

УДК 532.68 : 536.25

Ю. П. Гупало, А. Е. Редников, Ю. С. Рязанцев

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЙ ДРЕЙФ КАПЛИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В квазистационарном приближении получено приближенное аналитическое решение задачи о движении сферической капли (или пузыря) в неограниченной вязкой несжимаемой жидкости, обусловленном внешним постоянным градиентом температуры. Это движение связано с возникновением касательных напряжений на поверхности капли за счет изменения коэффициента поверхностного натяжения σ с температурой T (эффект Марангони) и направлено в сторону более нагретых участков внешней среды при $d\sigma/dT < 0$ или в противоположную сторону при $d\sigma/dT > 0$ (термокапиллярный дрейф).

В отличие от изученного ранее [1—3] случая линейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры рассматривается произвольная нелинейная зависимость (в частности, квадратичная, характерная для водных растворов высокомолекулярных спиртов, некоторых металлических сплавов и нематических жидких кристаллов [4, 5]).

В предположении малости чисел Рейнольдса и тепловых чисел Пекле получены распределения скоростей и температуры вне и внутри капли в отсутствие гравитации.

Показано, что вследствие нелинейности зависимости поверхностного натяжения от температуры могут существовать состояния равновесия, когда центр масс капли покоится, а жидкость вне и внутри нее движется стационарным образом. При достаточно общих условиях такие состояния устойчивого равновесия соответствуют наличию в двухфазной среде плоскости притяжения, нормальной к невозмущенному градиенту температуры, где концентрируются частицы дисперсной фазы. На практике это может привести к нарушению процесса сепарации примесей в условиях малой гравитации (например, при удалении пузырьков из расплава). Анализ изменения формы капли показывает, что при малых числах Вебера капля в состоянии равновесия принимает вид эллипсоида вращения, сплюснутого в направлении внешнего градиента температуры, если $d^2\sigma/dT^2 = \text{const} > 0$, и растянутого в этом направлении в противоположном случае.

1. Постановка задачи. Рассматривается установившееся движение капли вязкой несжимаемой жидкости в другой, не смешивающейся с ней вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. На бесконечности жидкость покоится и имеется заданный постоянный градиент температуры. Предполагается, что плотности, вязкости, теплопроводности, теплоемкости жидкостей вне и внутри капли постоянны, коэффициент поверхностного натяжения — произвольная функция температуры, движение капли достаточно медленное (малые числа Рейнольдса и Пекле) и она сохраняет сферическую форму (искажение сферической формы будет рассмотрено в конце п. 2). Задача осесимметрична относительно оси x , проходящей через центр капли параллельно внешнему градиенту температуры.

Удобно ввести систему отсчета, связанную с центром движущейся капли (задача сводится к анализу обтекания капли бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость которого подлежит определению), и отсчитывать температуру от невозмущенной температуры точки, где в данный момент времени находится центр капли. Тогда температура в произвольной точке пространства определяется выражением

$$T_i = T_\infty(x_0) + S_\infty(x - x_0) + T_i' \quad (1.1)$$

Индексы $i = 1, 2$ здесь и в дальнейшем относятся к внешней жидкости и капле соответственно, S_∞ — величина заданного внешнего градиента температуры вдали от капли ($S_\infty > 0$, если направление градиента температуры совпадает с положительным направлением оси x , $S_\infty < 0$ в противоположном случае), $T_\infty(x_0)$ — не возмущенная каплей температура в некоторой точке оси x с координатой x_0 , x — координата точки, в которой находится в данный момент времени центр капли, T_i' — температура, отсчитанная от невозмущенной в точке с координатой x .

В предположении о линейной температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения в системе отсчета, связанной с центром капли, реализуется установившееся распределение скоростей и температуры T_i' при стационарном дрейфе капли [1—3]. В случае же произвольной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры его производная по температуре, которая и определяет эффект Марангони, будет, вообще говоря, изменяться при движении капли. Будем рассматривать задачу в квазистационарном приближении при достаточно медленных изменениях полей скорости и температуры T_i' .

