

УДК 532.526

М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн

АНАЛИЗ ПАРАДОКСА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЕВОЙ НИТИ С ПЛОСКОСТЬЮ

Показано, что в задаче о взаимодействии вихревой нити с перпендикулярной плоскостью кризис потери существования решения при конечном числе Рейнольдса связан с образованием в приосевой области предельно сильной индуцированной струи. В окрестности критической ситуации построены внешние и внутренние разложения, исчерпывающе характеризующие структуру решения. Обнаружено, что при задании циркуляции не на оси, а на конусе конечного угла раствора решение обретает существование при всех числах Рейнольдса. Рассмотрен предельный переход от конуса к вихревой нити.

Изучению проблемы взаимодействия вихревой нити с плоскостью посвящено большое число исследований, начиная с работы [1], где был установлен парадоксальный факт: решение с ограниченной меридиональной скоростью существует при числах Рейнольдса, не превышающих некоторый конечный предел, и не существует при больших. Детальное изложение этих результатов и обзор литературы до 1980 г. можно найти в [2]. Как показано в данной работе, парадокс связан с тем, что ось симметрии принадлежит области течения. Рассматриваемое движение можно интерпретировать как порожденное вращающейся иглой, перпендикулярной плоскости. Но в этом случае непосредственная окрестность иглы вследствие конечности размера последней будет областью неавтомоделности, которая остается вне рамок данного рассмотрения.

В работе Серрина [3] допускалась логарифмическая особенность на оси для продольной компоненты скорости. Коэффициент при логарифме служит параметром, дополнительным к циркуляции. Было показано, что на плоскости этих параметров расположена кривая, являющаяся границей существования решений рассматриваемого класса. Вопрос о величине коэффициента при логарифме решался путем дополнительной гипотезы феноменологического характера.

В настоящей работе избран другой путь. Ядро течения помещается в некоторый конус малого угла раствора, на поверхности которого задается циркуляция и другие подходящие граничные условия. Затем осуществляется предельный переход, когда угол уменьшается до нуля. Продольная компонента скорости внешнего течения остается ограниченной, а на оси в критической ситуации формируется особенность в виде линейного стока вполне определенной обильности. При числах Рейнольдса, превышающих критическое, предельный переход к вихревой нити дает одно и то же внешнее течение, совпадающее с критическим.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается стационарное осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости, порожденное полубесконечной вихревой нитью заданной циркуляции $2\pi\Gamma_1$. Нить упирается в неподвижную плоскость, на которой должны быть выполнены условия прилипания. Обобщением является задание течения типа вихресточка на непроницаемом конусе с полууглом раствора θ_1 .

В сферической системе координат r, θ, φ с полюсом на конце вихревой нити или в вершине конуса поле скоростей, соответствующее автомоделному решению поставленной задачи, имеет представление

$$v_r = -\frac{v}{r} y'(x), \quad v_\theta = -\frac{vy(x)}{r \sin \theta}, \quad v_\varphi = \frac{v\Gamma(x)}{r \sin \theta}, \quad x = \cos \theta \quad (1.1)$$

Здесь $y(x)$ — искомая безразмерная функция, связанная с функцией тока Ψ соотношением $\Psi = vry$, $\Gamma(x)$ — безразмерная искомая циркуля-

ция, связанная с заданной размерной циркуляцией соотношением $\Gamma_1 = \nu \Gamma(x_1) = \nu Re$, где $Re = \Gamma_1/\nu$ — число Рейнольдса.

Поскольку в постановке задачи отсутствует характерный масштаб длины и дана лишь величина Γ_1 , имеющая размерность кинематической вязкости, то автомодельность вида (1.1) обязательна: если решение существует, то оно автомодельно [4]. После подстановки представления (1.1) в уравнения Навье — Стокса получим (см., например, [2])

$$(1 - x^2)^2 y'''' - 4x(1 - x^2) y''' = 1/2 (1 - x^2) (y^2)''' + 2\Gamma\Gamma' \quad (1.2)$$

$$(1 - x^2) \Gamma'' = y\Gamma' \quad (1.3)$$

Таким образом, все разнообразие задач из этого автомодельного класса сводится к решению системы (1.2), (1.3) при соответствующих граничных условиях.

Наиболее общей краевой задачей является постановка граничных условий на конических поверхностях $x = x_1$ и $x = x_2$, $-1 \leq x_2 < x_1 \leq 1$. Например, на конусах $x_1, x_2 \neq \pm 1$ может быть задан вектор скорости в рамках представления (1.1). В этом случае коэффициенты уравнений (1.2), (1.3) не имеют особенностей на интервале интегрирования. И хотя для автомодельного класса (1.1) общие теоремы о существовании стационарных решений [5, 6] не применимы, разрешимость такой задачи по крайней мере при малых числах Рейнольдса не вызывает сомнений. Когда одна из полуосей принадлежит области течения, коэффициенты при старших производных обращаются в нуль при $|x| = 1$. Как будет показано ниже, это обстоятельство может радикально повлиять на свойства краевой задачи и ее разрешимость.

