

УДК 533.6.011

А. Н. Крайко, С. А. Мунин

## О НАТЕКАНИИ ЗВУКОВОЙ СТРУИ НА КЛИНОВИДНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Рассматривается задача о симметричном натекании плоской звуковой струи идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа на клиновидные препятствия, называемые далее клином и включающие собственно клин, плоскость и клинообразную выемку. Характерными особенностями рассмотренного течения являются: 1) ограниченность примыкающей к вершине клина области  $G$  дозвукового потока, 2) прямолинейность ограничивающих  $G$  звуковых линий (ЗЛ) и 3) симметрия относительно биссектрисы внешнего угла между осью струи и образующей клина. Здесь и далее звуковой называется такая линия, лежащая внутри потока, на которой число Маха  $M = 1$  и хотя бы с одной стороны от которой  $M < 1$ . По крайней мере две первые из отмеченных выше особенностей исследованного течения были известны и ранее. Так, то, что область  $G$  ограничена прямой ЗЛ снизу по потоку, следует из [1, 2], а сверху — из [3]. Кроме того, в силу теоремы, доказанной в [4], в докритическом потоке с  $M \leq 1$  ЗЛ может быть только прямой (см. также [5]). Достаточно очевидным, хотя это, по-видимому, специально не подчеркивалось, представляется и третье свойство. Поэтому основной результат данной заметки состоит в построении конкретных примеров и в определении функции  $f(\sigma) \equiv l/h$ , где  $\sigma$  — полуугол при вершине клина ( $0 \leq \sigma \leq \pi$ ),  $l$  — расстояние вдоль его образующей (или оси струи) до ЗЛ, а  $h$  — полуширина набегающей струи. Функция  $f(\sigma)$ , зависящая также от свойств газа (для совершенного газа от показателя адиабаты  $\kappa$ ), получается из решения задачи и меняется от нуля при  $\sigma = 0$  до бесконечности при  $\sigma \rightarrow \pi$ .

1. Пусть на клиновидное тело (фиг. 1, а) с углом при вершине  $2\sigma$  набегаёт равномерная и дозвуковая или звуковая при  $x = -\infty$  струя полуширины  $h$ , скорости  $V_\infty$  и плотности  $\rho_\infty$ . Далее  $h$  принимается за линейный масштаб. Давление  $p_\infty$  в пространстве, окружающем струю, и на ее границе постоянно и либо меньше, либо равно соответствующей критической величине. Ось  $X$  декартовых координат  $XU$  совместим с осью (точнее, с плоскостью) симметрии струи и тела, а начало отсчета — с вершиной тела. При  $0 < \sigma < \pi/2$  имеем обтекание собственно клина, при  $\sigma = \pi/2$  — плоскости, а при  $\pi/2 < \sigma < \pi$  — взаимодействие струи с клиновидной выемкой. Наряду с  $XU$  введем систему декартовых координат  $xu$ , которая получается поворотом исходной системы на угол  $\sigma/2$ . Вектор скорости  $V$ , его модуль  $V$  и проекции  $u$  и  $v$  на оси  $x$  и  $u$  отнесем к критической скорости. Тогда, если  $\vartheta$  — угол между  $V$  и осью  $x$ , то в плоскости годографа (фиг. 1, б) верхней половине струи отвечает сектор  $-\sigma/2 \leq \vartheta \leq \sigma/2$  круга  $0 \leq V \leq V_\infty \leq 1$  с соответствием точек, обозначенных на фиг. 1, а и б одинаковыми буквами, причем пока неважно, находятся ли точки  $e$  и  $f$ , отвечающие на фиг. 1, а равномерным потокам с  $V = V_\infty$  и  $\vartheta = \mp \sigma/2$ , на конечном или бесконечном расстоянии от вершины клина.