Пусть τ — характерное время изменения поля скорости

$$\tau \sim |v(\partial v/\partial t)^{-1}| \quad (1.2)$$

Тогда при выполнении условий

$$\frac{a^2}{\nu_i \tau} \ll 1, \quad \text{Re}_i \frac{a^2}{\chi_i \tau} \ll 1 \quad (1.3)$$

распределения скоростей и температуры T_i' можно считать квазистационарными. Здесь ν_i , χ_i — коэффициенты кинематической вязкости и теплопроводности, a — радиус капли, Re_i — тепловые числа Пекле, вычисленные по характерной скорости движения. В дальнейшем после нахождения квазистационарного решения будет дана оценка времени τ через определяющие параметры задачи.

В рамках сформулированных допущений в квазистационарном приближении в сферической системе координат, в которой радиус r отсчитывается от центра капли, а угол θ — от положительного направления оси x , уравнения и граничные условия для скорости и температуры запишутся в виде

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla p_i + \mu_i \Delta \mathbf{v}_i, \quad \text{div } \mathbf{v}_i = 0, \quad \Delta T_i' = 0 \\ r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v}_1 &\rightarrow U_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad T_1' \rightarrow S_\infty r \cos \theta \\ r \rightarrow 0, \quad |\mathbf{v}_2| &< \infty, \quad |T_2'| < \infty \\ r = a, \quad v_{1r} &= v_{2r} = 0, \quad v_{1\theta} = v_{2\theta} \\ \frac{p_2 - p_1}{2} &= \mu_2 \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} - \mu_1 \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{\sigma}{a} \\ \mu_1 \left(\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial r} - \frac{v_{1\theta}}{r} \right) &- \mu_2 \left(\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} - \frac{v_{2\theta}}{r} \right) + \frac{1}{a} \frac{d\sigma}{dT} \frac{dT_1'}{d\theta} = 0 \\ T_1' &= T_2', \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1'}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2'}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь U_∞ — величина скорости набегающего потока, которая подлежит определению из условия обращения в нуль силы, действующей на каплю ($U_\infty > 0$), если эта скорость направлена по оси x , $U_\infty < 0$ — в противоположном случае), \mathbf{v}_i , p_i , ρ_i — скорость, давление, плотность, μ_i ,

λ_i — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, e_r и e_θ — орты сферической системы координат.

Все неизвестные функции, а также U_∞ , $d\sigma/dT$ параметрически зависят от времени или, что то же, от координаты x центра капли, поскольку

$$x(t) = x(t_0) - \int_{t_0}^t U_\infty(\xi) d\xi \quad (1.5)$$

После введения функции тока и перехода к безразмерным переменным уравнения и граничные условия (1.4) можно представить в следующей форме:

$$E^4\psi_i = 0; \quad E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \quad (1.6)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi_1 \rightarrow 1/2 r^2 (1 - \mu^2); \quad r \rightarrow 0, \quad \psi_2/r^2 < \infty \quad (1.7)$$

$$r = 1, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \partial\psi_1/\partial r = \partial\psi_2/\partial r$$

$$r = 1, \quad \left(2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(\psi_1 - \beta\psi_2) = M(1 - \mu^2) \frac{\partial\psi_1}{\partial \mu} \quad (1.8)$$

$$\Delta\varphi_i = 0 \quad (1.9)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \varphi_1 \rightarrow r\mu, \quad r \rightarrow 0, \quad |\varphi_2| < \infty \quad (1.10)$$

$$r = 1, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \partial\varphi_1/\partial r = \delta\partial\varphi_2/\partial r$$

$$\mu = \cos\theta, \quad v_{ir} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi_i}{\partial\theta}, \quad v_{i\theta} = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_i}{\partial r}$$

$$\varphi_i = \frac{T_i'}{aS_\infty}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \delta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad M = \frac{aS_\infty}{\mu_1 U_\infty} \frac{d\sigma}{dT}$$

Здесь скорости и пространственная координата отнесены соответственно к скорости U_∞ и радиусу капли a и для них использованы прежние обозначения; M — безразмерная функция от x и μ (в частном случае линейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры M — число Марангони (с точностью до знака)).