В обсуждаемой ситуации существует альтернатива: либо ось рассматривается как внутренность области течения и тогда на ней формулируются условия аналитичности, либо ось остается границей течения, на которой расположен источник движения, тогда на оси помещается вполне определенная особенность. Выделенным случаем является задача о безграничной области, где движение вызывается источником импульса в начале координат (струя Ландау [7]). Таким образом, движение может определяться либо граничными условиями, либо точечным источником. Заметим, что эти два случая являются взаимоисключающими.

При задании того и другого задача с очевидностью будет переопределенной, что находится в некотором противоречии с интуитивными представлениями о независимости и совместности этих источников движения в реальных струях. Действительно, для струи, бьющей из отверстия в стенке, можно независимо задать и поток импульса из отверстия, и поле скоростей на стенке, например условия прилипания. Однако оказывается, что этого нельзя сделать в пределе бесконечно малого отверстия, потому что согласно теореме Седова решение должно быть автомодельным и принадлежать классу (1.1), но из-за переопределенности задачи такого решения не существует. Сказанное означает, что, кроме решения Ландау, нет автомодельных течений, порожденных точечным источником импульса. Но тогда струи, вызванные движением границ, естественно считать индуцированными.

2. Свойства решений и критические явления. Для удобства дальнейших преобразований полезно ввести функцию F , определив ее соотношением

$$F''' = 2\Gamma\Gamma'/(1 - x^2) \quad (2.1)$$

Тогда уравнение (1.2) можно трижды проинтегрировать

$$(1 - x^2) y' + 2xy - 1/2 y^2 = F + C_3 + C_2 x - C_1 x^2 \quad (2.2)$$

Уравнение (1.3) также может быть проинтегрировано

$$\Gamma = \int \exp \left\{ \int 2S dx \right\} dx, \quad S = 1/2 y/(1 - x^2) \quad (2.3)$$

причем $S(x)$ в силу (2.2) удовлетворяет уравнению

$$S' - S^2 = 1/2 (F + C_3 + C_2x - C_1x^2)/(1 - x^2) \equiv \Phi(x) \quad (2.4)$$

Парадоксальные свойства, встречающиеся у решений данного класса, обусловлены тем, что (2.4) при заданной функции $\Phi(x)$ — каноническое уравнение Рикатти и, следовательно, функция $S(x)$ может иметь полюсы даже в области непрерывности правой части. Когда при изменении параметров полюс попадает в интервал допустимых значений x , решение рассматриваемой краевой задачи перестает существовать. Приближение полюса к интервалу порождает пограничные слои.

В данной работе внимание сосредоточено на критических явлениях, когда полюс проходит через границу интервала при конечных значениях числа Рейнольдса. Точнее говоря, имеется в виду ситуация, когда все величины, входящие в постановку краевой задачи, остаются ограниченными, а решение становится неограниченным. Оказывается, что такой кризис возможен только при условии, что ось $|x| = 1$ содержится в области интегрирования.

Рассмотрим случай, когда на границе $x = x_1$ поставлено условие непротекания $y(x_1) = 0$ и убедимся, что полюс не может пройти через эту границу при $|x_1| \neq 1$. Подстановкой $S = -T'/T$ получим из уравнения (2.4) $T'' + \Phi(x)T = 0$. Если функция $\Phi(x)$ ограничена, то по теореме Штурма корни $T(x)$ и $T'(x)$ чередуются и являются простыми. Действительно, если T и T' обращаются в нуль при одном и том же значении x , то $T \equiv 0$. Следовательно, нули и полюсы функции $y(x)$ обладают теми же свойствами.

Прохождение полюса через границу $x = x_1$, т. е. слияние полюса и корня, возможно только в том случае, если $\Phi(x)$ обращается в бесконечность при $x = x_1$. Поскольку $|x_1| \neq 1$, в бесконечность должен обращаться числитель выражения (2.4), который характеризует источники движения. Таким образом, если источники движения, определяемые краевыми условиями, ограничены, то ограничено и решение.

Иначе обстоит дело, если ось принадлежит области течения. В этом случае кризис возможен при конечном числе Рейнольдса, в чем можно убедиться на примере известных точных аналитических решений.

Рассмотрим типичную для класса (1.1) задачу о стоке на плоскости. Пусть в пространстве, заполненном вязкой жидкостью, расположена материальная плоскость, вещество которой без вращения стягивается к центру, являющемуся стоком обильности $2\pi Q$, так что на плоскости $v_r = -Q/r$, $v_\theta = v_\varphi = 0$. Течение жидкости, увлекаемой веществом плоскости, будет обязательно автомодельным, принадлежащим классу (1.1). Требуя на оси $x = 1$ выполнения условий аналитичности: $y(1) = 0$, $y'(1)$, $y''(1)$ — ограничены, с учетом соотношения (2.2) находим $C_2 = 2C_1$, $C_3 = -C_1$. Следовательно, для данного случая уравнение (2.2) можно переписать в форме

$$(1 - x^2)y' + 2xy = 1/2y^2 - C_1(1 - x)^2 \quad (2.5)$$

Постоянная C_1 находится при помощи (2.5) из условия $y(0) = 0$. С учетом (1.1) имеем

$$C_1 = -y'(0) = -Q/\nu \equiv -Re$$

Для значений $Re > 1/2$ решение уравнения (2.5) имеет вид

$$y = \frac{2 Re (1 - x)}{\gamma \operatorname{ctg} [1/2 \gamma \ln(1 + x)] - 1}, \quad \gamma = \sqrt{2 Re - 1} \quad (2.6)$$

Решение (2.6), правда, по-другому истолкованное, принадлежит Сквайру [8]. При значении γ , удовлетворяющем равенству $\operatorname{tg}(1/2\gamma \ln 2) = \gamma$, т. е. при $Re \approx 7,67$, знаменатель правой части равенства (2.6) в точке $x = 1$ обращается в нуль. В этот момент корень и полюс сливаются в точке $x = 1$, значение $y(1)$ становится конечным и в силу (2.6) равным четырем. Предельное внешнее решение $y_*(x)$ аналитично, но физически ему соответствует расположенный на оси равномерно распределенный сток обильностью 8ν .