Отнеся плотность газа  $\rho$  к своему критическому значению и положив  $K = 1/(\rho_\infty V_\infty)$ , введем, как обычно, функцию тока  $\psi$  и потенциал  $\phi$  дифференциальными равенствами и условиями

$$\begin{aligned} d\psi &= K\rho (udy - vdx), \quad d\phi = udx + vdy \\ \psi(0, 0) &= \phi(0, 0) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

В силу (1.1) при выбранных постоянной  $K$  и линейном масштабе  $\psi = 0$  на клине и на оси струи и  $\psi = 1$  на ее границе. После перехода к  $V$  и  $\vartheta$  в качестве независимых переменных для определения  $\psi$  и  $\varphi$  получается система уравнений Чаплыгина [6]

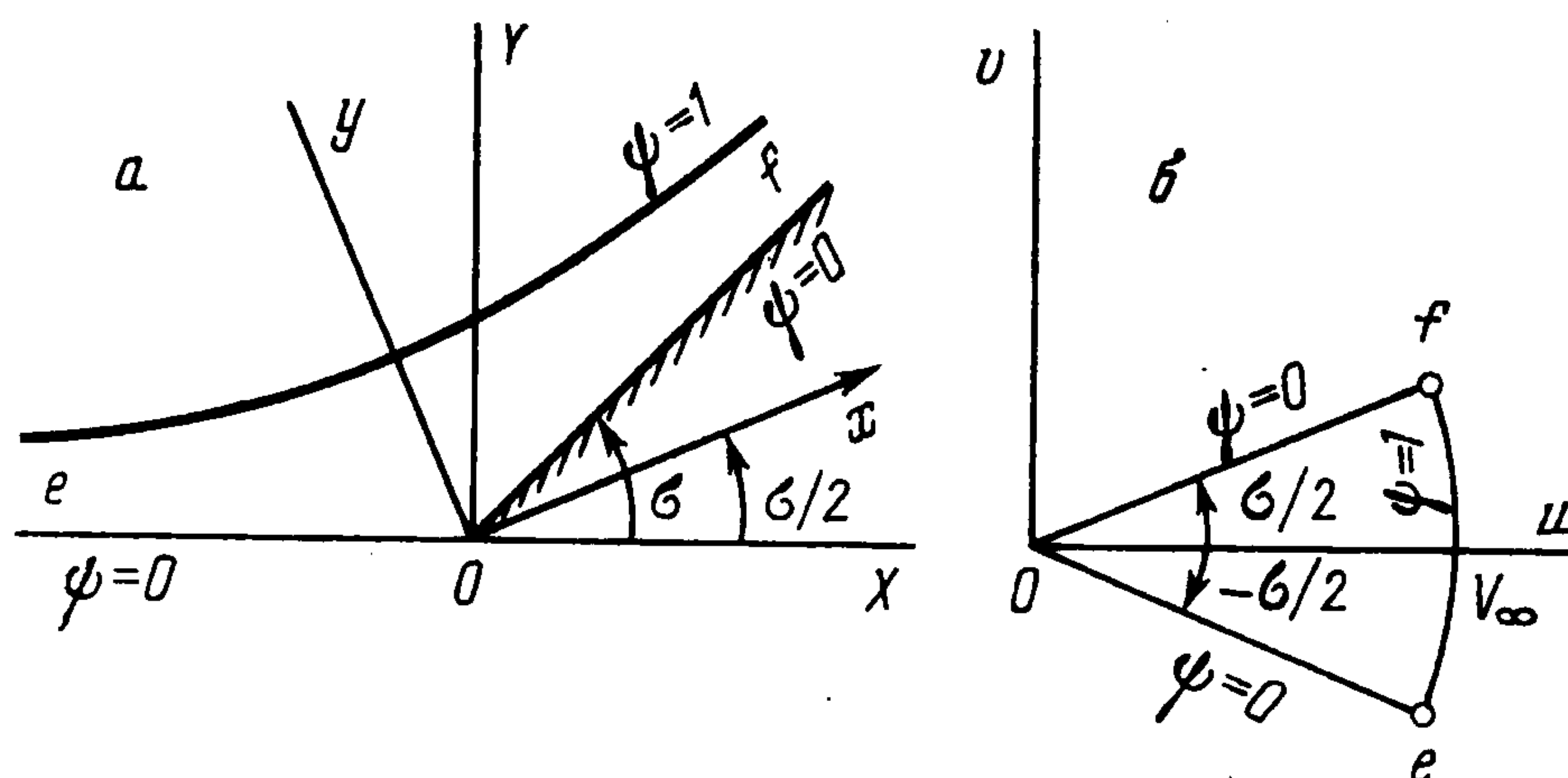
$$\varphi_{\vartheta} = \frac{V}{K\rho} \psi_V, \quad \varphi_V = \frac{M^2 - 1}{K\rho V} \psi_{\vartheta} \quad (1.2)$$