2. Поле скоростей и температуры. Скорость дрейфа капли и искажение ее формы. Решение уравнений (1.6) с граничными условиями (1.7), определяющее поле скоростей вне и внутри капли, таково (например, [6]):

$$\psi_1 = \left(r^2 + Ar - \frac{A+1}{r}\right) \frac{1-\mu^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} A_n (r^{-n+3} - r^{-n+1}) G_n(\mu) \quad (2.1)$$

$$\psi_2 = \left(A + \frac{3}{2}\right)(r^4 - r^2) \frac{1-\mu^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} A_n (r^{n+2} - r^n) G_n(\mu)$$

Здесь $G_n(\mu)$ — функция Гегенбауэра первого рода порядка n степени $-1/2$. Постоянные A, A_3, A_4, \dots (параметрически зависящие от x) будут определяться из граничного условия (1.8) с использованием решения задачи (1.9), (1.10) о распределении температуры

$$\varphi_1 = \left(r + \frac{1-\delta}{2+\delta} \frac{1}{r^2}\right)\mu, \quad \varphi_2 = \frac{3}{2+\delta} r\mu \quad (2.2)$$

стационарного в нулевом приближении по числу Пекле.

Граничное условие (1.8) после подстановки в него соотношений (2.1), (2.2) примет вид

$$6 \left(1 + A + \beta \left(\frac{3}{2} + A \right) \right) G_2(\mu) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n (4n - 2) (1 + \beta) G_n(\mu) = \frac{3}{2 + \delta} (1 - \mu^2) M \quad (2.3)$$

Подставив в (2.3) разложение функции $(1 - \mu^2) M(x, \mu)$ в ряд по функциям Гегенбауэра (например, [6])

$$(1 - \mu^2) M(x, \mu) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} n(n-1)(2n-1) B_n(x) G_n(\mu) \quad (2.4)$$

$$B_n(x) = \int_{-1}^1 M(x, \mu) G_n(\mu) d\mu \quad (2.5)$$

и приравняв нулю сумму коэффициентов при каждой функции Гегенбауэра одинакового порядка, получим

$$A = \left[\frac{3}{2(2 + \delta)} B_2 - \left(1 + \frac{3}{2} \beta \right) \right] (1 + \beta)^{-1} \quad (2.6)$$

$$A_n = \frac{3n(n-1)}{4(2 + \delta)(1 + \beta)} B_n, \quad n = 3, 4, \dots$$

С нахождением постоянных A, A_3, A_4, \dots квазистационарное поле скоростей вне и внутри капли полностью построено. Сила, действующая на каплю со стороны внешней жидкости, определяется выражением [6]

$$F = -4\pi\mu_1 a A U_{\infty}$$

или, после подстановки соотношений (2.5), (2.6) и учета выражения для $M(x, \mu)$ (см. п. 1)

$$F = 4\pi\mu_1 a (1 + \beta)^{-1} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \beta \right) U_{\infty}(x) - \frac{3}{4(2 + \delta)} \frac{aS_{\infty}}{\mu_1} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{dT}(x, \mu) (1 - \mu^2) d\mu \right] \quad (2.7)$$

Скорость дрейфа капли U ($U = -U_{\infty}$) находится из условия обращения этой силы в нуль:

$$U(x) = - \frac{3}{2(2 + \delta)(2 + 3\beta)} \frac{aS_{\infty}}{\mu_1} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{dT}(x, \mu) (1 - \mu^2) d\mu \quad (2.8)$$

Видно, что в случае падающей зависимости $\sigma = \sigma(T)$ капля дрейфует в сторону возрастания температуры внешней жидкости. В частном случае падающей линейной зависимости ($d\sigma/dT = \text{const} < 0$) из (2.8) получается известный результат [1-3]

$$U = \frac{2}{(2 + \delta)(2 + 3\beta)} \frac{aS_{\infty}}{\mu_1} \left| \frac{d\sigma}{dT} \right|$$

Используя выражение (2.8), из уравнения (1.5) можно найти координату x центра масс капли как функцию времени.

При заданной скорости обтекания капли в предельном случае бесконечно большой вязкости внутренней жидкости ($\beta \rightarrow \infty$) термокапиллярная конвекция в капле подавляется, из (2.7) получается формула Стокса для сопротивления твердого шарика, а в случае бесконечно большой теплопроводности жидкости внутри капли ($\delta \rightarrow \infty$) из (2.7) получается формула Рыбчинского — Адамара для сопротивления капли, причем перепад

температуры вдоль ее поверхности, а вместе с ним и эффект Марангони исчезают. В обоих предельных случаях скорость дрейфа обращается в нуль.

Условия малости чисел Рейнольдса и Пекле, принятые в данной работе, накладывают ограничение сверху на возможные значения величин S_∞ и $d\sigma/dT$.

