

УДК 532.526

В. А. Батищев

**АСИМПТОТИКА НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ  
СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ  
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ**

При больших числах Марангони строятся формальные асимптотические разложения решения стационарной задачи о термокапиллярном течении жидкости в неограниченной области при неравномерном нагреве свободной границы. Вблизи свободной поверхности формируется нелинейный пограничный слой, для которого найдены автомодельные решения в окрестности критической точки. Медленное течение вне пограничного слоя удовлетворяет уравнениям идеальной жидкости. Получено уравнение свободной границы, которое при обращении в нуль градиента температуры переходит в известное уравнение равновесной свободной границы капиллярной жидкости. Проведены численные расчеты формы мениска у вертикальной твердой стенки, свободной границы жидкости, налитой на горизонтальную поверхность в плоском и осесимметричном случаях, рассчитана поверхность газового пузыря, примыкающего к стенке в нагретой жидкости.

Ранее были сформулированы [1] и изучены [2—6] нелинейные уравнения стационарного пограничного слоя Марангони вблизи свободной границы неравномерно нагретой жидкости вследствие термокапиллярного эффекта. Построены [7] асимптотические разложения решения стационарной задачи о течении маловязкой жидкости под действием касательных напряжений

1. При исчезающей вязкости  $\nu \rightarrow 0$  для системы уравнений Навье — Стокса рассматривается стационарная задача о течении несжимаемой жидкости в неограниченной области  $D$  под действием термокапиллярных сил, вызванных неравномерным нагревом свободной поверхности  $\Gamma$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$p = 2\nu \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} + \sigma (\kappa_1 + \kappa_2) + p_*, \quad 2\nu \rho \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} - \\ - 2\nu \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \nabla_1 \sigma, \quad (x, y, z) \in \Gamma; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{v} |_L = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — вектор скорости,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_z$  — орт оси  $z$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе  $\Gamma$ ,  $\mathbf{\Pi}$  — тензор скоростей деформации,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — главные кривизны поверхности  $\Gamma$ ,  $p_*$  — заданное давление на  $\Gamma$ ,  $\nabla_1 = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}$  — градиент вдоль  $\Gamma$ ,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения, считается линейной функцией температуры  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T (T - T_*)$ , где  $\sigma_0$ ,  $\sigma_T$ ,  $T_*$  — известные постоянные,  $\sigma_T < 0$ , а температура задана вдоль  $\Gamma$ ;  $L$  — твердая граница. Поле скоростей на бесконечности исчезает.

Вблизи свободной границы и твердой стенки при малой вязкости формируются нелинейные пограничные слои. В неограниченной области всюду вне пограничных слоев течение приближенно описывается уравнениями Эйлера. Ниже при  $\nu \rightarrow 0$  строятся формальные асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2). Задача приводится к безразмерному виду и вводится малый параметр  $\varepsilon = M^{-1/3}$ , где  $M = |\sigma_T| d^2 A \rho^{-1} \nu^{-2}$  — число Марангони,  $d$  и  $A$  — характерные масштабы длины и градиента температуры. Отметим, что малым  $\varepsilon$  соответствуют малые  $\nu$  или большие зна-

чения градиента температуры. Безразмерное давление  $p'$  определяется соотношением  $p = Pp' + p_0$ , где  $p_0 = -\rho g z$  — гидростатическое давление.  $P = \sigma_0 d^{-1}$  — масштаб давления. Характерное значение скорости  $U = (\sigma_T^2 A^2 d \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/2}$  в пограничном слое вблизи свободной границы принимается за масштаб скорости. Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon (\mathbf{h}_1 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + \dots, \quad \zeta \sim \zeta_0 + \varepsilon \zeta_1 + \dots, \quad p' \sim \lambda q_0 + \lambda \varepsilon (p_1 + q_1 + r_1) + \dots; \quad \lambda = |\sigma_T| A d \sigma_0^{-1} \quad (1.3)$$

Здесь  $\lambda$  — «капиллярная константа» [3],  $z = \zeta(x, y)$  — уравнение свободной границы. Пусть  $D_\Gamma$  — область пограничного слоя вблизи свободной границы,  $D_L$  — вблизи твердой стенки. Тогда  $\mathbf{h}_k, q_k$  — функции типа решений задачи пограничного слоя в области  $D_\Gamma$ ;  $\mathbf{w}_1, r_1$  — в области  $D_L$ , а  $\mathbf{v}_1, p_1$  определяют решение задачи вне областей  $D_\Gamma, D_L$ . Отметим, что масштаб скорости, порядки главных членов в разложении (1.3) и порядок толщины пограничного слоя в области  $D_\Gamma$  находятся из условия равенства порядков вязких и инерционных членов в системе Навье — Стокса, а также в краевых условиях (1.2) для касательных напряжений. В этом случае толщина пограничного слоя в области  $D_\Gamma$  имеет порядок  $\varepsilon$ .

2. Краевая задача для главных членов асимптотики (1.3), определяющих течение в пограничном слое вблизи свободной границы, получается применением к системе (1.1), (1.2) второго итерационного процесса методом Вишика — Люстерника [8]. Вблизи поверхности  $\Gamma$  введем локальные ортогональные координаты  $\xi, \varphi, \theta$  по формулам

$$x = X(\varphi, \theta) - \xi n_x, \quad y = Y(\varphi, \theta) - \xi n_y, \quad z = Z(\varphi, \theta) - \xi n_z$$

Здесь  $x = X(\varphi, \theta), y = Y(\varphi, \theta), z = Z(\varphi, \theta)$  — уравнение поверхности  $\Gamma$  в параметрической форме,  $\xi$  — расстояние точки  $(x, y, z)$  до поверхности  $\Gamma$ ;  $n_x, n_y, n_z$  — компоненты вектора  $\mathbf{n}$ . Поверхности  $\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}$  образуют два семейства ортогональных поверхностей, которые выбираются так, чтобы линии их пересечения с  $\Gamma$  образовывали линии главных кривизн. Предполагается, что отрезки нормалей к  $\Gamma$  при достаточно малых  $\xi$  не пересекаются.

Пусть  $h_{\varphi k}, h_{\theta k}, h_{\xi k}$  — компоненты вектора  $\mathbf{h}_k$  в локальных координатах. Подставляем (1.3) в (1.1), (1.2), разлагаем  $\mathbf{v}_1, p_1$  в ряды Тейлора по степеням  $\xi$  и вводим преобразование растяжения  $\xi = \varepsilon s$ . Приравнявая нулю коэффициенты при  $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0$ , выводим, что  $h_{\xi 0} = 0$ , а  $h_{\varphi 0}, h_{\theta 0}$  удовлетворяют уравнениям пограничного слоя Прандтля.

