Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 3, 1989

УДК 532.517.4

Э. В. Теодорович

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОБОБЩЕННОМ ТОЖДЕСТВЕ УОРДА

При построении решения уравнений, описывающих нелинейную динамическую систему, важную роль играет исследование ее свойств симметрии. В качестве примера можно указать квантовую электродинамику, в которой требование калибровочной инвариантности ведет к наличию некоторой связи между массовым оператором и вершиной; соответствующее соотношение называется обобщенным тождеством Уорда (ОТУ) [1]. ОТУ существенно для доказательства перенормируемости квантовой электродинамики, т. е. сокращения расходимостей радиационных поправок к вершинной функции и константы перенормировки волновой функции электрона. Аналогичным образом в статистической гидродинамике (теории турбулентности) требование галилеевской инвариантности приводит к существованию соотношений между различными статистическими моментами и функциями отклика на внешние воздействия. Впервые соотношение подобного рода было получено Л. П. Питаевским [2] при исследовании сверхтекучести жидкого гелия, однако для развитой турбулентности соответствующие соотношения не выписывались. Отметим только оказавшуюся некорректной попытку [3] постулировать некоторое соотношение типа ОТУ для получения замкнутой системы уравнений в теории турбулентности [3, 4].

Ниже для гидродинамической системы, описываемой уравнениями Навье — Стокса при наличии внешней случайной силы, получено на основе требования галилеевской инвариантности точное соотношение между массовым оператором и вершиной (гидродинамическое ОТУ) и проиллюстрирована его выполнимость вплоть до третьего порядка теории возмущений.

1. Исходная система уравнений. Характеристики гидродинамического поля — давление p и проекции скоростей v_i ($i = 1, 2, 3$) будем рассматривать как составляющие некоторого четырехкомпонентного вектора $\psi_\alpha = \{\psi_0, \psi_i\} = \{p, v_i\}$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). Совокупность пространственно-временных координат будем обозначать цифрами согласно определению $\{\mathbf{r}_1, t_1\} = 1$. Пользуясь предложенным в [5] формализмом, запишем систему уравнений Навье — Стокса в виде [6]

$$-L_\alpha(1, [\psi]) + X_\alpha(1) + \eta_\alpha^*(1) = 0 \tag{1.1}$$

$$L_\alpha(1, [\psi]) = L^{(0)}_{\alpha\beta}(12)\,\psi_\beta(2) + {}^1/_2\,\lambda V_{\alpha\beta\gamma}(1\,|\,23)\,\psi_\beta(2)\,\psi_\gamma(3) \tag{1.2}$$

(в формуле (1.2) введен формальный параметр разложения в ряд теории возмущений λ, который в конечном результате следует положить равным единице). Линейная часть оператора Навье — Стокса $L_{\alpha\beta}^{(0)}$ и отличные от нуля компоненты тензора $V_{\alpha\beta\gamma}$ определены соотношениями

$$L^{(0)}_{\alpha\beta}(12) = \begin{Vmatrix} 0 & \partial_j^{(1)} \\ \partial_i^{(1)} & (\partial_t^{(1)} - \nu\Delta^{(1)})\,\delta_{ij} \end{Vmatrix} \delta(1-2) \tag{1.3}$$

$$V_{ijk}(1\,|\,23) = -[\delta_{ik}\partial_j^{(3)} + \delta_{ij}\partial_k^{(2)}]\,\delta(1-2)\,\delta(1-3)$$

$X_\alpha = \{X_0, X_i\}$ — плотности статистически задаваемых массовых (X_0) и силовых (X_i) источников, $\eta_\alpha^* = \{\eta_0^*, \eta_i^*\}$ — плотности соответствующих регулярных (детерминированных) источников. Предположим, что X_α представляет собой случайный процесс типа гауссова «белого шума» (модель Уайлда [3]), для которого единственное отличное от нуля кумулятивное среднее имеет вид

$$\langle X_i(1)\, X_j(2)\rangle = B_{ij}(12) = \delta_{ij}\delta(t_1 - t_2)\, B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \qquad (1.4)$$

