивости T_c . Для определения T_c берется $\sigma = 0$, и для нескольких значений α , задаваемых с постоянным шагом, описанным выше методом находят соответствующие значения T , а затем T_c и α_c определяются по трем значениям квадратичной интерполяцией.

Отметим, что при решении задачи на собственные значения для определения функций $E(x)$ и $Q(x)$ можно использовать приведенные выше аналитические выражения. Однако при этом возникает необходимость следить за знаком входящей в (1.5) постоянной C_1 . Поэтому до решения задачи на собственные значения с тем же шагом интегрирования методом Рунге — Кутта решалось уравнение (1.5) и определялись профили $E(x)$, $Q(x)$, используемые в дальнейшем при решении задачи (2.1)

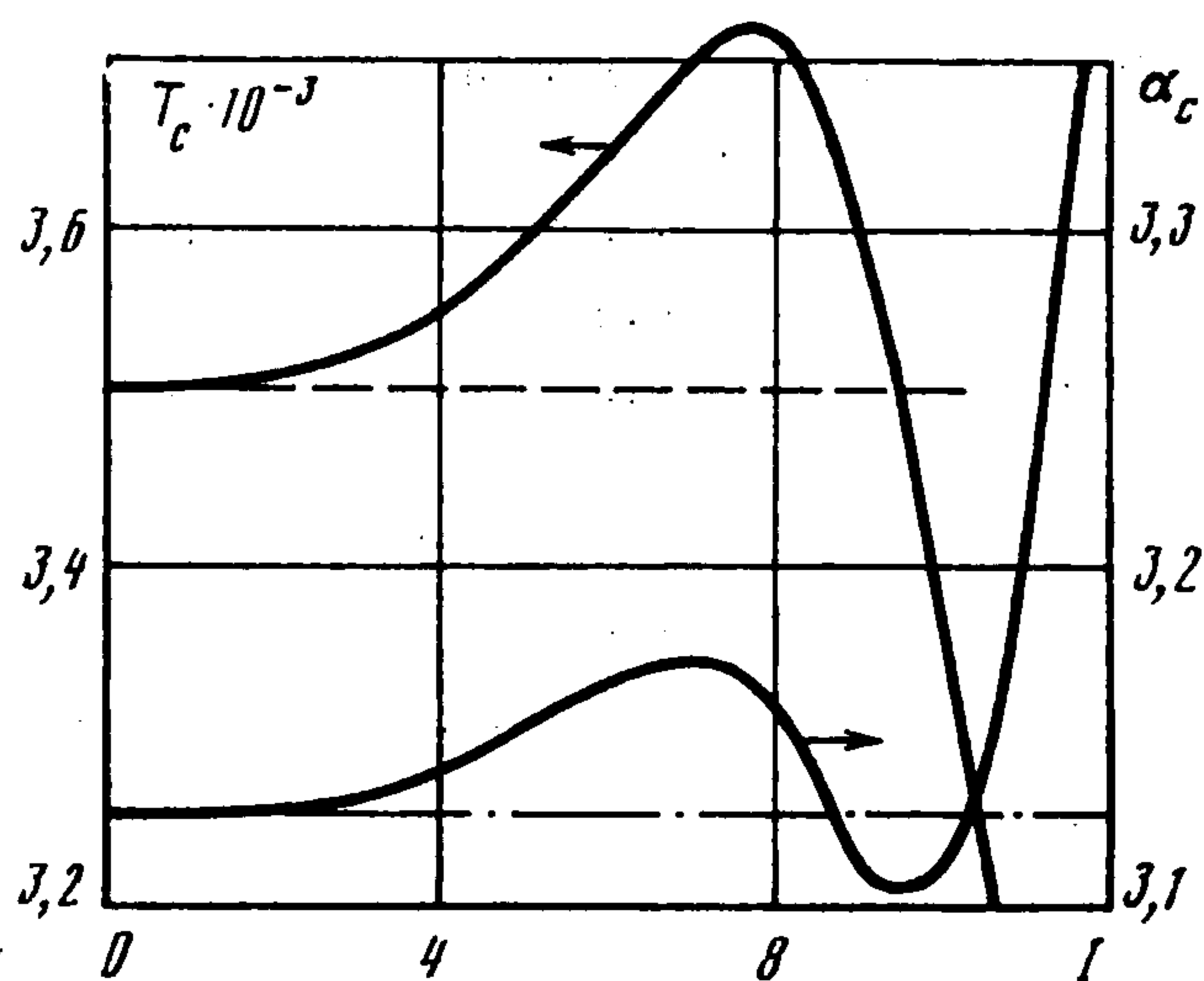
4. Основным интерес представляет влияние на характеристики устойчивости распределений плотности объемного заряда и напряженности электрического поля, зависящих прежде всего от параметров E_0 и I , поэтому входящие в задачу (2.1) параметры λ и N , характеризующие жидкость, в проведенных расчетах задавались постоянными, равными единице. Расчеты проводились также для одного значения $\eta = 0,95$.