или после исключения  $\varphi$  — одно уравнение для  $\psi$

$$\begin{aligned} & \rho V (V\psi_V / \rho)_V + (1 - M^2) \psi_{\vartheta\vartheta} \equiv \\ & \equiv V^2 \psi_{VV} V + (1 + M^2) \psi_V V + (1 - M^2) \psi_{\vartheta\vartheta} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь и в (1.2)  $\rho$  и  $M^2$  — известные функции  $V$ , определяемые интегралами изоэнергетичности и изэнтропичности и уравнением состояния:  $i = i(\rho, s)$ , в котором  $i$  и  $s$  — удельная энтальпия и энтропия газа.

Как и в других задачах подобного типа (см., например, работы [1—3, 6—8]), получающаяся для  $\psi$  краевая задача допускает разделение переменных. При этом для того, чтобы удовлетворить условиям:  $\psi(V, \mp \sigma/2) = 0$ , функция  $\psi_{\infty}(\vartheta) \equiv \psi(V_{\infty}, \vartheta)$  предварительно доопре-



Фиг. 1

деляется для всех  $\vartheta$ , причем в качестве  $\psi_{\infty}(\vartheta)$  берется ступенчатая четная функция периода  $2\sigma$ , равная  $\pm 1$ . С учетом этого для  $\psi(V, \vartheta)$ , удовлетворяющей (1.3) и сформулированной выше краевой задаче, получается представление

$$\psi(V, \vartheta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \psi_k(V) \cos v_k \vartheta \quad (1.4)$$

с  $v_k = \pi(2k+1)/\sigma$  и функциями  $\psi_k(V)$  — решениями уравнения (штрихами обозначены производные по  $V$ )

$$\begin{aligned} & \rho V (V\psi_k' / \rho)' - v_k^2 (1 - M^2) \psi_k \equiv \\ & \equiv V^2 \psi_k'' + (1 + M^2) V \psi_k' - v_k^2 (1 - M^2) \psi_k = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

при граничных условиях:  $\psi_k(0) = 0$  и  $\psi_k(V_{\infty}) = 1$ . Известным из теории обыкновенных дифференциальных уравнений способом [9] можно показать, что решение уравнения (1.5), удовлетворяющее в правильной особой точке  $V = 0$  условию  $\psi_k(0) = 0$ , в ее окрестности имеет вид:  $\psi_k(V) = a_k V^{v_k} \Psi_k(V)$ . Постоянная  $a_k \neq 0$  определяется условием при  $V = V_{\infty}$ , а  $\Psi_k(V)$  — известная функция  $V$ , причем  $\Psi_k(0) = 1$ . Доказательство равномерной сходимости (1.4) проводится так же, как в работах [2, 8], авторы которых перенесли на произвольную баротропную среду аналогичное доказательство С. А. Чаплыгина [7] для совершенного газа. С учетом последнего обстоятельства нетрудно найти  $\varphi(V, \vartheta)$  и доказать симметрию течения относительно оси  $y$ .

Начнем с того, что в силу (1.4)  $\psi$  — четная функция  $\vartheta$  и, следовательно,  $\psi_\vartheta(V, 0) = 0$ , а согласно второму уравнению из (1.2)  $\psi_V(V, 0) = 0$ . Поскольку в начале координат  $V = 0$  и, кроме того, в него сходятся все линии уровня  $\vartheta$ , то отсюда с учетом последнего условия из (1.1) следует, что  $\varphi(V, 0) = 0$ . Проинтегрировав затем первое уравнение из (1.2) с  $\psi_V$  из (1.4) и найдя появляющуюся при этом произвольную функцию  $V$  из только что выписанного равенства, приходим к выражению

$$\varphi(V, \vartheta) = \frac{4V}{K\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)v_k} \psi_k'(V) \sin v_k \vartheta \quad (1.6)$$

Таким образом,  $\varphi(V, \vartheta)$  — нечетная функция  $\vartheta$ . Так же, как в [1, 7] с обобщениями на произвольный газ, выполненными в [2, 8], можно показать, что ряд, получающийся в правой части (1.6) при  $\vartheta = \mp \sigma/2$ , для  $V_\infty < 1$  расходится, а для  $V_\infty = 1$ , т. е. для звуковой струи, сходится. Последнее означает, что ЗЛ, ограничивающие в этом случае примыкающую к вершине клина область неравномерного дозвукового потока, располагаются на конечном расстоянии от вершины.