Характеристический функционал системы может быть записан в виде двукратного континуального интеграла по полям ψ, ψ^* [6—8]

$$W[\psi, \psi^*] = \int d[\psi]\, d[\psi^*] \exp i\, \{S[\psi, \psi^*] + \eta_\alpha(1)\,\psi_\alpha(1) + \\ + \eta_\alpha^*(1)\,\psi_\alpha^*(1)\} \qquad (1.5)$$

$$S[\psi, \psi^*] = -\psi_\alpha^*(1)\, L_\alpha(1, [\psi]) + {}^1/_2 i\psi_i^*(1)\, B_{ij}(12)\,\psi_j^*(2)$$

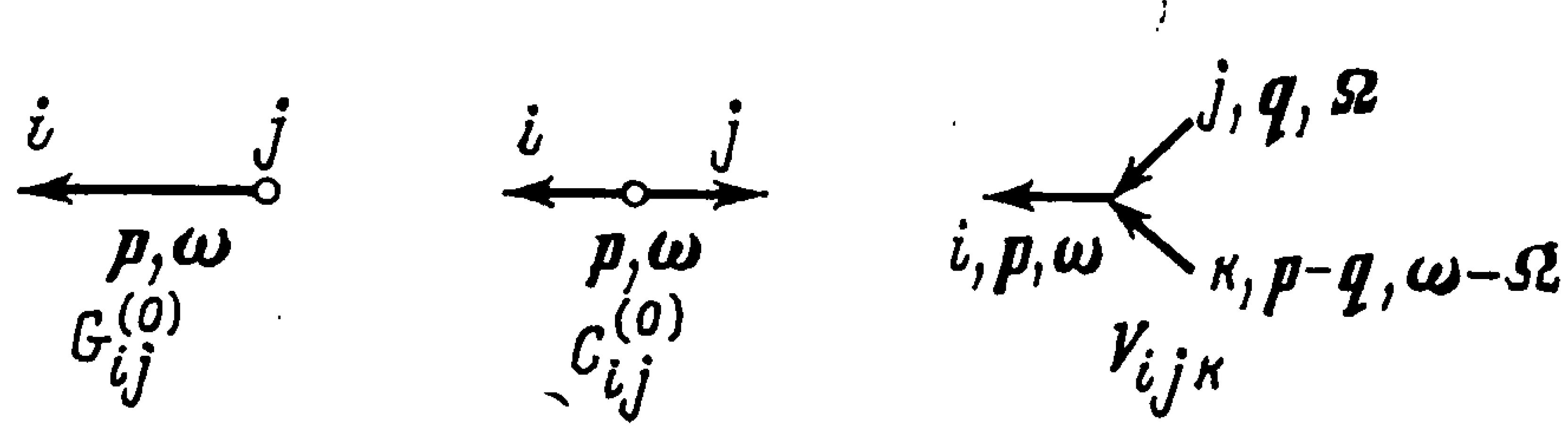
Из инвариантности континуального интеграла относительно сдвига функционального аргумента $\psi^* \to \psi^* + \varphi^*$ можно получить уравнение в функциональных производных для характеристического функционала

$$\left\{\frac{\delta S[\psi, \psi^*]}{\delta\psi_\alpha^*(1)}\bigg|_{\psi=\delta/i\delta\eta,\ \psi^*=\delta/i\delta\eta^*} + \eta_\alpha^*(1)\right\} W[\eta, \eta^*] = 0. \qquad (1.6)$$

Представление (1.5) дает возможность легко построить теорию возмущений и соответствующую ей диаграммную технику. Согласно теории возмущений для статистической гидродинамики [9] элементами диаграммной техники являются функции Грина $G^{(0)}$, парный коррелятор скорости $C^{(0)}$ и вершина V, которые в пространстве фурье-образов имеют вид