На фиг. 1 представлены зависимости от параметра I , характеризующего величину электрического тока, значений постоянной C_1 , входящей в уравнение (1.5), напряженности поля на внешнем цилиндре E_e , плотности объемного заряда на внутреннем (Q_0) и внешнем (Q_e) цилиндрах при фиксированном значении $E_0 = 0$. Отметим, что при $E_0 \geq 0$ плотность объемного заряда монотонно возрастает от внутреннего цилиндра к внешнему. При $E_0 < 0$ монотонность $Q(x)$ нарушается до тех пор, пока E_0 не уменьшится настолько, что величина E_e станет отрицательной.

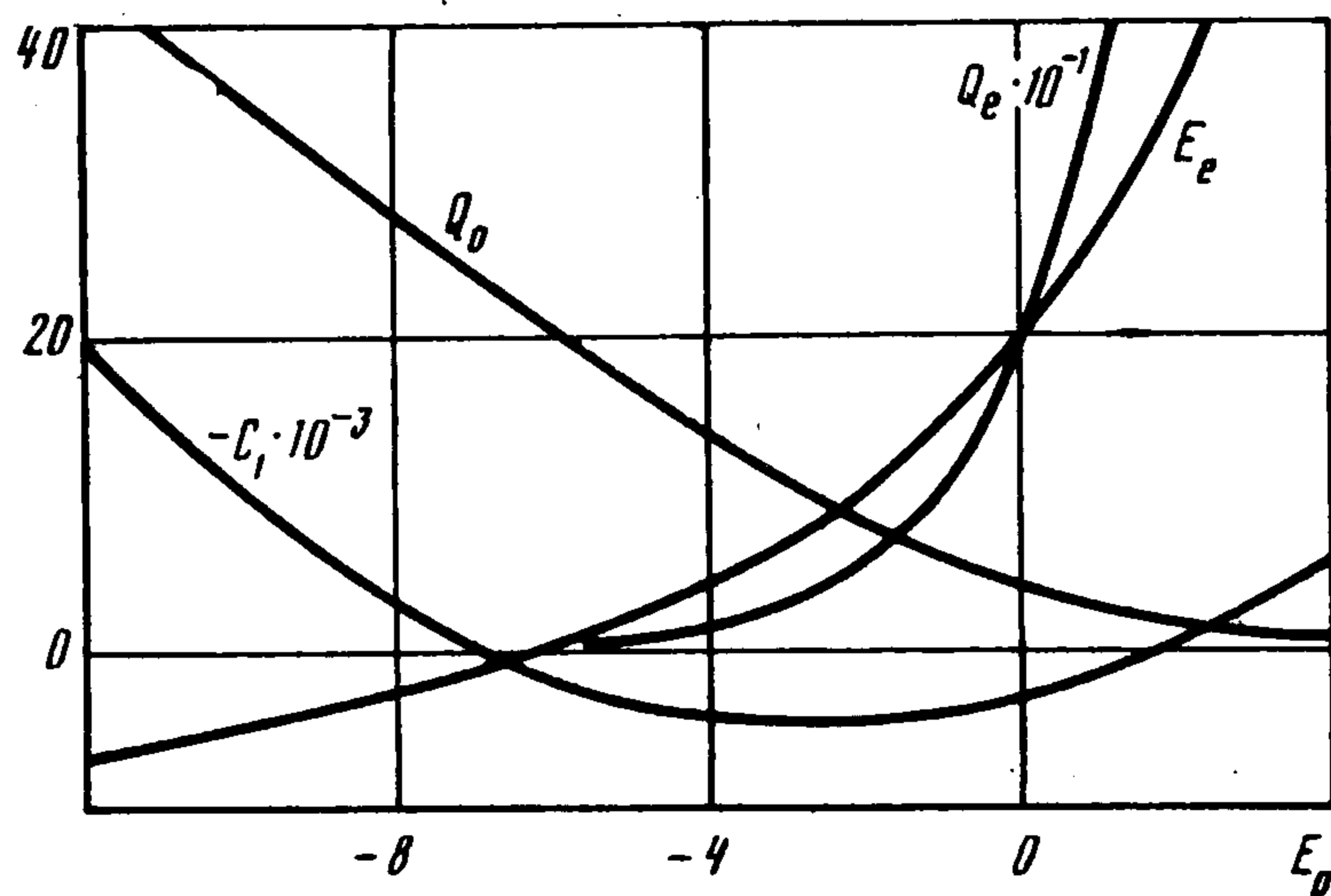
Приведенные на фиг. 1 функции в определенной степени характеризуют электрические параметры течения. На фиг. 2 представлены результаты расчета устойчивости ЭГД-течения: критическое число Тейлора T_c и соответствующее ему волновое число α_c . Пунктиром и штрихпунктиром нанесены значения соответственно $T_c = 3509,0$ и $\alpha_c = 3,1276$, достигающиеся в течении Куэтта — Тейлора без воздействия. Данные фиг. 2 говорят о том, что при фиксированном значении $E_0 = 0$ увеличение тока (или суммарного заряда) между цилиндрами сначала ведет к повышению устойчивости течения. После достижения числом T_c максимального значения примерно при $I = 8$ дальнейшее увеличение заряда приводит к довольно резкому уменьшению устойчи-