Используя квазистационарное решение для поля скоростей, оценим характерное время τ согласно (1.2). Получим

$$\tau \sim (\mu_1 + \mu_2) (aS_\infty^2 |d^2\sigma/dT^2|)^{-1} \quad (2.9)$$

т. е. условия квазистационарности (1.3) будут выполнены при достаточно медленном изменении величины $d\sigma/dT$ с температурой, достаточно малых размерах капли и значениях внешнего градиента температуры.

При формулировке задачи (1.6)–(1.10) было опущено граничное условие для нормальных напряжений на поверхности капли:

$$r = 1, \quad -\frac{We}{Re} (p_1 - \beta p_2) - 2 \frac{We}{Re} (\partial_{r\mu}^2 \psi_1 - \beta \partial_{r\mu}^2 \psi_2) = 2h \frac{\sigma(\mu)}{\sigma_0} \quad (2.10)$$

$$We = \frac{\rho_1 a U_\infty^2}{\sigma_0}, \quad Re = \frac{a U_\infty}{\nu_1}$$

Здесь σ_0 — нулевой член в разложении функции $\sigma(\mu)$ по полиномам Лежандра, We , Re — числа Вебера и Рейнольдса, $h = 1/2 Ha$, H — кривизна поверхности капли (для сферической капли $H = 2/a$, $h = 1$), p_1 и p_2 — безразмерные давления вне и внутри капли, отнесенные к $\mu_1 a^{-1} U_\infty$ и $\mu_2 a^{-1} U_\infty$ соответственно, и для них можно получить [6]

$$p_1 = \frac{A}{r^2} \mu + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(2n-1)}{n+1} A_{n+1} r^{-n-1} P_n(\mu) + p_\infty$$

$$p_2 = 10 \left(A + \frac{3}{2} \right) r \mu + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(2n+3)}{n} A_{n+1} r^n P_n(\mu) + \Pi \quad (2.11)$$

Здесь p_∞ — безразмерное давление вдали от капли, Π — постоянная, выражения для A , A_2 , A_3 , ... приведены в (2.6), $P_n(\mu)$ — полином Лежандра порядка n .

Подставляя в (2.10) уже известные решения (2.1), (2.11) с учетом (2.5), (2.6), а также соотношение

$$\sigma(\mu) = \sigma_0 + \frac{3\mu_1 U_\infty}{2 + \delta} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\mu)$$

выводимое из (2.4), можно убедиться, что условие (2.10), вообще говоря, не выполняется. Это означает, что форма капли не может оставаться сферической ($h \neq 1$). Однако при выполнении условия $(We/Re) B \ll 1$, где $B = \max_{n \geq 2} B_n$, отклонение формы от сферической будет малым, а равенство (2.10) следует уже рассматривать как граничное условие для нормальных напряжений, снесенное на сферическую поверхность ($r = 1$), которое в главном приближении сведется к лапласовскому скачку давления на поверхности капли.

Форма поверхности ищется в виде

$$R(\mu) = 1 + \varepsilon \xi(\mu) + \dots, \quad \varepsilon = We/Re \quad (2.12)$$

$$\xi(\mu) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu) \quad (2.13)$$

Разложение (2.13) начинается с члена с номером $n = 2$, поскольку при деформации поверхности объем капли не изменяется и начало координат выбрано в ее центре масс.

Безразмерная кривизна h также представляется в виде разложения

$$h = 1 + \varepsilon h^{(1)} + \dots \quad (2.14)$$

и в силу соотношения

$$h^{(1)} = -\xi - \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{d\xi}{d\mu} \right)$$

будет

$$h^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n P_n(\mu), \quad \gamma_n = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \alpha_n \quad (2.15)$$

После подстановки соотношений (2.1), (2.11), (2.14) с учетом (2.15) в равенство (2.10) получим

$$\begin{aligned} & -p_{\infty} + \beta\Pi + \left(6 + 3A + 6\beta \left(A + \frac{3}{2} \right) \right) P_1(\mu) + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(6A_{n+1} \frac{n+n\beta+\beta}{n(n+1)} - 2\gamma_n \right) P_n(\mu) = \\ & = 2 \frac{\text{Re}}{\text{We}} + \frac{6}{2+\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) B_{n+1} P_n(\mu) \end{aligned}$$