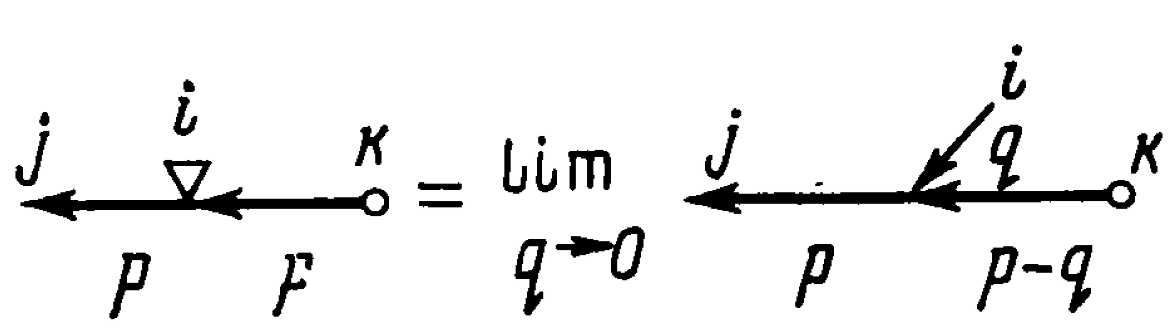
$$G_{ij}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) = P_{ij}(\mathbf{p})\,(-i\omega + \nu p^2)^{-1}$$
$$C_{ij}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) = P_{ij}(\mathbf{p})\, B(\mathbf{p})\,(\omega^2 + \nu^2 p^4)^{-1} \qquad (1.7)$$
$$V_{ijk}(\mathbf{p}) = i\,(p_j\delta_{ik} + p_k\delta_{ij})$$

где $P_{ij}(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - p_i p_j/p^2$ — поперечный проектор. Соответствующие графические символы изображены на фиг. 1.



Фиг. 1

2. ОТУ в низших порядках теории возмущений. Рассмотрим вершину, соответствующую поглощению кванта с нулевыми значениями частоты и волнового числа, представляющую собой асимптотику эйлеровой вершины. Следуя [10], будем подобные кинематические вершины изображать на диаграммах вставкой треугольной стрелки без хвоста, как это показано на фиг. 2.



Фиг. 2

Согласно правилам диаграммной техники диаграмме на фиг. 2 соответствует выражение

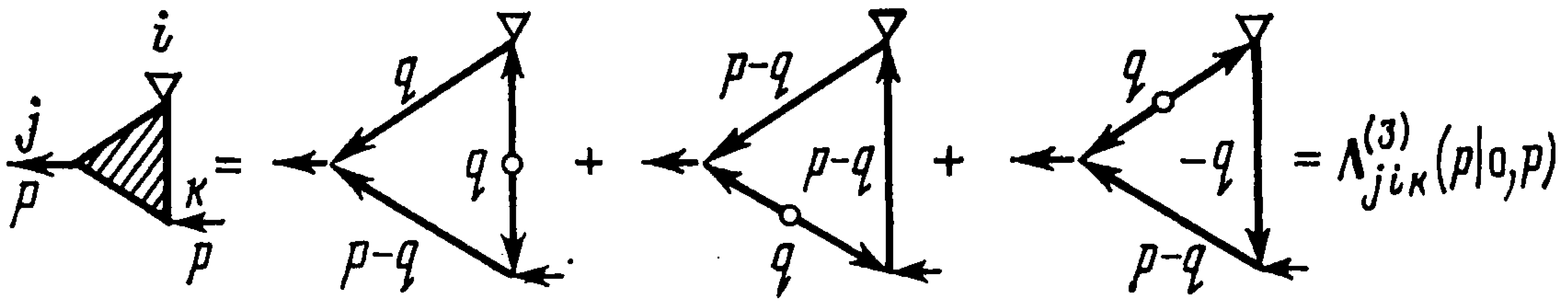
$$\lambda G_{jj'}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega)\, V_{j'ik'}(\mathbf{p})\, G_{k'k}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) =$$
$$= i\lambda\, \frac{P_{jj'}(\mathbf{p})\,(p_i\delta_{j'k'} + p_{k'}\delta_{j'i})\,P_{kk'}(\mathbf{p})}{(-i\omega + \nu p^2)^2} = i\lambda p_i\, \frac{P_{jk}(\mathbf{p})}{(-i\omega + \nu p^2)^2} = \lambda p_i\, \frac{\partial G_{jk}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega)}{\partial\omega}$$

Аналогично [11] это соотношение может быть переписано в виде ОТУ

$$\lambda V_{jik}(\mathbf{p}) = -\lambda p_i \partial\, [G_{jk}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega)]^{-1}/\partial\omega \qquad (2.1)$$

Простое обобщение формулы (2.1), полученной в низшем порядке теории возмущений, на случай диаграмм произвольного порядка при помощи процедуры, аналогичной применяемой при диаграммном выводе ОТУ в квантовой электродинамике [11], провести не удается. Различие связано с тем, что в квантовой электродинамике фотонной вставке соответствует умножение на постоянную матрицу Дирака, тогда как в гидродинамике при вставке во внутреннюю линию кинематической вершины производится умножение на импульс (волновое число) внутренней линии, а не внешней [10]. Тем не менее обобщающее (2.1) ОТУ имеет место и в следующих порядках теории возмущений, что и будет проиллюстрировано ниже для диаграмм третьего порядка.