Приведем краевую задачу для  $h_{\varphi 0}, H_{\xi 1}$  в осесимметричном и плоском случаях

$$g_\varphi^{-1} h_{\varphi 0} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + H_{\xi 1} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} = \frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial (h_{\varphi 0} g_\theta)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial s} (g_\varphi g_\theta H_{\xi 1}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} = -g_\varphi^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \quad H_{\xi 1} = 0 \quad (s = 0); \quad h_{\varphi 0} = 0 \quad (s = \infty)$$

$$H_{\xi 1} = h_{\xi 1} + v_{\xi 1} |_\Gamma$$

Здесь  $g_\varphi, g_\theta$  — коэффициенты Лямэ поверхности  $\Gamma$ . Отметим, что в плоском случае  $g_\theta = 1$ , а в осесимметричном  $g_\theta = r$ , где  $r$  — расстояние до оси симметрии. Если  $\varphi$  — длина дуги вдоль  $\Gamma$ , то  $g_\varphi = 1$ . Вектор — функция  $\mathbf{h}_1$  удовлетворяет линейной краевой задаче, которая здесь не приводится.

Отметим, что задача (2.1) для плоского пограничного слоя на отрезке  $\varphi \in [0, l]$  при заданном начальном профиле скорости  $h_{\varphi 0} = f(s)$  ( $\varphi = 0$ ) изучена в [6], где найдены условия разрешимости.

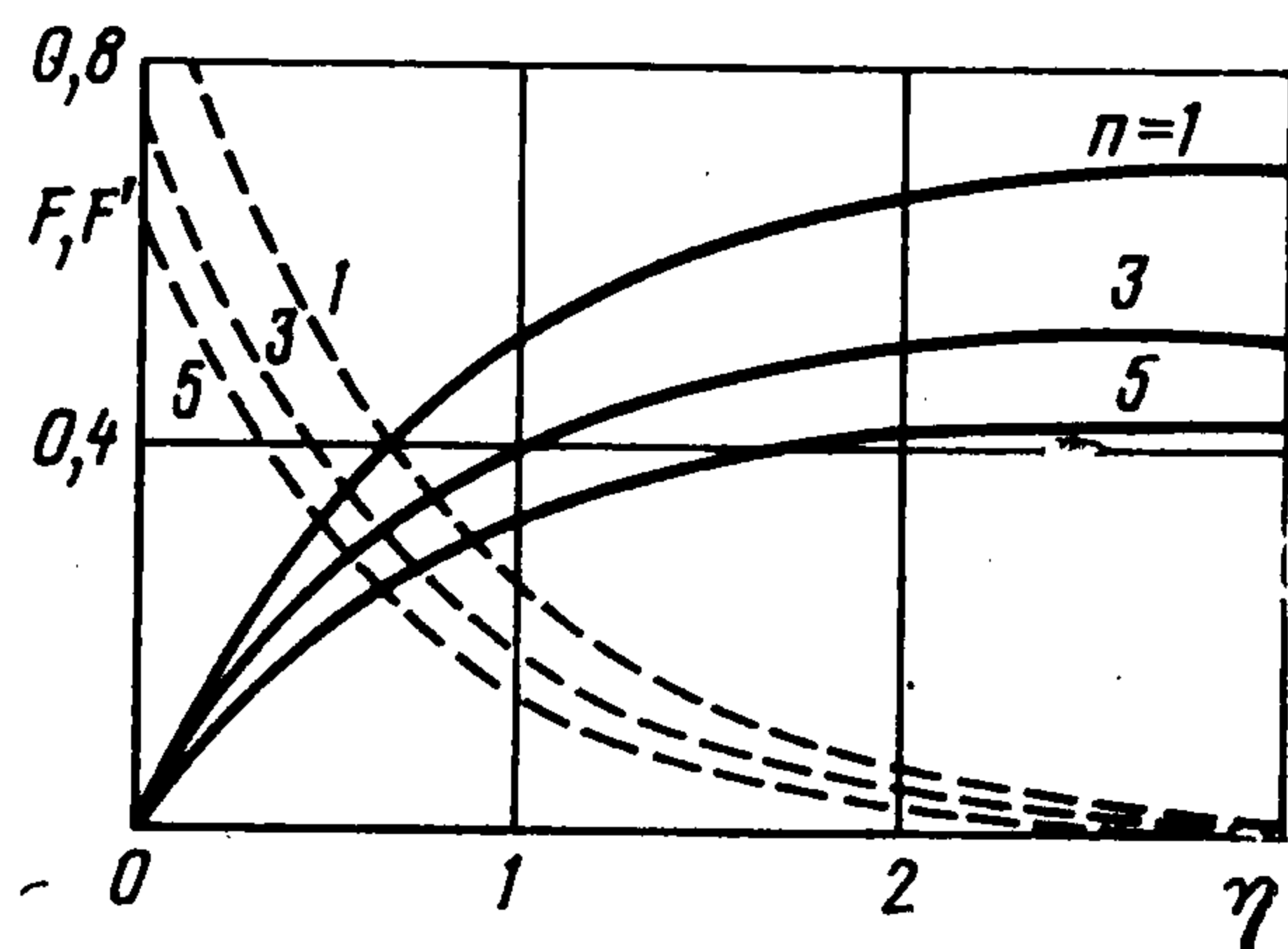
Приведем автомодельные решения задачи (2.1) в осесимметричном случае в окрестности критической точки. Отметим, что в плоском случае автомодельные решения найдены в [2], а в [5] получены преобразования Манглера для осесимметричных пограничных слоев вблизи свободной границы. Пусть коэффициент поверхностного натяжения зависит от координаты  $\varphi$  по степенному закону  $\partial\sigma/\partial\varphi = a\varphi^n$ , где  $\varphi$  — длина дуги. Полагая в (2.1)  $g_\varphi = 1$ ,  $g_\theta = r$  и предположим, что  $r = r_0\varphi$ . Введем функцию тока  $\psi$  соотношениями  $h_{\varphi 0} = \partial\psi/\partial s$ ,  $H_{\xi 1} = -r^{-1}\partial(r\psi)/\partial\varphi$  и обозначим  $\eta_1 = s\varphi^{(n-1)/3}$ . Представляя  $\psi$  в виде  $\psi = \varphi^{(n+2)/3}F_1(\eta_1)$ , для  $F_1(\eta_1)$  выведем краевую задачу (начальный профиль задавать не надо, так как он определяется условием автомодельности)

$$3F_1''' + (n+5)F_1F_1'' - (2n+1)F_1'^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$F_1(0) = F_1'(\infty) = 0, \quad F_1''(0) = -a$$