Симметрия потока, фактически вытекающая из свойств  $\psi(V, \vartheta)$  и  $\varphi(V, \vartheta)$  как функций  $\vartheta$ , доказывается так. В силу (1.1)

$$dx = \frac{\cos \vartheta}{V} d\varphi - \frac{\sin \vartheta}{K\rho V} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \vartheta}{V} d\varphi + \frac{\cos \vartheta}{K\rho V} d\psi \quad (1.7)$$

Из выражения для  $dx$ , кстати, видно, что линия  $\vartheta = 0$ , на которой, как было показано,  $\varphi = 0$ , совпадает с осью  $y$ . Из (1.7) с учетом (1.2) вдоль изолиний  $\vartheta = \text{const}$  имеем

$$\begin{aligned} Kdx &= \left[ \frac{M^2 - 1}{\rho V^2} (\cos \vartheta) \psi_\vartheta - \frac{\sin \vartheta}{\rho V} \psi_V \right] dV \\ Kdy &= \left[ \frac{M^2 - 1}{\rho V^2} (\sin \vartheta) \psi_\vartheta + \frac{\cos \vartheta}{\rho V} \psi_V \right] dV \end{aligned} \quad (1.8)$$

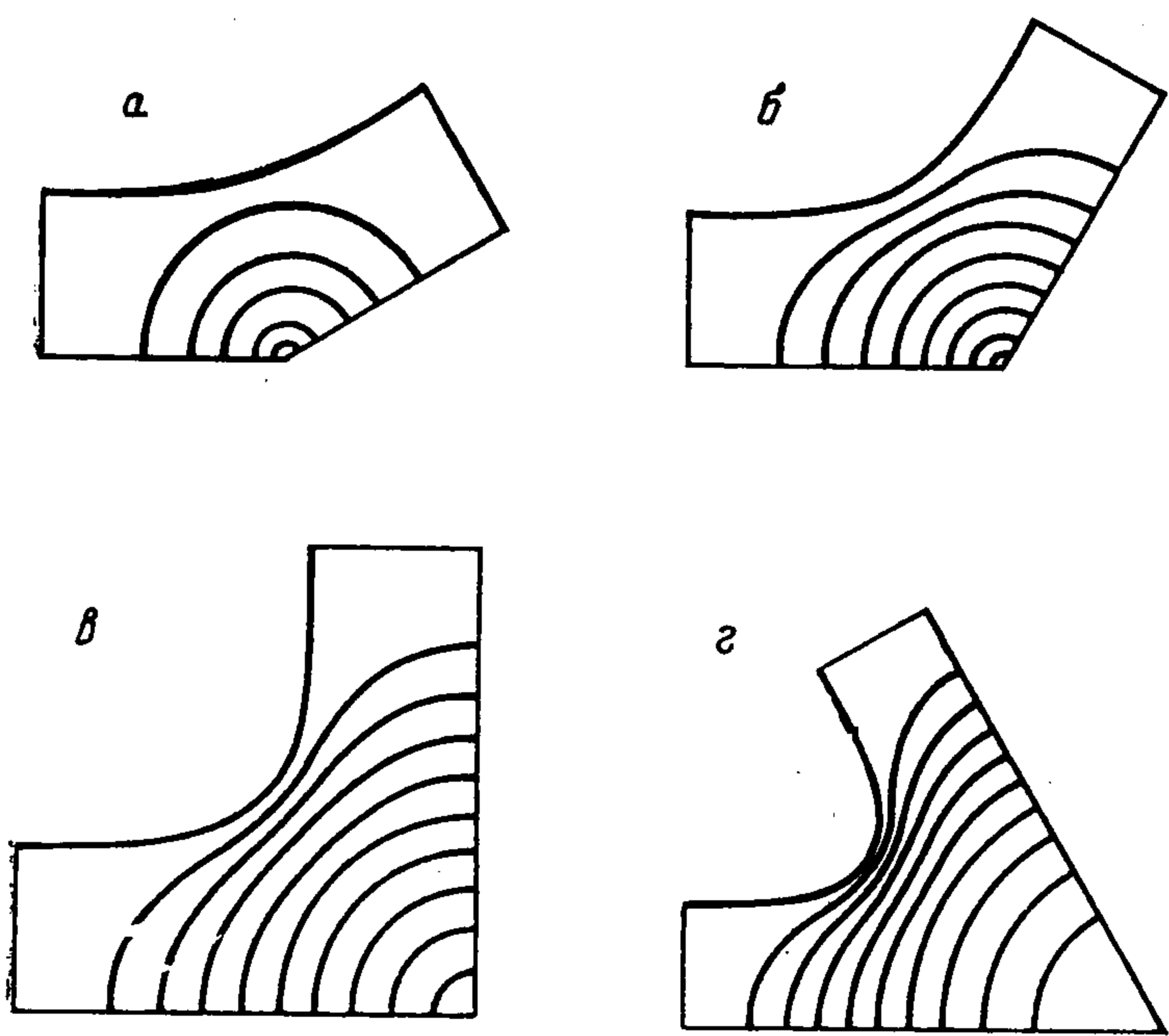
Поскольку согласно (1.4)  $\psi_V$ , как и  $\psi$ , — четная функция  $\vartheta$ , а  $\psi_\vartheta$  — нечетная, то в силу (1.8) линии  $\vartheta = \pm \theta$  с  $0 \leq \theta \leq \sigma/2$  симметричны относительно оси  $y$ , причем любому фиксированному  $V < V_\infty$  отвечают на них одинаковые  $y$  и отличающиеся знаком  $x$ . Это и означает симметрию линий постоянства  $V$  или любого другого связанного с  $V$  скалярного параметра относительно оси  $y$  — биссектрисы внешнего угла между осью и образующей клина. Наконец, прямолинейность ЗЛ следует, в частности, из (1.7), если учесть, что при  $V_\infty = 1$ , как уже отмечалось,  $\mp \varphi(1, \mp \sigma/2) = \text{const} < \infty$ . Поэтому на них  $d\varphi = 0$  и из (1.7):  $dy/dx = -\text{tg}(\mp \sigma/2) = \pm \text{tg}(\sigma/2)$ , где верхний (нижний) знак соответствует левой (правой) ЗЛ. Следовательно, ЗЛ — прямые, нормальные оси струи и образующей клина.