откуда находится постоянная Π и при учете (2.6) получаются соотношения

$$A = 0, \quad \gamma_n = \frac{3(\beta - n\beta - n - 2)}{4(2+\delta)(1+\beta)} B_{n+1} \quad (2.16)$$

Первое равенство (2.16) отражает тот факт, что сила, действующая на каплю, равна нулю. Подстановкой второго соотношения (2.16) во второе соотношение (2.15) можно найти

$$\alpha_n = \frac{3(\beta - n\beta - n - 2)}{2(2+\delta)(1+\beta)(n-1)(n+2)} B_{n+1} \quad (2.17)$$

что вместе с (2.12), (2.13) определяет форму поверхности капли.

При $\delta \rightarrow \infty$ капля в рассматриваемом приближении становится сферической. При $\beta \rightarrow \infty$ форма капли остается, вообще говоря, несферической. Это связано с тем, что хотя движение жидкости внутри капли очень слабо, но в силу большой вязкости оно приводит к заметным напряжениям и перепадам давления, что и обуславливает несферичность формы, к тому же еще влияет неоднородность температуры вдоль поверхности.

В частном случае линейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры получим $\alpha_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$), т. е. капля, как и следовало ожидать в соответствии с результатами работы [2], в рассматриваемом приближении сохраняет сферическую форму.

3. Квадратичная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Плоскость равновесия. Рассмотрим квадратичную зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{2} \alpha (T - T_0)^2, \quad \alpha = d^2\sigma/dT^2 = \text{const} \quad (3.1)$$

Характерным временем изменения скоростей (2.9) здесь будет

$$\tau \sim (\mu_1 + \mu_2) (|\alpha| a S_{\infty}^2)^{-1}$$

Для первой производной коэффициента поверхностного натяжения по температуре в силу соотношений (1.1), (2.2) получим

$$\frac{d\sigma}{dT}(x, \mu) = \alpha \left(T(x_0) + S_\infty(x - x_0) - T_0 + \frac{3}{2 + \delta} a S_\infty \mu \right) \quad (3.2)$$

и после подстановки в (2.8) и интегрирования найдем выражение для скорости дрейфа

$$U(x) = \frac{2\alpha a S_\infty^2 (x_* - x)}{(2 + \delta)(2 + 3\beta)\mu_1}, \quad x_* = x_0 + \frac{T_0 - T(x_0)}{S_\infty} \quad (3.3)$$

При $x = x_*$ скорость дрейфа капли обращается в нуль, поэтому плоскость $x = x_*$ можно назвать плоскостью равновесия (ПР). Действительно, если центр покоящейся капли лежит в этой плоскости, то сила, действующая на каплю, равна нулю, и капля останется в покое. Это состояние может оказаться неустойчивым.

Качественные соображения показывают, что в случае, когда зависимость (3.1) имеет минимум, т. е. при $\alpha > 0$, ПР будет плоскостью притяжения, а равновесие — устойчивым (скорость дрейфа вне ПР всегда направлена к плоскости). При $\alpha < 0$ ПР будет плоскостью отталкивания, а равновесие — неустойчивым (скорость дрейфа направлена от плоскости).

Для оценки времени достижения каплей ПР (при $\alpha > 0$) используем равенство (1.5), где $U_\infty = -U$, и формулу (3.3). Получим

$$x(t) = x_* + (x(t_0) - x_*) \exp \left[- \frac{2\alpha a S_\infty^2}{(2 + \delta)(2 + 3\beta)\mu_1} (t - t_0) \right]$$

т. е., как и следовало ожидать, из произвольного начального положения $x(t_0)$ капля достигнет ПР за бесконечное время.

Понятие ПР можно перенести на случай произвольной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры. При этом может быть одна (для квадратичной зависимости (3.1)) или несколько ПР, или, как, например, для линейной зависимости, ПР могут отсутствовать. Если коэффициент поверхностного натяжения не зависит от температуры, то любая плоскость будет служить ПР.

Можно утверждать, что если первая отличная от нуля величина

$$D_n = \int_{-1}^1 \frac{d^n \sigma}{dT^n}(x_*, \mu) (1 - \mu^2) d\mu, \quad n = 2, 3, \dots$$

имеет четный номер и положительна, то ПР устойчива (скорость дрейфа в достаточно малой окрестности с обеих сторон ПР направлена к плоскости). В противном случае ПР неустойчива (скорость дрейфа в достаточно малой окрестности либо с одной стороны ПР, либо с обеих сторон направлена от ПР). Если коэффициент поверхностного натяжения не зависит от температуры, то $D_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$) и ПР — нейтрально-устойчива.