Интегрируя уравнение (2.2) на полуоси  $(0, \infty)$ , находим, что  $a(n+2) > 0$ . При  $n = 4$  существует точное экспоненциальное решение

$$F_1 = 1/3 (3a)^{1/3} [1 - \exp(-(3a)^{1/3}\eta_1)]$$



Фиг. 1

Задача (2.2) интегрировалась численно для разных  $n$ . На фиг. 1 приведены профили функций  $F(\eta)$  (сплошные линии) и  $F'(\eta)$  (штриховые линии), где  $\eta = a^{1/3}\eta_1$  и  $F = a^{-1/3}F_1$ . Функции  $F(\eta)$  монотонно возрастают и стремятся при  $\eta \rightarrow \infty$  к конечным пределам 0,7124; 0,5341 и 0,4386 при  $n = 1; 3; 5$  соответственно.

Теперь определим главный член в асимптотическом разложении для давления в (1.3). Применяя второй итерационный процесс [8] к системе (1.1), спроектированной на нормаль к свободной границе, выводим уравнение для  $q_0$ , из которого следует

$$q_0 = -\kappa_1 \int_s^\infty h_{\varphi 0}^2 ds - \kappa_2 \int_s^\infty h_{\theta 0}^2 ds \quad (2.3)$$

Найдем значение  $q_0$  на свободной границе в плоском случае. Полагаем  $\kappa_2 = 0$  в (2.3), интегрируем первое уравнение в (2.1) по  $s$  на полуоси  $[0, \infty)$ , применяем интегрирование по частям и интегрируем полученное соотношение по  $\varphi$ . В результате выводим соотношение

$$\int_0^\infty h_{\varphi 0}^2 ds = \sigma(\varphi) - \sigma(\varphi_0) + \gamma, \quad \gamma = \int_0^\infty f_0^2 ds \quad (2.4)$$

Здесь  $f_0 = h_{\varphi 0}(s, \varphi_0)$  — профиль скорости в пограничном слое в сечении  $\varphi = \varphi_0$ . Заметим, что удобно выбрать такое  $\varphi_0$ , при котором известно значение  $f_0$ . Полагая  $s = 0$  в (2.3) и учитывая равенство (2.4), находим

$$q_0|_\Gamma = -\kappa_1 [2\sigma(\varphi) - \sigma(\varphi_0) + \gamma] \quad (2.5)$$

Аналогичные преобразования в осесимметричном случае приводят к соотношению

$$q_0|_\Gamma = -\kappa_1 g_\theta^{-1} \left[ \int_{\varphi_0}^\varphi g_\theta \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} d\varphi + \gamma g_\theta|_{\varphi=\varphi_0} \right] \quad (2.6)$$

Таким образом, если при некотором  $\varphi_0$  известен профиль скорости в пограничном слое, то давление на свободной границе с точностью до малых  $O(\varepsilon)$  определяется без решения задачи для пограничного слоя (2.1).

Функции  $v_1, p_1, \zeta_0$ , определяющие течение вне области пограничного слоя и асимптотическую форму свободной границы, получаются применением первого итерационного процесса [8] к системе (1.1), (1.2). Для  $v_1, p_1$  получаем уравнения Эйлера идеальной жидкости. Обозначим  $\Gamma_0$  свободную границу невязкого течения, определяемую уравнением  $z = \zeta_0$ . Вблизи  $\Gamma_0$  вводим локальные ортогональные координаты  $\xi_1, \varphi_1, \theta_1$ , где  $\xi_1$  — расстояние до  $\Gamma_0$ . Главные кривизны поверхности  $\Gamma$  представляем в виде рядов  $\kappa = \kappa_{10} + \varepsilon\kappa_{11} + \dots$ ,  $\kappa_2 = \kappa_{20} + \varepsilon\kappa_{21} + \dots$ , где  $\kappa_{10}, \kappa_{20}$  — главные кривизны поверхности  $\Gamma_0$ . Подставляя разложения (1.3) в динамическое условие для нормального напряжения (1.2) и приравнивая нулю коэффициент при  $\varepsilon^0$ , выводим уравнение границы  $\Gamma_0$ , которое при учете (2.5) запишем для плоской задачи в размерной форме

$$\kappa_{10} [2\sigma(\varphi) - \sigma(\varphi_0) + \gamma] = \rho g z + c \quad (2.7)$$

Приведем уравнение  $\Gamma_0$  в осесимметричном случае

$$\sigma(\kappa_{10} + \kappa_{20}) + \kappa_{10} g \theta^{-1} \left[ \int_{\varphi_0}^{\varphi} g \theta \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} d\varphi + \gamma g \theta |_{\varphi=\varphi_0} \right] = \rho g z + c \quad (2.8)$$

Отметим, что при  $\lambda = 0$  ( $\sigma = \text{const}$ ) уравнения (2.7), (2.8) определяют равновесную свободную поверхность капиллярной жидкости в поле сил тяжести [9] при отсутствии нагрева. Невязкое течение вне пограничных слоев определяется путем решения краевой задачи

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 &= -\nabla p_1, \quad \text{div } \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_0 |_{\Gamma_0} &= -H_{\xi_1} |_{\xi=\infty}; \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 |_L = 0, \quad \mathbf{v}_1 |_{\infty} = 0 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma_0$ ,  $\mathbf{n}_1$  — вектор нормали к твердой стенке.

Вектор-функция  $\mathbf{w}_1$  определяет поле скоростей в пограничном слое вблизи твердой границы  $L$  и компенсирует невязку, возникающую при выполнении вектором  $\mathbf{v}_1$  условия прилипания на  $L$ . Краевая задача для  $\mathbf{w}_1, r_1$  не приводится, так как эти функции дают вклад в уравнение свободной границы в высших приближениях, начиная со второго.