Радиационные поправки к вершине описываются суммой трех диаграмм, изображенных на фиг. 3. Опуская индекс нуль у свободных



Фиг. 3

функций Грина и корреляторов, получим согласно фиг. 3 с учетом представлений (1.7)

$$\Lambda^{(3)}_{jik}(p\,|\,0,\,p) = \lambda^3 V_{jmn}(\mathbf{p}) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \{G_{mm'}(q)\,G_{nn'}(p-q)\,V_{m'm''i}(\mathbf{q}) \times$$
$$\times\, C_{m''n''}(q)\,V_{n'n''k}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + G_{mm'}(p-q)\,C_{nn'}(q)\,V_{m'm''i}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,G_{m''n''}(p-q) \times$$
$$\times\, V_{n''n'k}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + C_{mm'}(q)\,G_{nn'}(p-q)V_{n'n''k}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,G_{n''m''}(-q)\,V_{m''m'i}(-\mathbf{q})\} = \tag{2.2}$$
$$= i\lambda^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{b_{jk}(\mathbf{p},\,\mathbf{q})\,B(\mathbf{q})}{(\Omega^2+\nu^2\mathbf{p}^4)\,[-i(\omega-\Omega)+\nu(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2]} \times$$
$$\times \left\{\frac{q_i}{-i\Omega+\nu p^2} + \frac{p_i-q_i}{-i(\omega-\Omega)+\nu(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} - \frac{q_i}{i\Omega+\nu\mathbf{q}^2}\right\}$$

$$b_{jk}(\mathbf{p},\,\mathbf{q}) = V_{jmn}(\mathbf{p})\,P_{nn'}(\mathbf{q})\,P_{mm'}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,V_{m'n'k}(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \quad p = \{\mathbf{p},\,\omega\}, \quad q = \{\mathbf{q},\,\Omega\}$$

(при получении формулы (2.2) были использованы свойства проекционных операторов $p_l P_{lj}(\mathbf{p}) = 0$, $P_{jl}(\mathbf{p})\,P_{lk}(\mathbf{p}) = P_{jk}(\mathbf{p})$). Прямым расчетом можно показать, что сумма членов, пропорциональных q_i в фигурных скобках формулы (2.2), после выполнения интегрирования по Ω обращается в нуль и остается

$$\Lambda^{(3)}_{jik}(p\,|\,0,\,p) = p_i \lambda \partial \Sigma^{(2)}_{jk}(p)/\partial\omega \tag{2.3}$$

где оператор собственной энергии во втором порядке теории возмущений определен формулой

$$\Sigma^{(2)}_{jk}(p) = \lambda^2 V_{jmn}(\mathbf{p}) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} C_{nn'}(q)\,G_{mm'}(p-q)\,V_{m'n'k}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \tag{2.4}$$

3. Общее доказательство ОТУ. Покажем, не прибегая к помощи теории возмущений, каким образом ОТУ вытекает из требования галилеевской инвариантности гидродинамической системы. Для этого в формуле (2.5) выполним не меняющую значения континуального интеграла замену функционального аргумента $\psi_i \to \psi_i + V_i$ и преобразование координат $x_i \to x_i - \lambda V_i t$. При учете свойства инвариантности оператора Навье — Стокса (1.2) относительно преобразования Галилея

$$L_l(\mathbf{r}_1 - \lambda\mathbf{V}t_1,\, t_1;\, [\psi_0,\, \psi_i + V_i]) = L_l(\mathbf{r}_1,\, t_1;\, [\psi_0,\, \psi_i]) =$$
$$= -\delta S\,[\psi,\, \psi^*]/\delta\psi_l^*\,(1) \tag{3.1}$$