В случае квадратичной зависимости (3.1) ПР совпадает с плоскостью экстремума коэффициента поверхностного натяжения. Для произвольной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры это, вообще говоря, не так, более того, положение ПР и даже ее существование могут зависеть от размера капли.

В качестве примера проведем расчет скорости дрейфа пузырька воздуха в водном растворе *n*-гептанола. При достаточно больших его концентрациях поверхностное натяжение на границе данного раствора с воздухом, как экспериментально установлено в [5], немонотонно зависит от температуры и эту зависимость можно приближенно аппроксимировать квадратичной (3.1).

Так, при концентрации $7,6 \cdot 10^{-3} M$ получается зависимость (3.1), где $\alpha \cong 6,6 \cdot 10^{-6} H/(m \cdot \text{град}^2)$, $T_0 = 39^\circ C$ и пузырек воздуха радиуса $a = 10^{-4} m$ во внешнем поле температуры с градиентом $S_\infty = 50 \text{ град}/m$, как следует из (3.3), движется со скоростью $U [m/c] \cong 1,3 \cdot 10^{-3} y [m]$. Здесь y — расстояние от центра капли до плоскости покоя. Вязкость раствора ввиду его сильной разбавленности считалась равной средней вязкости воды в рассматриваемом температурном интервале ($\mu_1 \cong 0,65 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/(m \cdot c)$). Учтено также, что в случае пузырька $\beta = 0$, $\delta = 0$. На расстоянии 0,1 м от ПР пузырек будет двигаться со скоростью $1,3 \cdot 10^{-4} m/c = 7,8 \text{ мм}/\text{мин}$, на расстоянии 0,01 м — со скоростью $1,3 \cdot 10^{-5} m/c = 0,78 \text{ мм}/\text{мин}$.

Можно проверить, что при этом выполняются условия квазистационарности (1.3) и предположение о малости чисел Рейнольдса и Пекле. Действительно, для численных значений, приведенных выше, имеем (скорость дрейфа берется на расстоянии 0,1 м от ПР)

$$\text{Re}_1 = \frac{Ua}{\nu_1} \sim 2 \cdot 10^{-2}, \quad \text{Pe}_1 = \frac{Ua}{\chi_1} \sim 10^{-1}$$

$$\tau \sim 400 \text{ с}; \quad \frac{a^2}{\nu_1 \tau} \lesssim 10^{-4}, \quad \text{Pe}_1 \frac{a^2}{\chi_1 \tau} \lesssim 10^{-4}$$

4. Поле скоростей и искажение сферической формы капли, находящейся в ПР. Рассмотрим течение, возникающее вне и внутри капли, когда ее центр масс находится в ПР, в случае квадратичной зависимости, содержащей минимум ($\alpha > 0$). Выражение (3.2) для скорости изменения поверхностного натяжения с изменением температуры на поверхности капли при этом примет вид

$$\frac{d\sigma}{dT} = \alpha a S_\infty \frac{3}{2 + \delta} \mu$$

и при учете (2.1), (2.5), (2.6) выражения для безразмерной функции тока можно записать следующим образом:

$$\psi_{*1} = (1 - 1/r^2)(1 - \mu^2)\mu, \quad \psi_{*2} = (r^5 - r^3)(1 - \mu^2)\mu \quad (4.1)$$

Здесь в качестве масштаба скорости выбрана величина максимальной скорости на поверхности капли

$$U^\circ = \frac{9\alpha (aS_\infty)^2}{10\mu_1 (2 + \delta)^2 (1 + \beta)} \quad (4.2)$$