2. Расчеты взаимодействия звуковой струи с клиновидными телами выполнялись для совершенного газа с  $\kappa = 1,4$ , для которого входящие в (1.5) и (1.6) функции  $\psi_k(V)$  и  $\psi_k'(V)$  выражаются через решения гипергеометрического уравнения и функции Бесселя. Как показали расчеты, для достаточно точного построения решения, в частности границы струи, ЗЛ и изолиний  $V = \text{const}$  особенно с  $V$ , близкими к единице, необходимо привлекать весьма много (более 100) членов разложений (1.4), (1.6) и им подобных. При этом суммы указанных, как правило, знакопостоянных рядов могут на многие порядки (до 15) быть меньше, чем их первые члены, что предъявляет чрезвычайно жесткие требования к точности

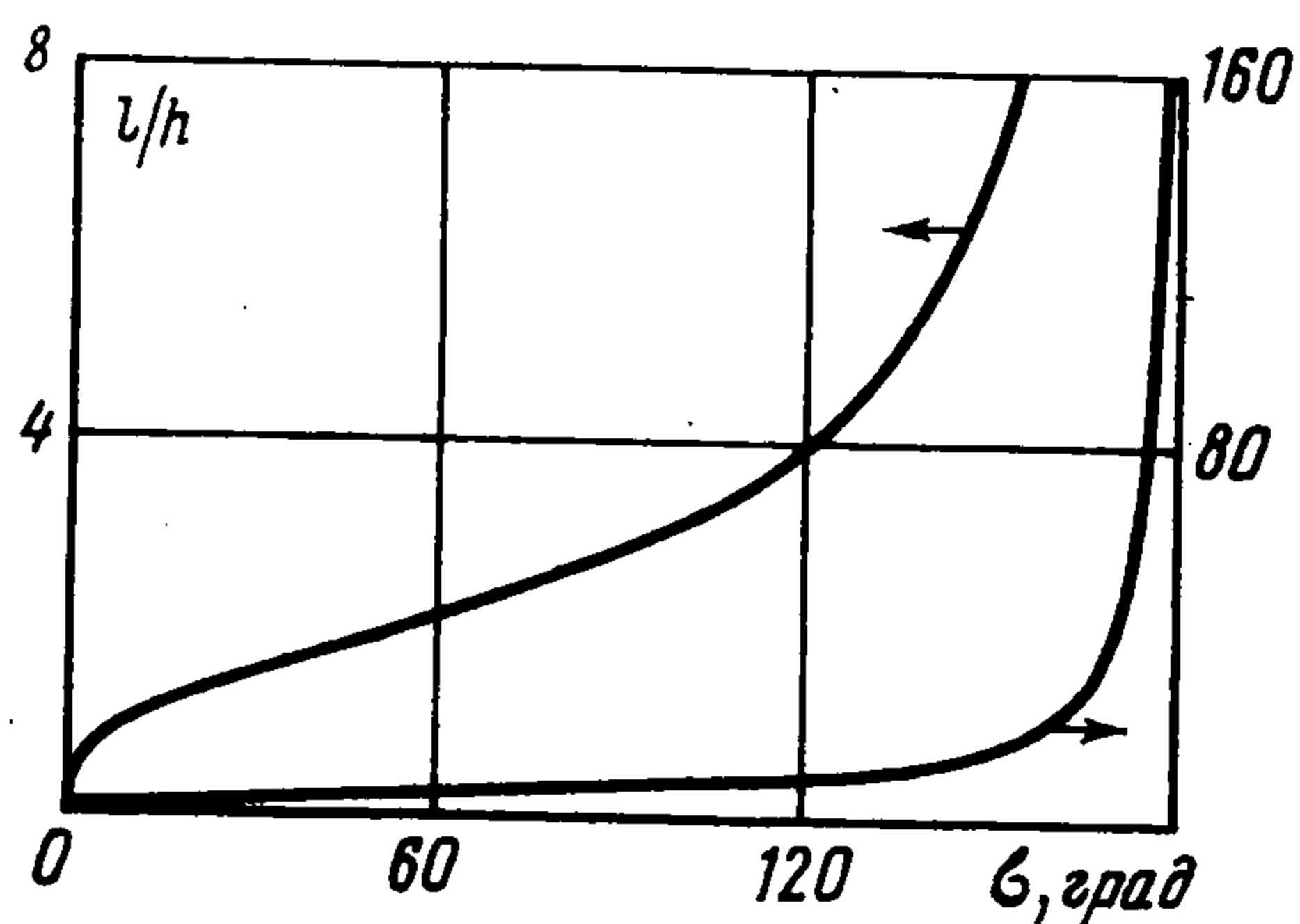
вычислений. Для преодоления подобных трудностей привлекался широкий спектр приемов, включающих известные асимптотические представления необходимых функций [10—12].

Созданная с учетом отмеченных особенностей программа позволяет достаточно быстро получать необходимые характеристики рассматриваемых течений. Так, расчет с выводом 10 изолиний  $V = \text{const}$  занимает на ЭВМ ЕС-1061 при  $\sigma = 30, 60, 90$  и  $120^\circ$  от 10 до 30 с. Дополнительный контроль точности результатов осуществлялся путем сравнения силы, которая действует на «дозвуковой» начальный участок клина, найденной интегрированием  $p$  по его поверхности, с точной величиной, определяемой из интегрального закона сохранения импульса [1]. В рассчитанных примерах соответствующая погрешность не превышала 2,5%.

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2 и 3. На фиг. 2, *a—г* для углов  $\sigma = 30, 60, 90$  и  $120^\circ$  через  $\Delta V = 0,1$  изображены изолинии (включая границы струй) и ЗЛ. Как известно, в окрестности