3. Рассмотрим случай, когда уравнение свободной границы определяется через квадратуры. Предположим, что течение жидкости плоское, а поле сил тяжести отсутствует ( $g = 0$ ). Пусть  $\varphi$  — длина дуги контура  $\Gamma_0$ . Запишем (2.7) в параметрической форме. Уравнение линии  $\Gamma_0$  представим в виде  $x = x(\varphi)$ ,  $z = z(\varphi)$ . Обозначим  $\beta(\varphi)$  угол наклона к оси  $x$  элемента линии  $\Gamma_0$ , полученного при возрастании  $\varphi$ . Тогда  $x' = \cos \beta$ ,  $z' = \sin \beta$ . Уравнение границы  $\Gamma_0$  принимает вид

$$\begin{aligned} [2\sigma(\varphi) - \sigma(\varphi_0) + \gamma] x'' &= \pm c z' \\ [2\sigma(\varphi) - \sigma(\varphi_0) + \gamma] z'' &= \pm c x', \quad c = \text{const} \end{aligned}$$

где верхний или нижний знак выбирается в соответствии с тем, будет ли жидкость расположена под поверхностью  $\Gamma_0$  относительно оси  $z$  или над ней. Можно показать, что  $\beta(\varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{\pm c}{2\sigma(\varphi) - \sigma(\varphi_0) + \gamma}$$

Теперь, определив  $\beta(\varphi)$ , находим уравнение границы

$$x = c_1 + \int_0^\varphi \cos \beta d\varphi, \quad z = c_2 + \int_0^\varphi \sin \beta d\varphi$$

$$\beta = c_3 \pm c \int_0^\varphi [2\sigma(\varphi) - \sigma(\varphi_0) + \gamma]^{-1} d\varphi$$

Здесь  $c_1, c_2$  определяют декартовы координаты точки отсчета  $N$  длины дуги  $\varphi$ , а постоянная  $c_3$  — угол наклона касательной к  $\Gamma_0$  в точке  $N$ . Постоянная  $c$  находится из дополнительных условий в каждом конкретном случае.

4. Определим форму свободной поверхности в поле тяжести в случае, когда жидкость примыкает к вертикальной твердой стенке  $x = 0$  с одной стороны  $x \geq 0$ . Предположим, что вдоль  $\Gamma$  задан отрицательный градиент температуры  $\partial T/\partial \varphi < 0$ . Отсчет параметра  $\varphi$  (длины дуги  $\Gamma$ ) выберем от стенки в сторону возрастания  $x$ . Распределение температуры определим по формуле  $T - T_* = AdG(\varphi)$ , тогда коэффициент поверхностного натяжения представим в виде  $\sigma = \sigma_0(1 - \lambda G(\varphi))$ , где  $\lambda = |\sigma_T A| d\sigma_0^{-1}$  — капиллярная константа. Всюду ниже функцию  $G(\varphi)$  считаем кусочно-линейной:  $G(\varphi) = 1 - \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 1$ ),  $G = 0$  ( $\varphi > 1$ ). Здесь учтено, что  $f_0(s) = 0$  в (2.7).

Уравнение пограничного слоя (2.1) в плоском случае при  $0 \leq \varphi \leq 1$  имеет автомодельное решение  $h_{\varphi_0} = \varphi^{1/2} d\Phi(\eta)/d\eta$ , где  $\eta = s\varphi^{-1/2}$ , а  $\Phi(\eta)$  удовлетворяет краевой задаче (2.2), в которой коэффициенты  $n + 5$  и  $2n + 1$  следует заменить соответственно на 2 и 1. Задача для  $\Phi(\eta)$  численно решена в [2]. Выбирая  $\varphi_0 = 0$ , выводим  $f_0 = h_{\varphi_0}|_{\varphi=0} = 0$ . Теперь уравнение свободной границы (2.7) запишем в безразмерной форме

$$\xi_0'' (1 + \xi_0'^2)^{-3/2} (1 + \lambda G_1(\varphi)) = \xi_0 B + c$$

$$B = \rho g d^2 \sigma_0^{-1}, \quad G_1 = G(0) - 2G(\varphi) \quad (4.1)$$

где  $B$  — число Бонда, штрих означает производную по  $x$ .

Для уравнения (4.1) поставим краевые условия  $\xi_0'(0) = \operatorname{tg} \beta_0$ ,  $\xi_0(\infty) = 0$ , где  $\beta_0$  — угол между касательной к  $\Gamma$  и осью  $x$  в точке контакта  $x = 0$ .

Уравнение (4.1) интегрировалось численно для различных значений  $\lambda$  и  $\beta_0$ . На фиг. 2 сплошные кривые изображают форму свободной границы при  $B = 1$ ,  $\beta_0 = -\pi/3$  и разных значениях  $\lambda$ . Высота мениска  $h = \xi_0(0)$  уменьшается с ростом  $\lambda$  и достигает значения 0,414 при  $\lambda = 0,99$ . Отметим, что  $h = 2 |\sin 1/2 \beta_0|$  при  $\lambda = 0$  (в отсутствие градиента температуры). Уравнение свободной границы при  $\lambda = 0$  выражается в конечном виде через элементарные функции [9].

В частном случае, когда  $|\beta_0| \ll 1$ ,  $|\xi_0'| \ll 1$ , уравнение (4.1) линеаризуется и имеет решение