В ситуации, близкой к критической, около оси формируется узкая внутренняя область больших скоростей — зона сильной струи. В этой зоне величина y уменьшается от значения, близкого к четырем на границе, до нуля на оси, а величина y' принимает большие отрицательные значения.

Введем малый параметр ε и новую независимую переменную η

$$\varepsilon = -1/y'(1), \quad \eta = (1-x)/\varepsilon \quad (2.7)$$

Учитывая соотношение $yx' = -y_\eta'/\varepsilon$, из уравнения (2.5) находим

$$-\eta(2 - \varepsilon\eta)y_\eta' + 2(1 - \varepsilon\eta)y = 1/2y^2 - \varepsilon^2\eta^2C_1$$

Устремляя ε к нулю, получим уравнение для главного члена разложения приосевого пограничного слоя

$$\eta y_\eta^{*'} = y^*(1 - y^*/4), \quad y^*(0) = 0 \quad (2.8)$$

откуда находим решение Шлихтинга [9] $y^* = 4\eta/(4 + \eta)$.

Отметим, что полученное погранслоное решение соответствует внутреннему разложению и не зависит от C_1 . Поскольку для решения Шлихтинга существенны лишь условие регулярности на оси и наличие пограничного слоя, оно аппроксимирует вблизи оси широкий класс течений струйного типа. Возвращаясь к исходным переменным, перепишем его в виде

$$y^*(x) = -4y'(1)(1-x)/[4 - y'(1)(1-x)] \quad (2.9)$$

В качестве внешнего разложения $y_*(x)$ в данной задаче выступает само решение (2.6) в критической ситуации.

Таким образом, приведенный пример с решением Сквайра отчетливо демонстрирует возникновение предельно сильной струи и кризис течения при конечном числе Рейнольдса. Заметим, что этот кризис неустраим. Физически он должен привести к турбулизации ядра струи.

В случае условий прилипания на плоскости $y(0) = y'(0) = 0$ и ограниченности $y'(1)$ в критической ситуации внешнее решение $y_*(x)$ удовлетворяет условию $y_*(1) = 4$ и уравнению [10]

$$(1 - x^2)y_*' + 2xy_* = 1/2y_*^2 + C_1x(1-x) \quad (2.10)$$

Величина $C_1 \approx 15,29$ находится при интегрировании от оси из условия $y_*(0) = 0$. С точностью графического изображения y_* аппроксимируется кубическим полиномом, коэффициенты которого определяются по граничным условиям

$$y_* \approx x^2 [4 + (6 - C_1/4)(1-x)] \quad (2.11)$$

3. Кризис в задаче о «смерче». Взаимодействие вихревой нити с плоскостью описывается в рамках автомодельного класса (1.1) и сводится [1, 2] к решению краевой задачи для уравнений (1.3), (2.1), (2.2) с граничными условиями прилипания на плоскости, регулярности меридионального поля скорости на оси при заданном значении циркуляции. Было доказано [1, 2], что если число Рейнольдса $Re = \Gamma_1/\nu$ превышает критическое значение $Re_* \approx 5,53$, то автомодельное решение, удовлетворяющее указанным условиям, перестает существовать. Далее будет изучена структура решений в окрестности $Re = Re_* - \varepsilon_1$, $0 < \varepsilon_1 \ll 1$, затем рассмотрена задача, когда циркуляция задана на конусе с конечным углом раствора. Для нулевого угла раствора задача сводится [2] к уравнению (1.3) с краевыми условиями $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(1) = Re$ и уравнениям

$$(1 - x^2)y' + 2xy - 1/2y^2 = 1/2Re^2x(1-x) - G(x) \quad (3.1)$$

$$G(x) = (1-x)^2 \int_0^x \frac{t\Gamma^2}{(1-t^2)^2} dt + 2x \int_x^1 \frac{\Gamma^2}{(1+t)^2} dt \quad (3.2)$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = 0$$

При $Re \rightarrow Re_*$ циркуляция стремится к нулю всюду, кроме самой оси [2], что иллюстрируют и численные расчеты [11]. Тогда непосредственно из (3.2) следует, что $G(x) \rightarrow 0$ при $Re \rightarrow Re_*$. Поэтому для главного члена внешнего разложения по ε_1 в правой части (3.1) величиной $G(x)$ можно пренебречь, и уравнение (3.1) сводится к (2.10) с переобозначением $C_1 = Re_*^2/2$. Отсюда следует связь между критическим числом Рейнольдса и значением постоянной C_1 в (2.10) $Re_* = \sqrt{2C_1} \approx 5,53$. Таким образом, внешнее разложение сводится к выражению, описывающему меридиональное течение, вызванное стоком на оси, и совпадает с решением $y_*(x)$.