континуальный интеграл (1.5) преобразуется к виду

$$W[\eta, \eta^*] = \int d[\psi]\, d[\psi^*] \exp i \{\psi_l^* (\mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{V} t_1, t_1) \times \tag{3.2}$$
$$\times\, \delta S[\psi, \psi^*]/\delta\psi_l^* (\mathbf{r}_1, t_1) + V_i \int d1 \eta_i (1) + \eta_\alpha (1) \psi_\alpha (1) + \eta_\alpha^* (1) \psi_\alpha^* (1)\}$$

В силу независимости континуального интеграла (1.5) от параметра V_i и при учете (1.6) найдем

$$\frac{\delta W[\eta, \eta^*]}{\delta V_i} = \int d1 \left\{ \lambda t_1 \eta_l^* (1)\, \partial_i^{(1)} \frac{\delta}{i\delta\eta_l^* (1)} + \eta_i (1) \right\} W[\eta, \eta^*] = 0 \tag{3.3}$$

С целью получения уравнения для сильносвязанных (одночастично неприводимых) диаграмм перейдем к новым функциональным переменным

$$\varphi_\alpha (1) = \frac{\delta}{i\delta\eta_\alpha (1)} \ln W[\eta, \eta^*], \quad \varphi_\alpha^* (1) = \frac{\delta}{i\delta\eta_\alpha^* (1)} \ln W[\eta, \eta^*]$$

осуществив функциональное преобразование Лежандра посредством введения нового характеристического функционала [9]

$$\Psi[\varphi, \varphi^*] = \ln W[\eta, \eta^*] - i\eta_\alpha (1)\, \varphi_\alpha (1) - i\eta_\alpha^* (1) \varphi_\alpha^* (1)$$

В результате в новых переменных соотношение (3.3) преобразуется к виду

$$\int d1 \left[\lambda t_1 \partial_i^{(1)} \varphi_l^* (1) \frac{\delta\Psi}{i\delta\varphi_l^* (1)} + \frac{\delta\Psi}{i\delta\varphi_i (1)} \right] = 0 \tag{3.4}$$

Формула (3.4) представляет собой производящее уравнение для вывода вытекающих из галилеевской инвариантности ОТУ для сильносвязанных диаграмм. В частности, после двукратного функционального дифференцирования (3.4) по $\varphi_j^*(2)$, $\varphi_k (3)$ и при учете того, что из условия экстремальности функционала $\delta\Psi/i\delta\varphi = -\eta = 0$ следует $\varphi^* = 0$, найдем

$$\int d1\, [\lambda t_1 G_{lk}^{-1} (13) \partial_i^{(1)} \delta_{jl} \delta(1 - 2) - \Gamma_{jik} (2 \mid 13)] = 0 \tag{3.5}$$

$$G_{ij}^{-1} (12) = -i \frac{\delta^2\Psi}{i\delta\varphi_i^* (1)\, i\delta\varphi_j (2)}, \quad \Gamma_{jik} (2 \mid 13) = \frac{\delta^3\Psi}{i\delta\varphi_j^* (2)\, i\delta\varphi_i (1)\, i\delta\varphi_k (3)}$$

где $G_{ij}^{-1} (12)$ — обратная полная функция Грина, $\Gamma_{jik} (2 \mid 13)$ — одночастично неприводимая полная вершина с двумя входящими линиями $(1, i)$ и $(3, k)$ и одной выходящей линией $(2, j)$ [9]. После выполнения преобразования Фурье формула (3.5) примет вид

$$\lambda p_i \partial G_{jk}^{-1} (p)/\partial\omega + \Gamma_{jik} (p \mid 0, p) = 0 \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) является точным, оно представляет собой строгое следствие галилеевской инвариантности рассматриваемой гидродинамической системы и его получение не основывается на теории возмущений.

Если из вершины выделить член первого порядка

$$\Gamma_{jik} (p \mid q, p - q) = \lambda V_{jik} (p) + \Lambda_{jik} (p \mid q, p - q)$$

и воспользоваться вытекающим из уравнения Дайсона соотношением

$$G_{ij}^{-1} (p) = [G_{ij}^{(0)} (p)]^{-1} - \Sigma_{ij} (p)$$

то уравнение (3.6) представится в форме

$$-\lambda p_i \partial\Sigma_{jk} (p)/\partial\omega + \Lambda_{jik} (p \mid 0, p) = 0 \tag{3.7}$$

в третьем порядке теории возмущений совпадающей с (2.3).