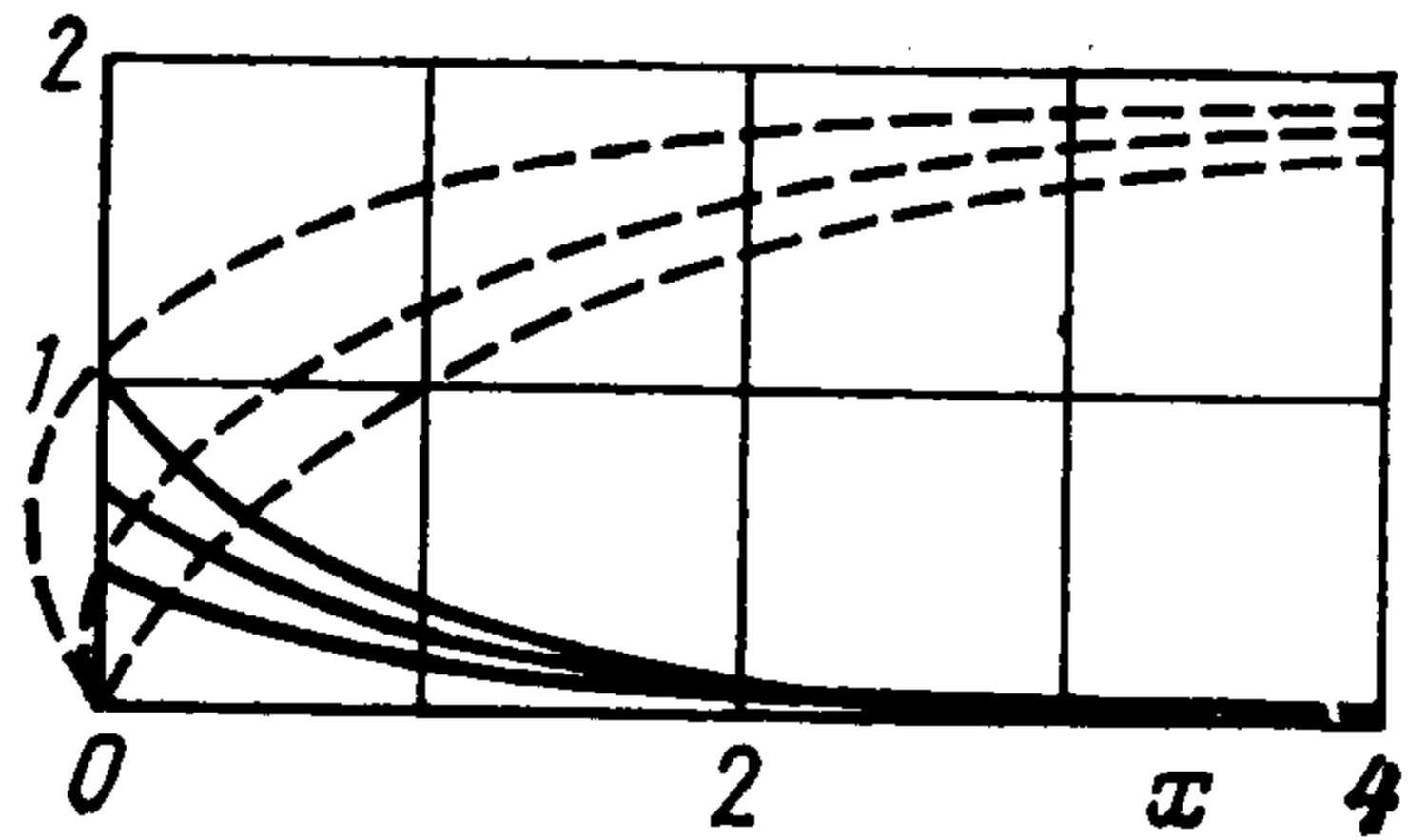
$$\xi_0 = (1 + 2\lambda x)^{1/2} B^{-1/2} [A_1 K(\lambda^{-1} \sqrt{B(1 + 2\lambda x)}) +$$

$$+ A_2 I_1(\lambda^{-1} \sqrt{B(1 + 2\lambda x)})] \quad (0 \leq x \leq 1)$$

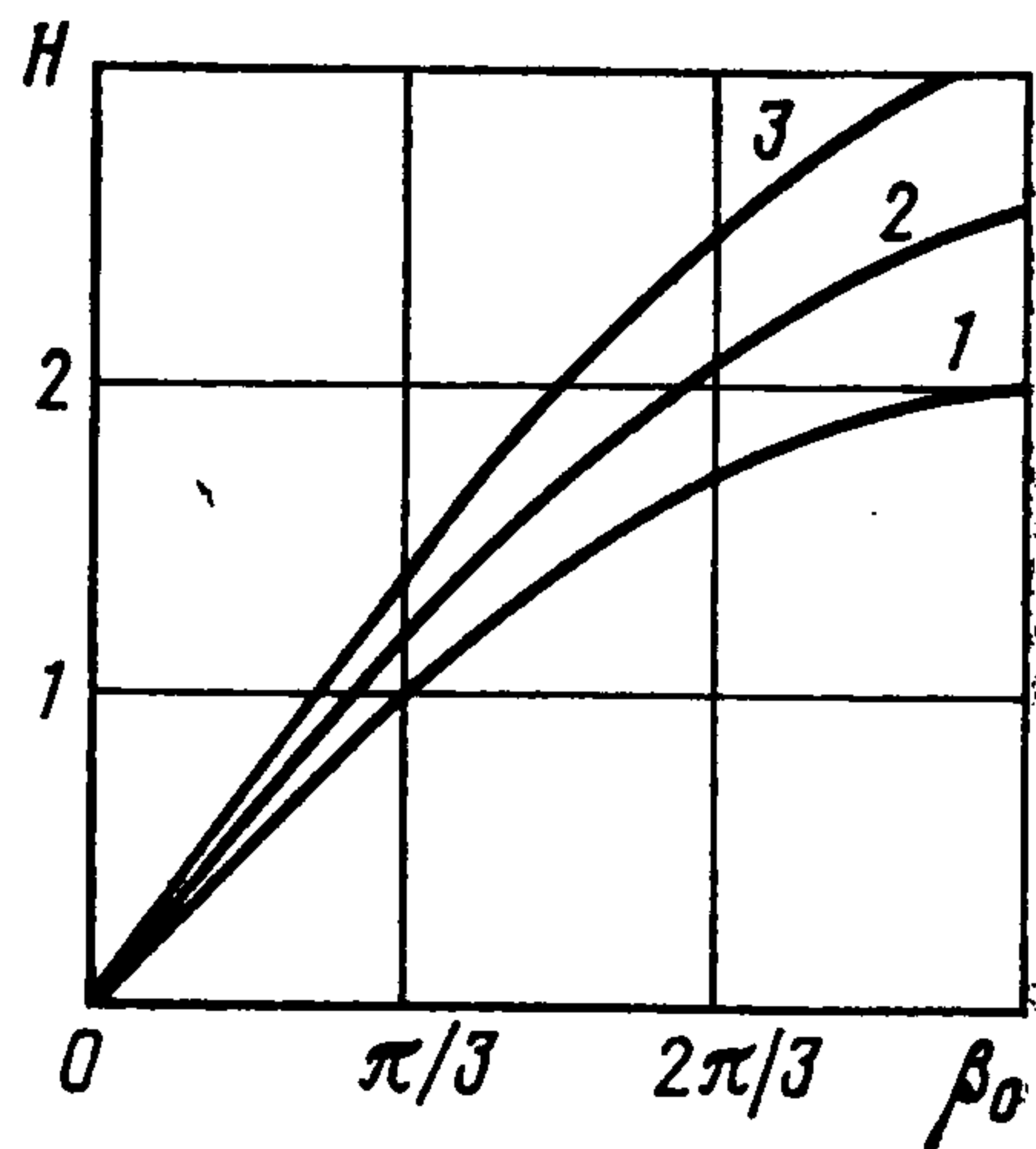
$$\xi_0 = A_3 \exp(-x \sqrt{B(1 + 2\lambda)}) \quad (x > 1)$$

$K_1(t)$ ,  $I_1(t)$  — модифицированные функции Бесселя. Постоянные  $A_1, A_2, A_3$  выражаются через  $\operatorname{tg} \beta_0$  и не приводятся ввиду громоздкости.