Что касается внутреннего разложения, то, как показано в [2], правая часть (3.1) имеет при $x = 1$ нуль выше первого порядка, поэтому и здесь при получении главных членов уравнение для меридионального движения отщепляется. Главный член оказывается решением (2.9) (струя Шлихтинга). Для получения погранслоного решения для циркуляции снова удобно использовать малый параметр $\varepsilon = -1/y'(1)$ и переменную $\eta = (1-x)/\varepsilon$. Тогда из (2.9) и (1.3) при учете граничных условий $\Gamma(\infty) = 0$, $\Gamma(0) = Re$ получим

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= 4Re/(4 + \eta) = 4Re/[4 - y'(1)(1-x)] \\ \Gamma_x^{*'} &= -4Re y'(1)/[4 - y'(1)(1-x)]^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку внешнее разложение для циркуляции тривиально: $\Gamma_*(x) \equiv 0$, то внутреннее можно продолжить вплоть до стенки $x = 0$, удовлетворяя уточненному граничному условию $\Gamma = 0$ при $x = 0$. Тогда $\Gamma^* = 4Re x/[4 - y'(1)(1-x)]$.

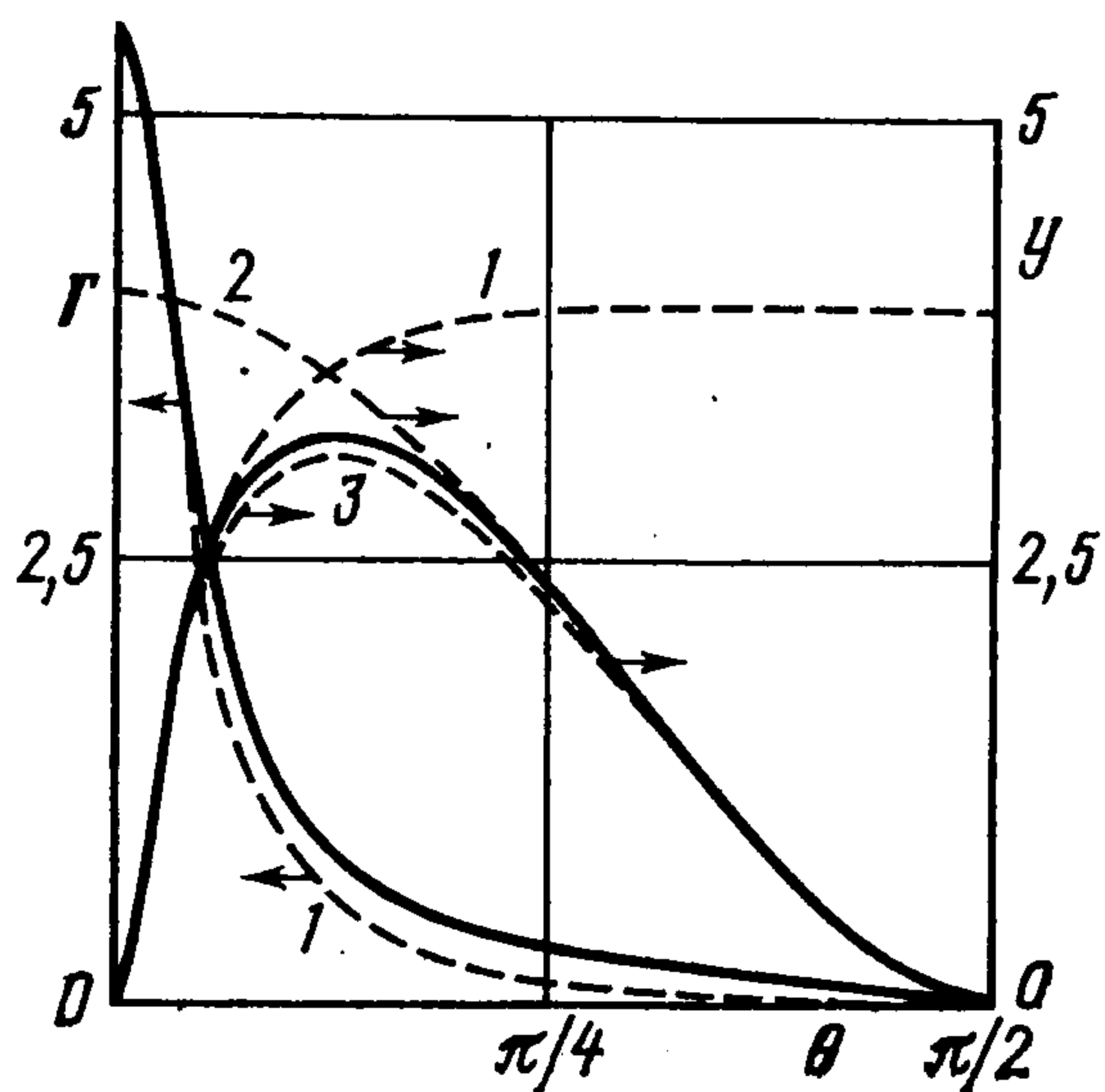
Малый параметр ε обращается в нуль вместе с величиной $\varepsilon_1 = Re_* - Re$. Действительно, при $Re = Re_*$ полюс функции $y(x)$ проходит точку $x = 1$, поэтому при малых ε_1 положение полюса x_p приближенно определяется зависимостью $x_p = 1 + A\varepsilon_1$, $A > 0$. С другой стороны, решение y^* , задаваемое формулой (2.9), можно переписать в виде $y^* = 4(1-x)/[1-x-4/y'(1)]$, положение полюса $x_p^* = 1 - 4/y'(1)$ при малых ε_1 должно совпадать с x_p , откуда $y'(1) = 4/[A(Re - Re_*)] + O(1)$.