Фиг. 2



Фиг. 3

точки торможения справедливо решение для несжимаемой жидкости, в силу которого  $V \sim r^n$ , где  $r$  — расстояние до вершины клина, а положительный показатель  $n$  меньше, равен или превышает единицу соответственно при  $\sigma < 90^\circ$ ,  $\sigma = 90^\circ$  и  $\sigma > 90^\circ$ . Поэтому на фиг. 2, *a, б* изолинии сгущаются к вершине клина, в пределах возможностей изображения даже сливаясь с ней, а на фиг. 2, *в* они при  $V \leq 0,6$  близки к окружностям, отличающимся на практически одинаковые приращения  $r$ . Наконец, на фиг. 3 в зависимости от  $\sigma$  дано отношение  $l/h$ , где  $l$  — расстояние от вершины до любой из ЗЛ, причем начальный участок кривой дан в более крупном масштабе (левая шкала). В приближении идеального газа для клина конечной длины  $L \geq l$  решение не отличается от построенного, звуковые струи, сойдя с клина, образуют с осью  $X$  углы  $\pm \sigma$ , а область между ними занята покоящимся газом с критическим давлением.

Сделаем три замечания. Во-первых, отмеченные выше свойства течения взаимодействия с клином однородной струи переносятся и на неоднородные (неизоэнергетические и неизэнтропические) струи совершенного газа с постоянными  $p_\infty$  и  $p_*$  и, как следствие, с  $M_\infty = \text{const} \leq 1$ . Это вытекает из результатов [13], в силу которых (см. также [14]) отнесение при каждом  $\psi$  скорости и плотности в таких струях к своим зависящим от  $\psi$  критическим значениям  $V_*^\circ$  и  $\rho_*^\circ$ , а давления — к постоянному в этом случае произведению  $\rho_*^\circ (V_*^\circ)^2$  сводит задачу натекания на клин неоднородной струи

к рассмотренной выше. Во-вторых, свойство ограниченности при  $V_\infty = 1$  области  $G$  с  $V \neq 1$  прямолинейными ЗЛ сохраняется и для тел, отличных в некоторой окрестности вершины от клина, например имеющих вогнутые заострения. Разумеется, для них не работает метод Фурье в переменных годографа, однако в силу теоремы [4] ЗЛ, ограничивающие  $G$  слева и справа, — прямые, нормальные оси струи и образующей клина. Аналогичная ситуация сохраняется даже тогда, когда при обтекании измененного начального участка тела возникают местные сверхзвуковые зоны. Важно лишь, чтобы такие зоны не примыкали к левой или правой границе  $G$ , а ростом энтропии в замыкающих их скачках можно было пренебречь. Наконец, в-третьих, в силу той же теоремы [4], справедливой и в осесимметричном случае, а также — результатов [15, 16] левая ЗЛ, являющаяся и здесь одной из границ области  $G$  с  $V \neq 1$  при симметричном натекании звуковой струи на конусообразные тела, — также прямая, нормальная оси струи. Здесь, правда,  $G$  ограничена только сверху по потоку. Вниз же по течению область с  $V < 1$  простирается неограниченно (утощаясь до нуля при  $x \rightarrow \infty$ ).

Авторы благодарят А. И. Рылова за полезные обсуждения и В. А. Вострецову — за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода. // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 5. С. 537—542.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. Томилов Е. Д. Струйные дозвуковые плоские движения газа. Новосибирск: Наука, 1980. 247 с.
4. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I. // J. Rat. Mech. and Anal. 1954. V. 3. № 2. P. 209—230.
5. Крайко А. Н. Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха. // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941—950.
6. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
7. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 144 с.
8. Руднев Ю. В. О некоторых плоскопараллельных установившихся движениях газа. // Теоретическая гидромеханика. М.: Оборонгиз, 1949. Вып. 1. С. 19—35.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 343 с.
10. Cherry T. M. Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas-flow theory // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1950. V. 202. № 1071. P. 505—522.
11. Cherry T. M. Tables and approximate formulae for hypergeometric functions of high order occurring in gas-flow theory. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 217. № 1129. P. 222—234.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под. ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
13. Munk M. M., Prim R. C. On the canonical form of the equations of steady motion of a perfect gas. // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. № 10. P. 957—958.
14. Крайко А. Н., Ланюк А. Н. О влиянии неравномерностей полей полной энтальпии и энтропии на интегральные характеристики сопла Лавалья. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 3. С. 102—109.
15. Антонцев С. Н. Осесимметрические задачи газовой динамики со свободными границами // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 3. С. 473—476.
16. Антонцев С. Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986. 108 с.

Москва

Поступила в редакцию  
3.VII.1987