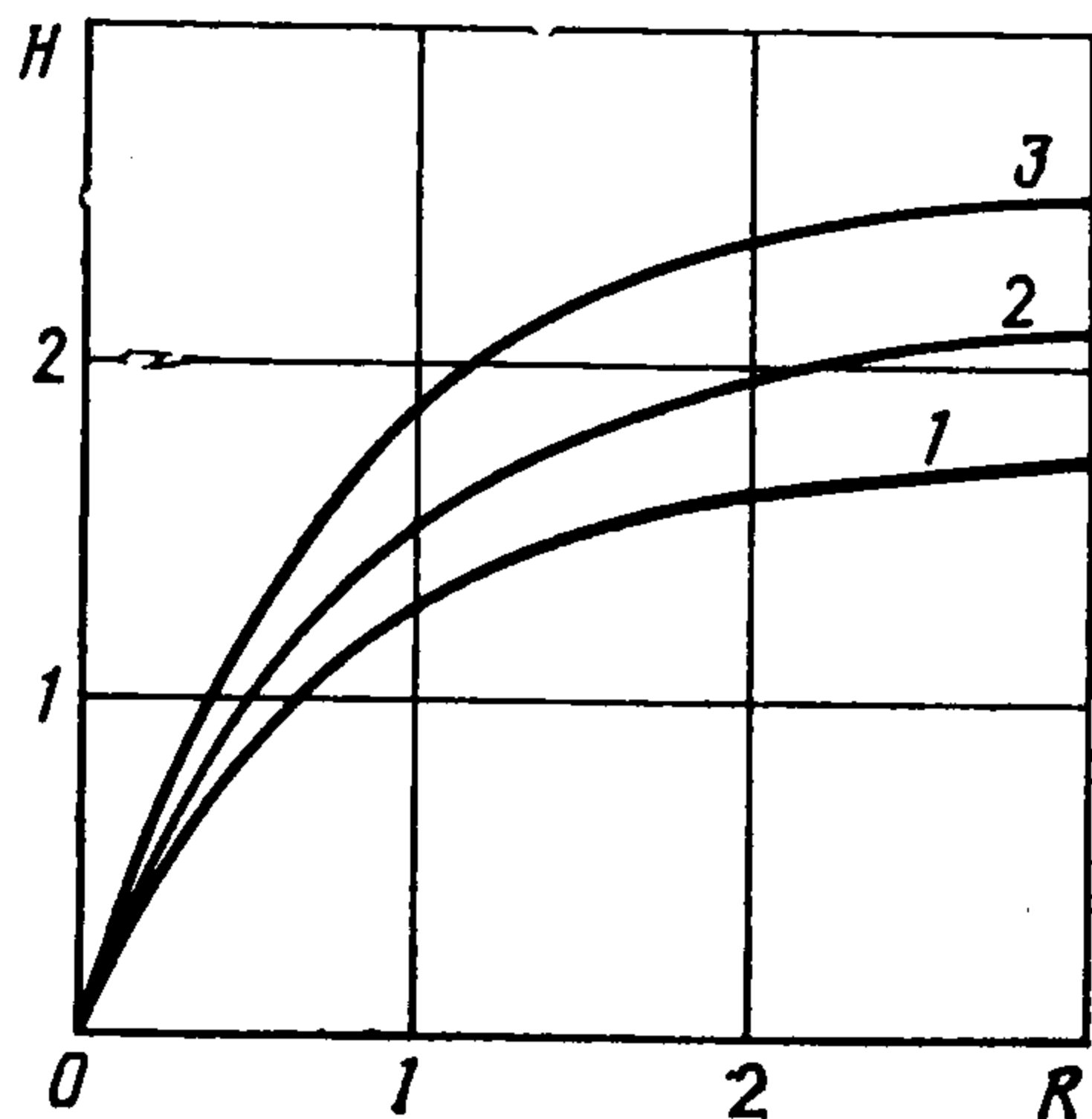
Найдем форму свободной границы жидкости, налитой на горизонтальную твердую стенку и смачивающей эту поверхность в полуплоскости