На фиг. 1 приведены результаты интегрирования уравнений (1.3), (3.1), (3.2) при значении $Re = 5,47$, близком к критическому значению и таком, что $y'(1) = -460,5$. (Для развитой осесимметричной турбулентной струи, согласно данным [9], турбулентная вязкость ν_T вырабатывается такой, что $\nu_T/\nu = -y'(1) = 460,5$.) Дано сравнение численных результатов (сплошные линии) с аналитическими (штриховые). Кривыми 1 и 2 обозначены соответственно внутреннее y^* , Γ^* и внешнее y_* решения (см. (2.9), (3.3), (2.11)), кривой 3 — равномерное асимптотическое приближение $y_a = y^* + y_* - 4$. Циркуляция с удалением от оси убывает слабее, чем в погранслоном приближении (3.3). Это связано с различием между y^* и y вдали от оси.

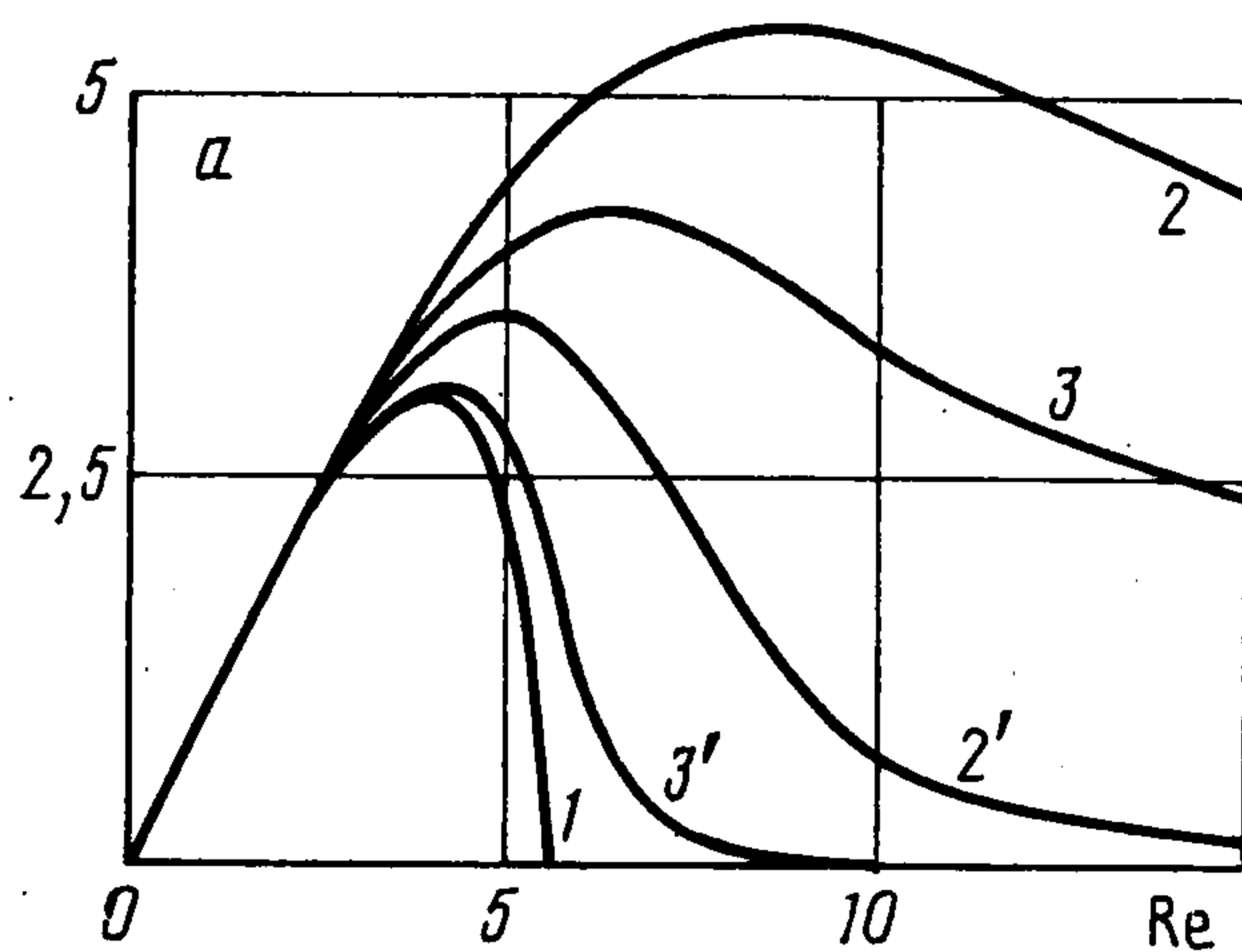
Характеристикой интенсивности вращательного движения вблизи плоскости может служить величина $a \equiv \Gamma'(0)$. Зависимость $a(Re)$ (кривая 1 на фиг. 2) немонотонна. С увеличением циркуляции вихревой нити вращение вблизи плоскости сначала усиливается, а затем затухает, обращаясь в нуль при $Re = Re_*$. Расчеты свидетельствуют, что производная da/dRe при $Re = Re_*$ конечна и приближенно равна $-6,2$.