Выполнив вариационное дифференцирование (3.4) по полям $\varphi_j^* (2)$, $\varphi_k^* (3)$, получим еще одно ОТУ, связывающее парный коррелятор C и вершину, описывающую процесс превращения кванта с нулевыми волновым числом и частотой в два кванта (такие процессы возможны только в высших порядках теории возмущений, начиная с третьего). В фурье-пространстве соответствующее соотношение имеет вид

$$2\lambda p_i \frac{\partial}{\partial\omega}\left[G_{jj'}^{-1}(p)\, G_{kk'}^{-1}(-p)\, C_{j'k'}(p)\right] - \Gamma_{jki}(p, -p\,|\,0) = 0 \qquad (3.8)$$

Соотношения (3.6), (3.8) оказываются полезными при исследовании вопросов компенсации расходимостей диаграмм гидродинамической теории возмущений и устранения ультрафиолетовых расходимостей путем перенормировок.

При проведении мультипликативных перенормировок парного коррелятора, функции Грина и вершины согласно соотношениям [12]

$$C \to \alpha_1 C, \quad G \to \alpha_2 G, \quad \Gamma \to \alpha_3 \Gamma \qquad (3.9)$$

оказывается, что подобные перенормировки совместимы с уравнениями Дайсона при условии $\alpha_1 \alpha_2{}^2 \alpha_3{}^2 = 1$. Вытекающее из галилеевской инвариантности ОТУ (3.6) приводит к дополнительному условию $\alpha_2{}^{-1} = \alpha_3$, что эквивалентно требованию $\alpha_1 = 1$. Таким образом, инвариантность относительно мультипликативных преобразований (3.9) оказывается связанной с наличием произвола в выборе амплитуды вспомогательного поля ψ^*. Введение соответствующего контрчлена (не обязательно бесконечного) и применение метода ренормализационной группы, использующего инвариантность результата относительно изменения точки нормировки амплитуды поля ψ^*, могут дать возможность получить дополнительные сведения о статистических характеристиках поля турбулентности аналогично тому, как это удается сделать при исследовании турбулентной вязкости и диффузии (например, [13, 14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 597 с.
2. *Питаевский Л. П.* К вопросу о сверхтекучести жидкого He^3 // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. Вып. 6. С. 1794—1807.
3. *Wyld H. D.* Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid // Ann. Phys. 1961. V. 14. № 2. P. 143—165.
4. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
5. *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* Statistical dynamics of a classical systems // Phys. Rev. A. 1973. V. 8. № 1. P. 423—437.
6. *Теодорович Э. В.* Вычисление турбулентной вязкости на основе метода ренормгруппы // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 836—839.
7. *De Dominicis C., Peliti L.* Field-theory renormalization and critical dynamics above T_c: Helium, antiferromagnets and liquid-gas systems // Phys. Rev. B. 1978. V. 18. № 1. P. 353—376.
8. *Аджемян Л. Ц., Васильев А. Н., Письмак Ю. М.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: размерности составных операторов // Теорет. и мат. физика. 1983. Т. 57. № 2. С. 268—281.
9. *Теодорович Э. В.* Методы теории поля в статистической гидродинамике // Методы гидрофизических исследований: Волны и вихри. Горький: Изд-е Ин-та прикладной физики АН СССР, 1987. С. 163—183.
10. *Белиничер В. И., Львов В. С.* Масштабно-инвариантная теория развитой гидродинамической турбулентности // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 2. С. 533—551.
11. *Швебер С., Бете Г., Гофман Ф.* Мезоны и поля. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 488 с.
12. *Гледзер Е. Б., Монин А. С.* Метод диаграмм в теории возмущений // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29. Вып. 3. С. 111—159.
13. *Теодорович Э. В.* К вычислению турбулентной вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 29—36.
14. *Теодорович Э. В.* Явления турбулентного переноса и метод ренормализационной группы // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 218—224.

Москва

Поступила в редакцию
8.VI.1988