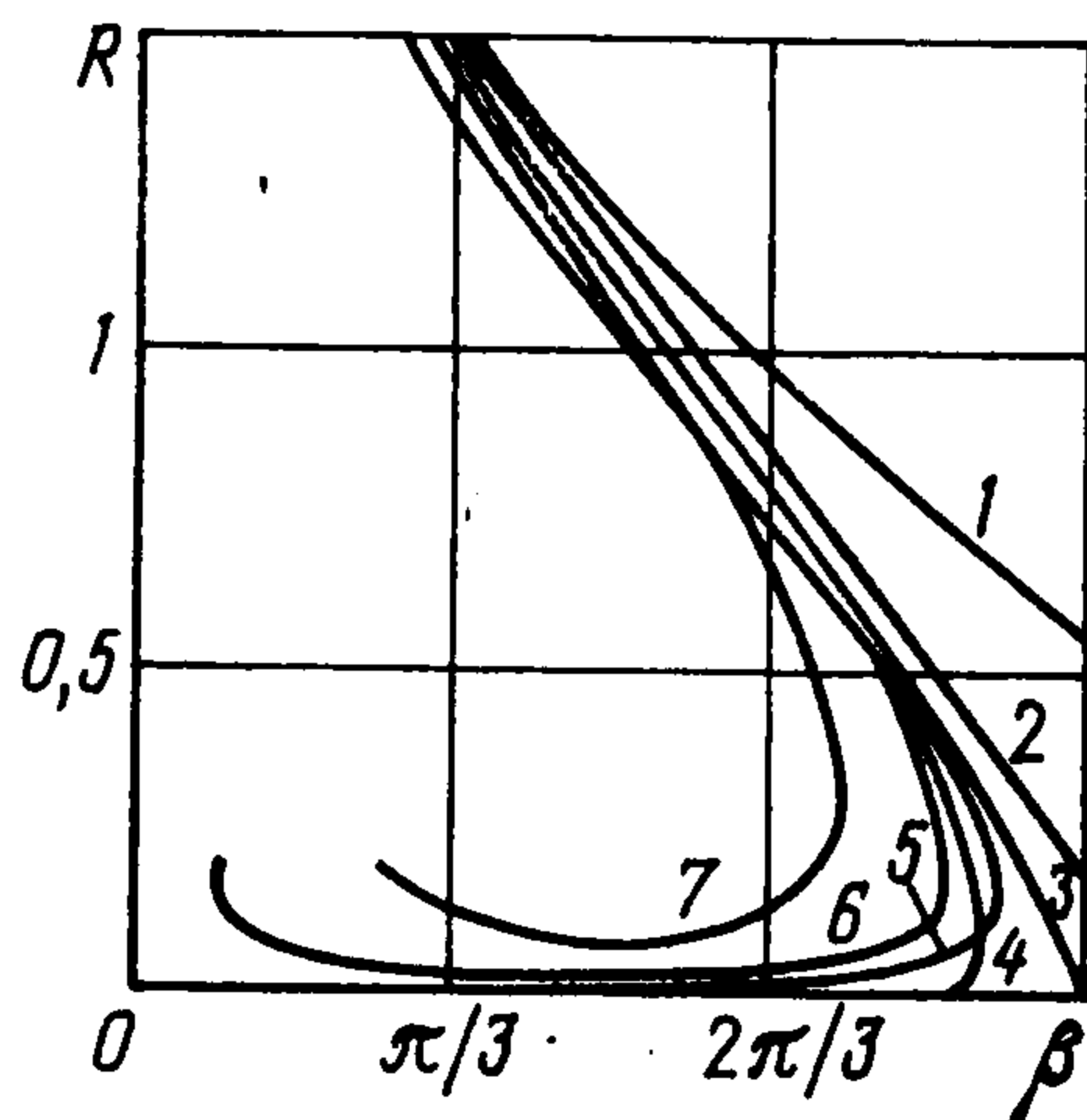
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$x \geq 0$ . Линия смачивания  $x = 0, z = 0$ . Пусть  $\beta_0$  — угол смачивания [9]. Уравнение свободной границы получается интегрированием (4.1) при условиях  $\xi_0'(0) = \text{tg } \beta_0, \xi_0'(\infty) = 0$ .

При численном интегрировании уравнение (4.1) записывается в параметрической форме с длиной дуги в качестве параметра и определяется постоянная  $c$ , через которую выражается толщина слоя  $H = -cB^{-1}$ . На фиг. 3 изображена зависимость толщины слоя от величины угла смачивания  $H(\beta_0)$  для значений  $\lambda = 0; 0,333; 0,5$  при числах Бонда, равных 1; 0,666; 0,5 соответственно (кривые 1; 2; 3). Отметим, что при  $\beta_0 = \text{const}$  и фиксированном  $\lambda$  толщина  $H$  увеличивается с убыванием  $B$ , а при  $B = \text{const}$  толщина  $H$  убывает с ростом  $\lambda$  (отметим, что  $H = 1,17$  при  $\lambda = 0,99$  и  $B = 1$ ). На фиг. 2 штриховые кривые изображают форму свободной границы при  $H = 1,9$  и разных значениях  $\lambda$ . Для заданного  $H$  при  $B = \text{const}$  с ростом градиента температуры угол смачивания увеличивается.

Отметим, что в (1.3) не входят функции пограничного слоя, проявляющие себя в окрестности линии контакта свободной границы и твердой стенки. Здесь асимптотические разложения носят более сложный характер, чем (1.3). Уравнение пограничного слоя в этой области совпадает с полными уравнениями Навье — Стокса. Функции пограничного слоя дают вклад в уравнение свободной границы лишь в высших приближениях и потому здесь не приводятся. Асимптотическое исследование системы Навье — Стокса вблизи линии контакта приведено в [10, 11].

5. Расчет асимптотической формы свободной границы в осесимметричном случае проводится при помощи уравнения (2.8). Определим форму отверстия в безграничном слое жидкости, налитой на горизонтальную плоскость. Пусть вдоль поверхности  $\Gamma$  задано распределение температуры  $T - T_* = AdG(\varphi)$ , где функция  $G(\varphi)$  определена в предыдущем при-

мере,  $\varphi$  — длина дуги поверхности  $\Gamma$  в осевом сечении, отсчитываемая от линии контакта  $\Gamma$  и стенки. Выбирая  $\varphi_0 = 0$  так же, как и в предыдущем примере, выводим  $f_0(s) = 0$ , а уравнение (2.8) запишем в безразмерной форме

$$\frac{(rz')'}{rr'} (1 - \lambda G(\varphi)) + \frac{r'z'' - z'r''}{r} \int_0^\varphi r \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} d\varphi = c + zB$$

$$r'^2 + z'^2 = 1 \quad (5.1)$$

где  $r(\varphi)$ ,  $z(\varphi)$  — цилиндрические координаты поверхности  $\Gamma$ . Краевые условия запишем в виде  $r(0) = R$ ,  $z(0) = 0$ ,  $r'(0) = \cos \beta_0$ ,  $z'(0) = \sin \beta_0$ , где  $\beta_0$  — угол смачивания,  $R$  — радиус линии смачивания  $\Gamma$  и стенки. В (5.1) постоянная  $c$  неизвестна и определяется при дополнительном условии  $z'(\infty) = 0$ . Высота слоя жидкости находится по формуле  $H = -cB^{-1}$ . Система (5.1) интегрировалась численно с использованием метода Рунге — Кутты.

На фиг. 4 изображена зависимость высоты слоя от радиуса линии смачивания при  $\beta_0 = 150^\circ$ . Кривые 1; 2; 3 построены при значениях  $\lambda = 0$ ; 0,333; 0,5 для чисел Бонда, равных 1; 0,666; 0,5 соответственно. Для фиксированных  $\lambda$  и  $B$  при увеличении  $R$  высота  $H$  растет и достигает предельного значения при  $R = \infty$ . При фиксированных  $B$  и  $H$  угол  $\beta_0$  увеличивается с ростом  $\lambda$ .

6. Рассчитаем форму газового пузыря, примыкающего к горизонтальной твердой стенке в неравномерно нагретой жидкости в поле тяжести. Система (1.1) решается совместно с уравнением теплопроводности  $\text{Pr} \nabla \cdot \nabla T = \varepsilon^2 \Delta T$ , где  $\text{Pr}$  — число Прандтля. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  температура  $T$  разлагается в ряд вида (1.3) с коэффициентами  $T_k$ ,  $\theta_k$ , где  $T_k$  — внешнее решение, а  $\theta_k$  удовлетворяет уравнениям температурного пограничного слоя.