Отмеченная немонотонность связана с конкуренцией двух механизмов переноса завихренности — вязкой диффузией и конвекцией. При малых Re диффузия преобладает, и поэтому увеличение циркуляции (Re) на оси приводит к возрастанию циркуляции во всей области течения. С увеличением Re усиливается подтекание жидкости к оси и связанный с этим обратный перенос завихренности за счет конвекции. При значениях Re , близких к Re_* , конвективный механизм превалирует, циркуляция концентрируется вблизи оси, а вдали от оси падает. Наконец, при $Re = Re_*$ происходит катастрофа: несмотря на наличие циркуляции на оси, жидкость вне оси не вращается. Таким образом, имеет место «коллапс» циркуляции. Но это не относится к полю давления, порожденному вихревой нитью. Разрежение на оси вызывает сток, взаимодействие которого с плоскостью формирует предельно сильную струю.

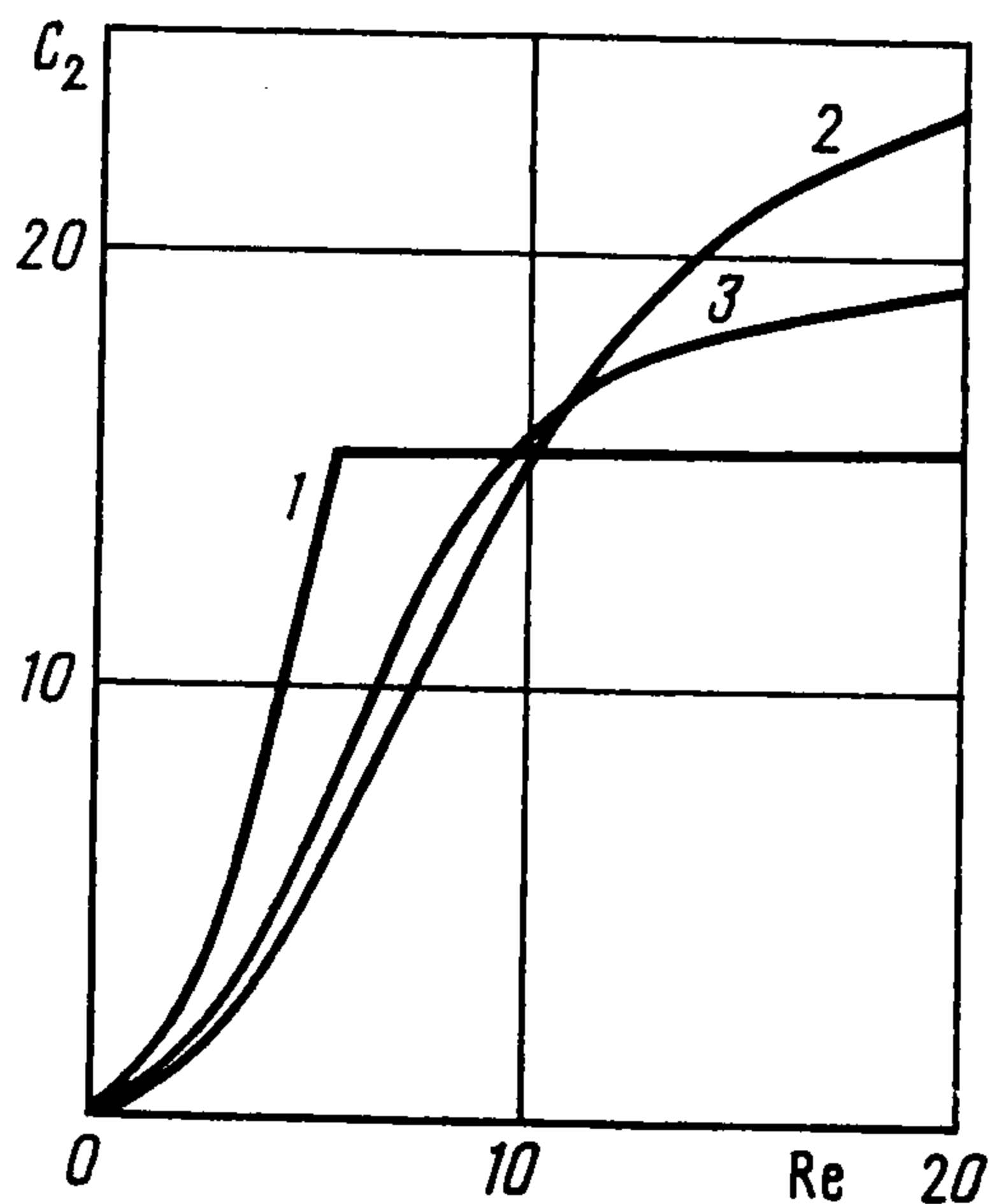
4. «Смерч» с коническим ядром. Парадоксальная ситуация, когда при конечном числе Рейнольдса перестает существовать решение урав-