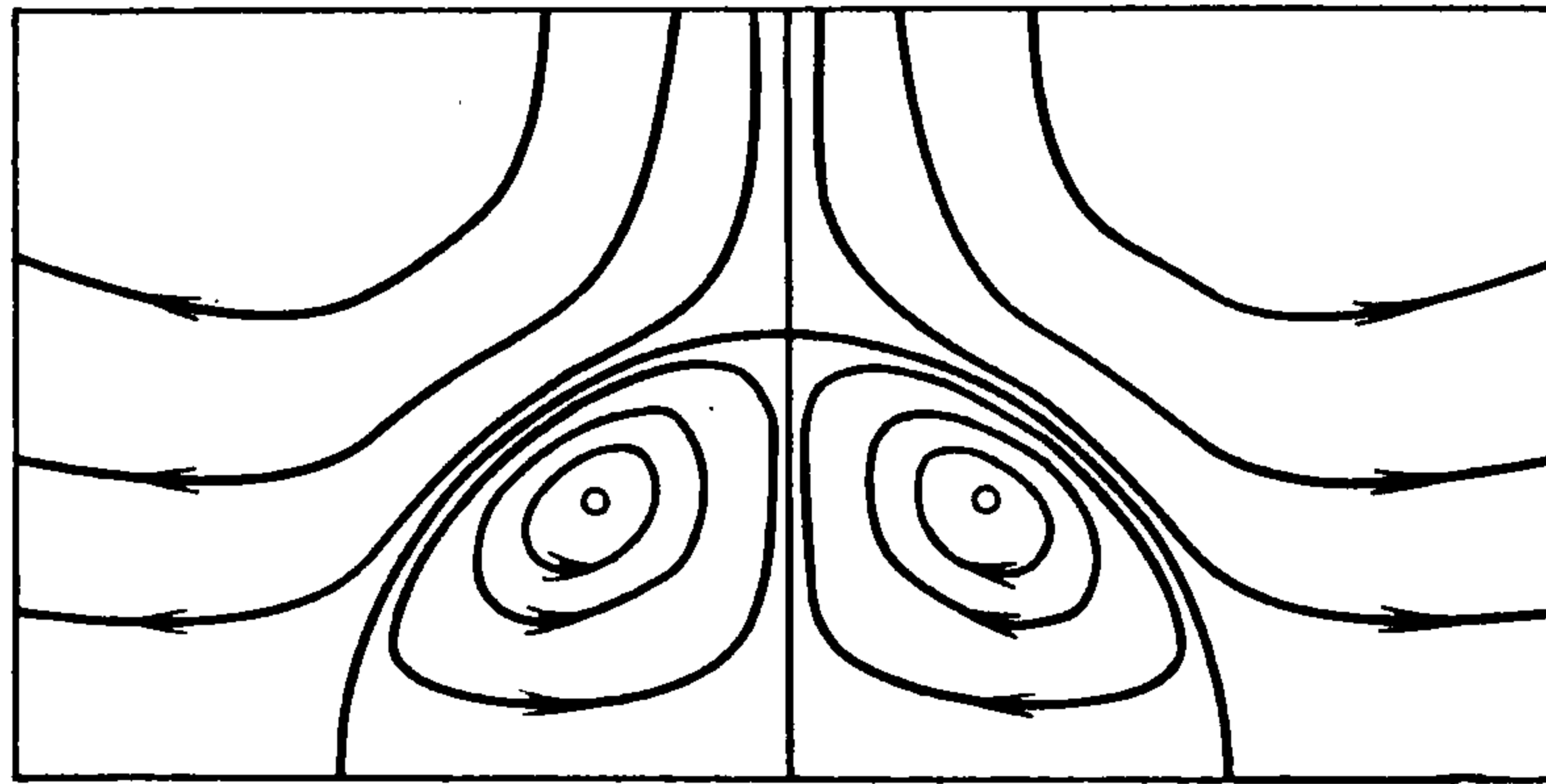
(эта скорость достигается при $\theta = \pi/4, 3\pi/4$, т. е. в точках поверхности капли, равноудаленных от ПР и от нормали к ней, проведенной через центр масс капли).

Например, для пузырька воздуха радиуса $a = 10^{-3} m$ в водном растворе *n*-гептанола с концентрацией $7,6 \cdot 10^{-3} M$, находящегося в ПР, при наличии внешнего градиента температуры $S_\infty = 100 \text{ град}/m$ максимальная скорость течения на поверхности есть $U^\circ \cong 2,2 \cdot 10^{-5} m/c = 1,3 \text{ мм}/\text{мин}$.

Отметим, что течение вне и внутри капли, находящейся в ПР, будет стационарным независимо от выполнения условий (1.3).