Предположим, что вне пограничного слоя задан постоянный градиент температуры  $\nabla T_0 = A e_z$ . При малых числах Прандтля  $\text{Pr} \ll 1$  выводим  $\theta_0 = 0$ . Тогда с точностью до  $O(\varepsilon)$  безразмерный коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 1 + \lambda z$ . Форма свободной границы определяется уравнением (2.8), где полагаем  $\varphi_0 = 0$ , т. е. сечение в пограничном слое выбираем на оси симметрии. Можно показать, что  $f_0 = 0$  в (2.8).

Отметим, что при  $\varphi \rightarrow 0$  из (2.8) следует:

$$z = 1/4 c \varphi^2 + \dots, \quad r = r_0 \varphi + \dots, \quad \partial \sigma / \partial \varphi = 1/2 c \varphi + \dots$$

( $r$  — расстояние до оси симметрии,  $\varphi$  — длина дуги  $\Gamma$ ). В окрестности критической точки решение уравнения пограничного слоя разлагается в ряд по степеням  $\varphi$  с коэффициентами, зависящими от  $s$ ,  $h_{\varphi 0} = \varphi F_1'(s) + \dots$ , где функция  $F_1(s)$  удовлетворяет уравнению (2.2) при  $n = 1$ . Отсюда выводим  $f_0 = 0$  в (2.8).

Итак, форма свободной границы  $z = \xi_0(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\xi_0''}{(1 + \xi_0'^2)^{3/2}} \left( 1 + 2\lambda \xi_0 - \frac{\lambda}{r} \int_0^r \xi_0 dr \right) + \frac{(1 + \lambda \xi_0) \xi_0'}{r \sqrt{1 + \xi_0'^2}} = B \xi_0 + c \quad (6.1)$$

При численном интегрировании уравнение (6.1) записывается в параметрической форме с длиной дуги в качестве параметра. Задавались угол  $\beta$ , где  $\pi - \beta$  — угол смачивания, постоянная  $\lambda$ , безразмерный объем пузыря  $V = 1$ , число Бонда, а определялись постоянная  $c$  и радиус линии смачивания  $R$ .

При  $r \rightarrow 0$  решение разлагалось в ряд по степеням  $\varphi$  [9] и сращивалось с численным.

На фиг. 5 изображена зависимость радиуса линии смачивания  $R$  от угла  $\beta$  при  $B = 0$ ;  $B = 0,1$  и  $B = 1$ . Кривые 1 ( $B = 1$ ) и 2 ( $B = 0,1$ ) соответствуют отсутствию градиента температуры  $\lambda = 0$ . С ростом  $\lambda$  при фиксированных  $\beta$  и  $B$  радиус  $R$  убывает и при некоторых  $\lambda = \lambda_*$  и  $c = c_*$  обращается в нуль. Например,  $\lambda_* = 0,022$ ;  $c_* = 2,182$  для  $B = 0,1$ ;  $\beta = \pi$  и  $\lambda_* = 0,234$ ;  $c_* = 2,063$  при  $B = 1$ ;  $\beta = \pi$ . Кривые 3 и 4 соответствуют  $\lambda = 0,022$ ;  $B = 0,1$  и  $\lambda = 0,3$ ;  $B = 1$ . Пузырь отрывается от стенки при  $\lambda = \lambda_*$ ,  $c = c_*$ . Для  $\lambda > \lambda_*$  также возможен отрыв пузыря от стенки, причем пузырь находится в равновесии под действием гравитационных и термокапиллярных сил, а свободная поверхность имеет угловую точку. Отметим, что радиус  $R$  может обращаться в нуль при  $\lambda_1 \leq \lambda_* \leq \lambda_2$ , например,  $\lambda_1 = 0,022$  и  $\lambda_2 = 0,047$  при  $B = 0,1$ . Кривая 5 соответствует  $\lambda = 0,047$  ( $B = 0,1$ ).

При  $\lambda > \lambda_1$  интегральные кривые уравнения (6.1) на плоскости  $r, z$  для некоторых значений  $c$  могут пересекать ось  $z$ , что не наблюдается при отсутствии градиента температуры [9]. Часть кривых имеет типичный вид интегральных кривых равновесной свободной границы ( $\lambda = 0$ ) для положительных перегрузок ( $g > 0$ ), а часть кривых — для отрицательных перегрузок [9].

При отсутствии сил тяжести ( $B = 0$ )  $R \neq 0$  для всех  $\beta$  и  $\lambda > 0$ . Пузырь примыкает к стенке под действием термокапиллярных сил. Кривые 6 и 7 на фиг. 5 соответствуют значениям  $\lambda = 0,01$  и  $\lambda = 0,1$ . При фиксированном  $\lambda$  существует максимальное значение угла контакта  $\beta_m$ , например  $\beta_m = 163^\circ$  при  $\lambda = 0,01$ . Расчеты показали, что при заданном  $\beta$  свободная поверхность вытягивается вдоль оси  $z$  при увеличении  $\lambda$  и  $c$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Napolitano L. G. Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. Sympos. on Material Science in Space, Grenoble, 1979. (ESA), P. 313—345. SP—142.
2. Napolitano L. G., Golia C. Coupled Marangoni boundary layers // Applications of Space Developments: Selection Pap. 31. Intern. Astronaut Congress. Tokyo. 1980. // Acta Astronautica. 1981. V. 8. № 5—6. P. 417—434.
3. Cowley S. J., Davis S. H. Viscous thermocapillary convection at high Marangony number // J. Fluid Mech. 1983. V. 135. P. 175—188.
4. Pucknachov V. V. Boundary layers near free surfaces // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers. Dublin: Bool Press, 1982. P. 97—110.
5. Napolitano L. G., Russo G. Similar axially symmetric Marangoni boundary layers // Acta Astronautica. 1984. V. 11. № 3—4. P. 189—198.
6. Кузнецов В. В. О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984. Вып. 67. С. 61—69.
7. Батищев В. А. Об асимптотике течений маловязкой жидкости при действии касательных напряжений на свободной границе // ПМТФ. 1987. № 5. С. 101—107.
8. Вишик М. А., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5 (77). С. 3—102.
9. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
10. Moffatt H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1984. V. 18. № 1. P. 1—18.
11. Солонников В. А. Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для стационарной системы уравнений Навье — Стокса // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 252—258.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
12.VII.1988