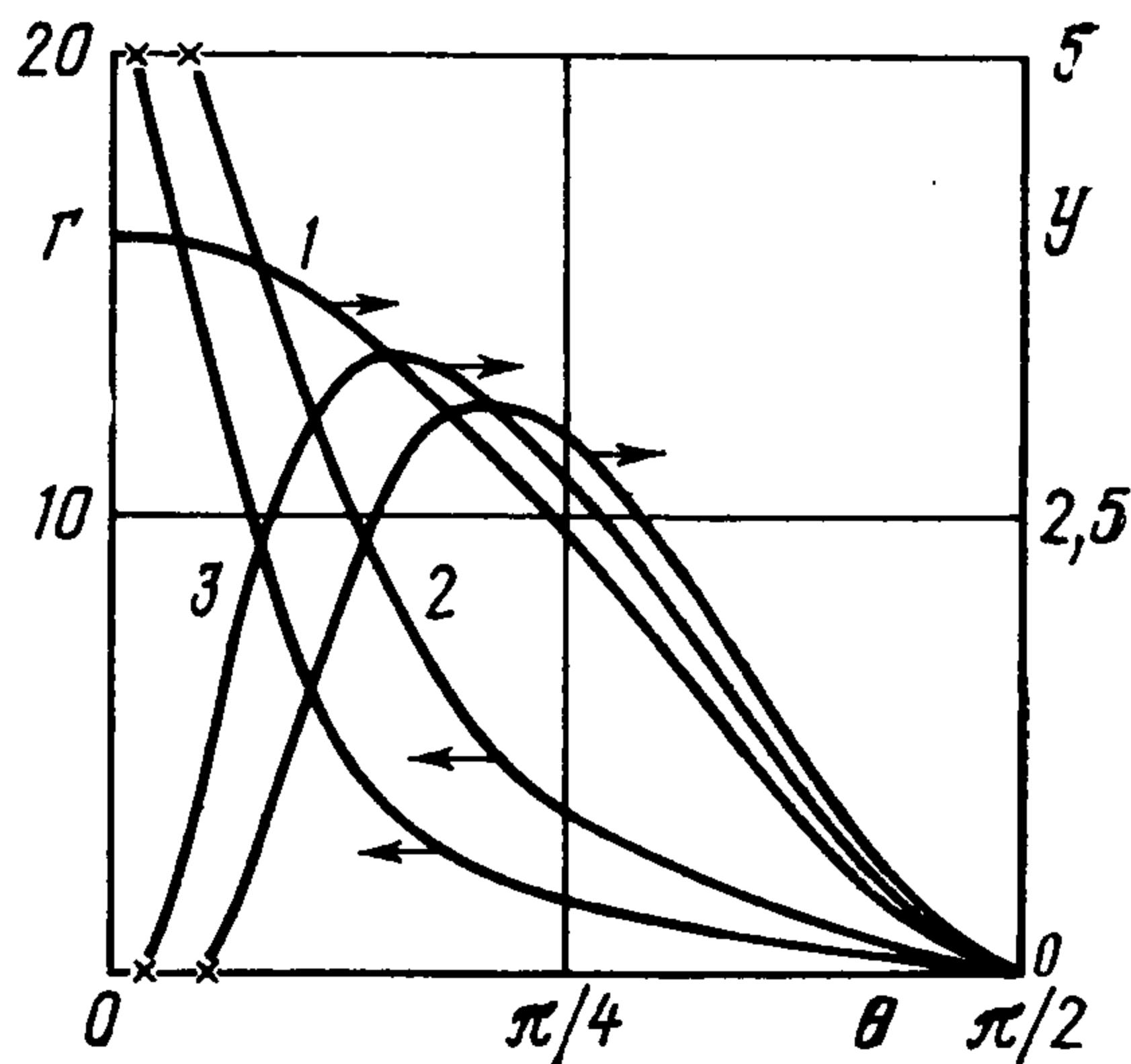
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

нений Навье — Стокса, реализуется при наличии особенности на оси в виде вихревой нити. Спрашивается, как изменится ситуация, если ось исключить, поставив соответствующие граничные условия на конусе конечного угла раствора. Задача сводится к решению системы уравнений (1.3), (2.1), (2.2) с граничными условиями прилипания на плоскости $y(0) = y'(0) = \Gamma(0) = 0$. На конусе $x = x_1$ ставится условие непротекания: $y(x_1) = 0$ и задается циркуляция $\Gamma(x_1) = Re$. Шестое краевое условие было поставлено в двух вариантах: прилипание ($y'(x_1) = 0$) и скольжение ($y''(x_1) = 0$).