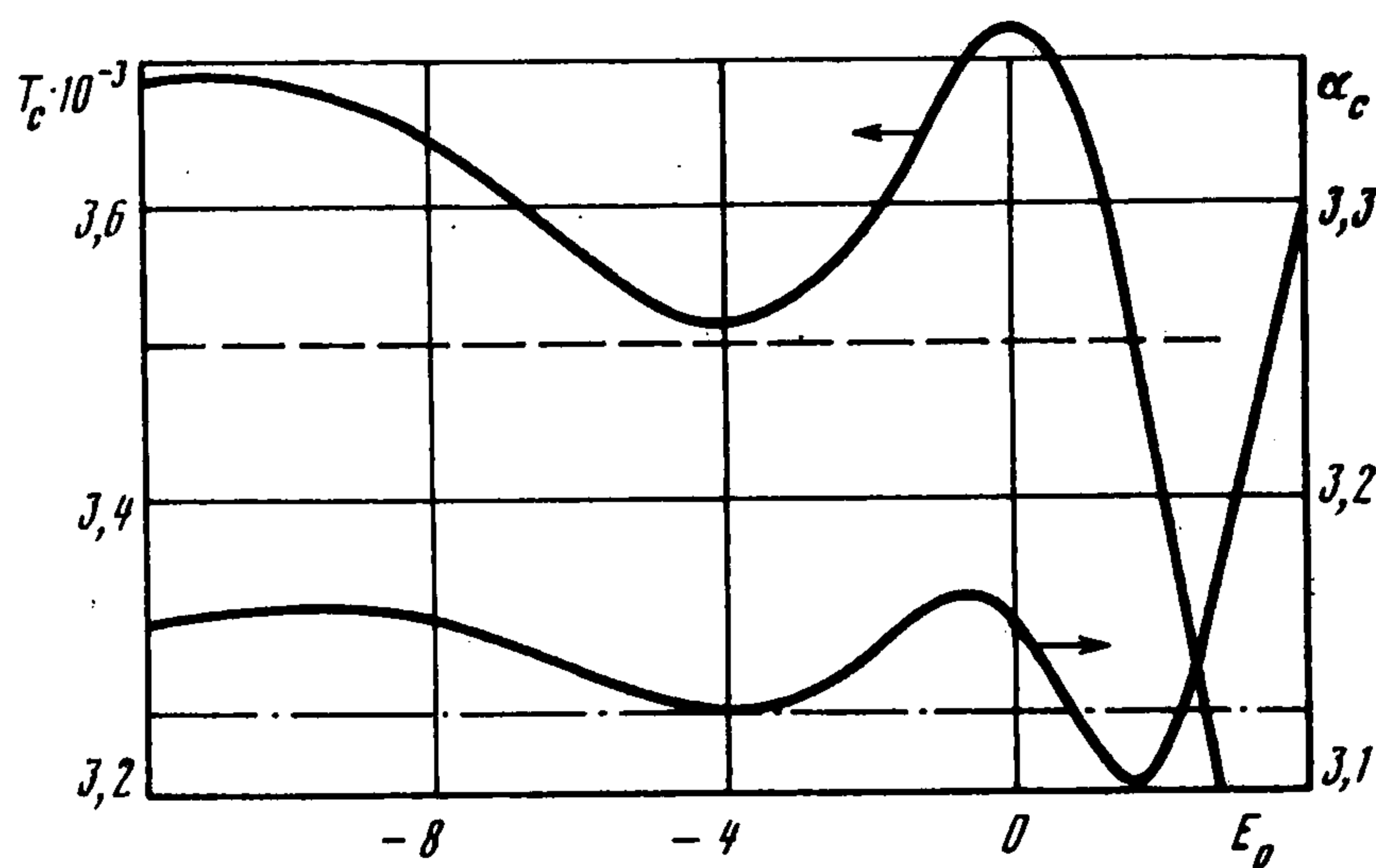
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ности (значений числа T_c), которое сопровождается столь же быстрым возрастанием волнового числа α_c .