Картина линий тока представлена на фигуре. Стрелками показано направление течения. Поле скоростей имеет следующую структуру. Внутри капли имеются две вихревые нити в виде окружностей ($r = \sqrt[3]{5}$, $\mu = 1/\sqrt{3}$ и $r = \sqrt[3]{5}$, $\mu = -1/\sqrt{3}$) радиуса $\sqrt[2]{5}$, расположенных параллельно ПР и симметрично относительно центра масс капли на расстоянии

$2/\sqrt{5}$ друг от друга. Вне капли на больших расстояниях от ее центра жидкость течет вдоль лучей $\mu = \text{const}$, причем при $-1/\sqrt{3} < \mu < 1/\sqrt{3}$ по направлению к капле, а при $-1 \leq \mu < -1/\sqrt{3}$ и $1/\sqrt{3} < \mu \leq 1$ — от капли. Лучи $\mu = \pm 1/\sqrt{3}$ характеризуются обращением в нуль радиаль-



ной компоненты скорости, и каждая внешняя линия тока максимально приближается к центру капли в точке ее пересечения с одним из данных лучей.

Случай наличия у зависимости (3.1) максимума ($\alpha < 0$) рассматривается аналогично. Картина линий тока будет иметь тот же вид, только направление течения изменится на противоположное.

Форма поверхности капли, когда последняя находится в плоскости устойчивого равновесия в случае зависимости (3.1) ($\alpha > 0$), при учете соотношений (2.12), (2.13), (2.17), (2.5), (3.2) определяется выражением

$$R(\mu) = 1 - \frac{3\alpha (aS_\infty)^2 (\beta + 4)}{20 (2 + \delta)^2 (\beta + 1) \sigma_0} P_2(\mu) \quad (4.3)$$

Полученный результат показывает, что поверхность капли с точностью до членов $o(\varepsilon)$ представляет собой эллипсоид вращения, сплюснутый вдоль направления внешнего градиента температуры, отношение длин главных полуосей которого определяется выражением

$$\frac{b}{c} = 1 + \frac{9\alpha (aS_\infty)^2 (\beta + 4)}{40 (2 + \delta)^2 (\beta + 1) \sigma_0} \quad (4.4)$$

Здесь c — длина полуоси вдоль направления внешнего градиента температуры, b — длина другой полуоси.

Результаты (4.3), (4.4) имеют место и в случае, когда зависимость (3.1) содержит максимум ($\alpha < 0$). При этом эллипсоид вращения растянут вдоль направления внешнего градиента температуры.

Как видно из (4.3), (4.4), отклонение формы поверхности от сферической тем больше, чем больше размер капли и величина внешнего градиента температуры.

Для численных значений, приведенных выше, $b/c = 1 + 4 \cdot 10^{-7}$, т. е. отклонение формы пузырька от сферической в этом случае ничтожно.

В заключение заметим, что анализ, аналогичный приведенному, можно сделать и при наличии силы тяжести, параллельной внешнему градиенту температуры, если при этом гравитационная конвекция незначительна. Скорость движения найдется из условия обращения в нуль действующей на каплю полной силы, равной сумме силы (2.7) и массовой силы. При нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры также возможно существование ПР (в случае линейной зависимости ПР нет или любая плоскость является ПР). Качественный анализ

их устойчивости проводится полностью аналогично случаю отсутствия гравитации. Можно также показать, что в рассматриваемом здесь приближении наличие силы тяжести никак не повлияет на форму поверхности, поскольку, как видно из соотношений (2.12), (2.13), (2.17), (2.5), она не зависит от скорости движения капли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Young N. O., Goldstein J. S., Block M. G. The motion of bubbles in a vertical temperature gradient // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt 3. P. 350—356.
2. Братухин Ю. К. Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 156—161.
3. Яламов Ю. И., Санасарян А. С. Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде // Инж-физ. журн. 1975. Т. 28. № 6. С. 1061—1064.
4. Vochten R., Petre G., Defay R. Study of the heat of Reversible adsorption at the air-solution interface. I; Thermodynamical calculation of the heat of reversible adsorption of nonionic surfactants // J. Colloid Interface Sci. 1973. V. 42. № 2. P. 310—319.
5. Vochten R., Petre G. Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. II; Experimental Determination of the heat of reversible adsorption of some alcohols // J. Colloid Interface Sci. 1973. V. 42. № 2. P. 320—327.
6. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.VI.1988