При численных расчетах интегрирование проводилось от стенки к оси, причем для функции F ставились условия $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$. Тогда в силу (2.2) и условий прилипания на стенке $C_3 = 0$. Для интегрирования необходимо также задаться значениями C_1, C_2 и $a \equiv \Gamma'(0)$. Два из этих трех параметров должны быть подобраны так, чтобы выполнить два условия на конусе. Одно из них — условие $y(x_1) = 0$, а второе в случае прилипания в силу (2.2) имеет вид $F(x_1) + C_2 x_1 - C_1 x_1^2 = 0$ и в случае скольжения $F'(x_1) + C_2 - 2C_1 x_1 = 0$. Оставшийся параметр служит мерой интенсивности движения, выполняя роль, обычно присущую числу Рейнольдса. Число Рейнольдса при этом находится после решения задачи: $Re = \Gamma(x_1)$. Удобно свободным оставить такой параметр, зависимость которого от Re монотонна. Как ясно из фиг. 2, параметр a не является в этом смысле подходящим. Годится любой из параметров C_1, C_2 .

Результаты расчетов отражены на фиг. 2—4. (Кривые, помеченные цифрой 1, отвечают $x_1 = 1$; 2 — $x_1 = 0,99$, 3 — $x_1 = 0,999$ при условии прилипания; 2', 3' — то же, но при условии скольжения.) Они, во-первых, свидетельствуют о том, что если угол раствора конуса конечен, то решение существует при всех числах Рейнольдса, независимо от того, ставится ли на конусе условие прилипания или условие скольжения. Во-вторых, и в случае конуса конкуренция диффузионного и конвективного переноса завихренности приводит к тому, что интенсивность вращательного движения вблизи плоскости зависит от величины циркуляции на конусе немонотонно. При увеличении числа Рейнольдса вращение сначала усиливается, а затем падает. Но в отличие от случая вихревой нити вращение не исчезает при конечном числе Рейнольдса, а асимптотически стремится к нулю при увеличении числа Рейнольдса до бесконечности.

Если фиксировать число Рейнольдса и уменьшать угол раствора конуса, то при $Re < Re_*$ в пределе получится решение, отвечающее вихревой нити. В силу (3.1) для вихревой нити $C_1 = C_2 = Re^2/2$ (кривая 1 на фиг. 3). Когда $Re \geq Re_*$, при $x_1 \rightarrow 1$ имеем $a \rightarrow 0$; $C_1, C_2 \rightarrow Re_*^2/2$. Вне пограничного слоя вращательное движение исчезает, а меридиональное течение становится таким же, как при $Re = Re_*$.

Как видно из фиг. 4, где приведены результаты расчетов при $Re = 20$, при критических числах Рейнольдса $y(x)$ стремится к $y_*(x)$ (кривая 1) немонотонно. Установление предельного решения при $x_1 \rightarrow 1$ происходит довольно медленно. В случае скольжения установление ускоряется (фиг. 2).

Имея в виду результаты этого предельного перехода, можно считать, что решение задачи о вихревой нити продолжимо в область $Re > Re_*$, и для этого следует положить $a = 0$, $C_1 = C_2 = Re_*^2/2$. Однако граничное условие $y(1) = 0$ «стирается» и должно быть заменено условием $y(1) = 4$. На вихревой нити, таким образом, формируется сток, обильность которого не зависит от величины циркуляции и равна Q_* .

5. Обсуждение. Парадокс, заключающийся в потере существования решения при конечном числе Рейнольдса [1], здесь разрешается посредством регуляризации особенности на оси симметрии. При замене вихревой нити вихревым конусом решение существует при произвольном числе Рейнольдса. Поскольку вихревая нить по сути служит идеализацией реальных источников движения, имеющих конечные размеры, предложенный в данной работе подход представляется естественным. Обобщение постановки задачи [1], сделанное Серрином [3], расширяет возможности моделирования атмосферных смерчей, но не является существенным для разрешения парадокса.

Хотя парадокс снимается, сохраняется интересный физический эффект, состоящий в фокусировке вращательного движения вблизи оси симметрии и формировании сильной восходящей струи. Если вращать тонкую иглу, перпендикулярную плоскости, то на расстояниях, больших по сравнению с радиусом иглы, движение будет происходить согласно автомодельному решению. С увеличением скорости вращения иглы вращательное движение жидкости в автомодельной области будет сначала усиливаться, а затем резко убывать до нуля. При числах Рейнольдса выше критического вращательное и струйное движение сосредоточатся в неавтомодельной зоне вблизи иглы. В автомодельной же области движение перестанет зависеть от скорости вращения иглы и будет таким, как если бы оно порождалось равномерно распределенным на оси стоком обильности Q_* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье—Стокса // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 610—621.
2. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
3. Serrin J. The swirling vortex // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1972. V. 271. № 1214. P. 325—360.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
5. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
6. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. М.: Мир, 1981. 408 с.
7. Ландау Л. Д. Об одном точном решении уравнений Навье—Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. № 7. С. 299—301.
8. Squire H. B. Some viscous fluid flow problems. I. Jet emerging from a hole in a plane wall // Phil. Mag. 1952. V. 43. № 7. P. 942—945.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
10. Schneider W. Flow induced by jets and plumes // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 55—65.
11. Guilloud J. C., Arnault J., Dicrescenzo C. Etude d'une nouvelle famille de solutions des equations de Navier—Stokes // J. Mec. 1973. V. 12. № 1. P. 47—74.