Фигура 3 отражает влияние приложенного электрического поля на внутреннем цилиндре на значения тех же параметров, что приведены на фиг. 1, при фиксированном значении $I = 8$.

На фиг. 4 представлены зависимости T_c и α_c от E_0 при том же значении параметра $I = 8$. Наибольшее значение T_c достигается при $E_0 \approx 0$. Увеличение отрицательных значений приложенного поля E_0 приводит сначала к уменьшению критического числа Тейлора, которое достигает локального минимума при почти симметричном относительно середины зазора между цилиндрами распределении электрических параметров течения, что видно из сравнения фиг. 3 и 4. При этом совпадают значения Q_0 и Q_e и значения модулей градиентов заряда $dQ/dx = EQ$ около цилиндров. Минимальное значение T_c и соответствующее ему волновое число почти совпадают со значениями для обычного течения Куэтта — Тейлора.

Дальнейшее уменьшение параметра E_0 ведет к повышению устойчивости течения, и наблюдается второй плавный максимум в зависимостях T_c и α_c от E_0 при монотон

ном распределении заряда, возрастающего по направлению к внутреннему цилиндру. При положительных значениях приложенного поля E_0 , когда с ростом этого параметра довольно резко возрастает плотность заряда у внешнего цилиндра (фиг. 3), происходит быстрое уменьшение устойчивости течения с возрастанием волнового числа, аналогичное тому, какое имеет место при увеличении параметра I (фиг. 2).

Можно сделать вывод о том, что хотя максимальное повышение устойчивости течения Куэтта — Тейлора в результате ЭГД-взаимодействия наблюдается при значении приложенного поля $E_0 = 0$, когда объемный заряд монотонно возрастает от внутреннего цилиндра к внешнему, дальнейшая концентрация заряда у вогнутой поверхности внешнего цилиндра, достигаемая путем увеличения либо напряженности приложенного поля, либо тока, текущего в зазоре между цилиндрами (или суммарного заряда), приводит к быстрому уменьшению критического числа Тейлора (дестабилизации течения) и повышению волнового числа возмущений. В случае же монотонного увеличения заряда по направлению от внешнего цилиндра к внутреннему наблюдается повышение устойчивости течения.

Автор благодарит А. А. Бармина за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Richardson A. T.* The linear instability of a dielectric liquid contained in a cylindrical annulus and subjected to unipolar charge injection // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1980. V. 33. Pt. 3. P. 277—292.
2. *Жакин А. И.* Электрогидродинамическая неустойчивость слабопроводящей жидкости, расположенной между сферическими электродами при наличии слабой инжекции // *ПМТФ.* 1979. № 5. С. 44—48.
3. *Oliveri S., Atten P.* The linear stability of spherical liquid layer subjected to a unipolar charge injection // *Phys. Fluids.* 1986. V. 29. № 5. P. 1378—1385.
4. *Гогосов В. В., Полянский В. А.* Электрогидродинамика: Задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.* М.: ВИНТИ, 1976. Т. 10. С. 5—85.
5. *Ди Прима Р. С., Суинни Х. Л.* Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами // *Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.* М.: Мир, 1984. С. 169—217.
6. *Krueger E. R., Gross A., Di Prima R. C.* On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 24. № 3. P. 521—538.
7. *Roberts P. H.* The solution of the characteristic value problems // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1965. V. 283. № 1395. P. 550—556.

Москва

Поступила в редакцию
16.VIII.1988