

УДК 532.5

А. Л. Гонор, В. Б. Поручиков

ПРОНИКАНИЕ ТЕЛ ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ ФОРМЫ В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

В линейной постановке методом суперпозиции специальных решений получены точные аналитические решения пространственных нестационарных задач о входе звездообразных тел с произвольным количеством лепестков в сжимаемую жидкость с до- и сверхзвуковой скоростью.

Впервые общая постановка этой задачи для связки клиньев дана в [1].

1. Постановка задачи проникания тела звездообразной формы в сжимаемую жидкость. Рассмотрим нормальный вход пространственного тела S звездообразной формы в жидкое полупространство (фиг. 1). Тело S состоит из m тонких одинаковых симметрично расположенных по кругу лепестков, причем толщина лепестка мала по сравнению с его продольным и поперечным размерами, а сам лепесток имеет плоскость симметрии. Скорость движения тела $v(t)$ может быть как до-, так и сверхзвуковой. Благодаря наличию малого параметра — относительной толщины тела — задача допускает линеаризацию и ее решение для потенциала скорости возмущенного движения $\varphi(t, x, y, z)$ в неподвижной декартовой системе координат x, y, z (у которой плоскость $x = 0$ совпадает со свободной поверхностью невозмущенной жидкости, а ось x направлена вдоль оси тела) описывается волновым уравнением

$$\partial_{xx}\varphi + \partial_{yy}\varphi + \partial_{zz}\varphi = c_0^{-2}\partial_{tt}\varphi \quad (x > 0, t > 0) \quad (1.1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$\varphi = \partial_t\varphi = 0 \quad (t = 0) \quad (1.2)$$

и со следующими граничными условиями:

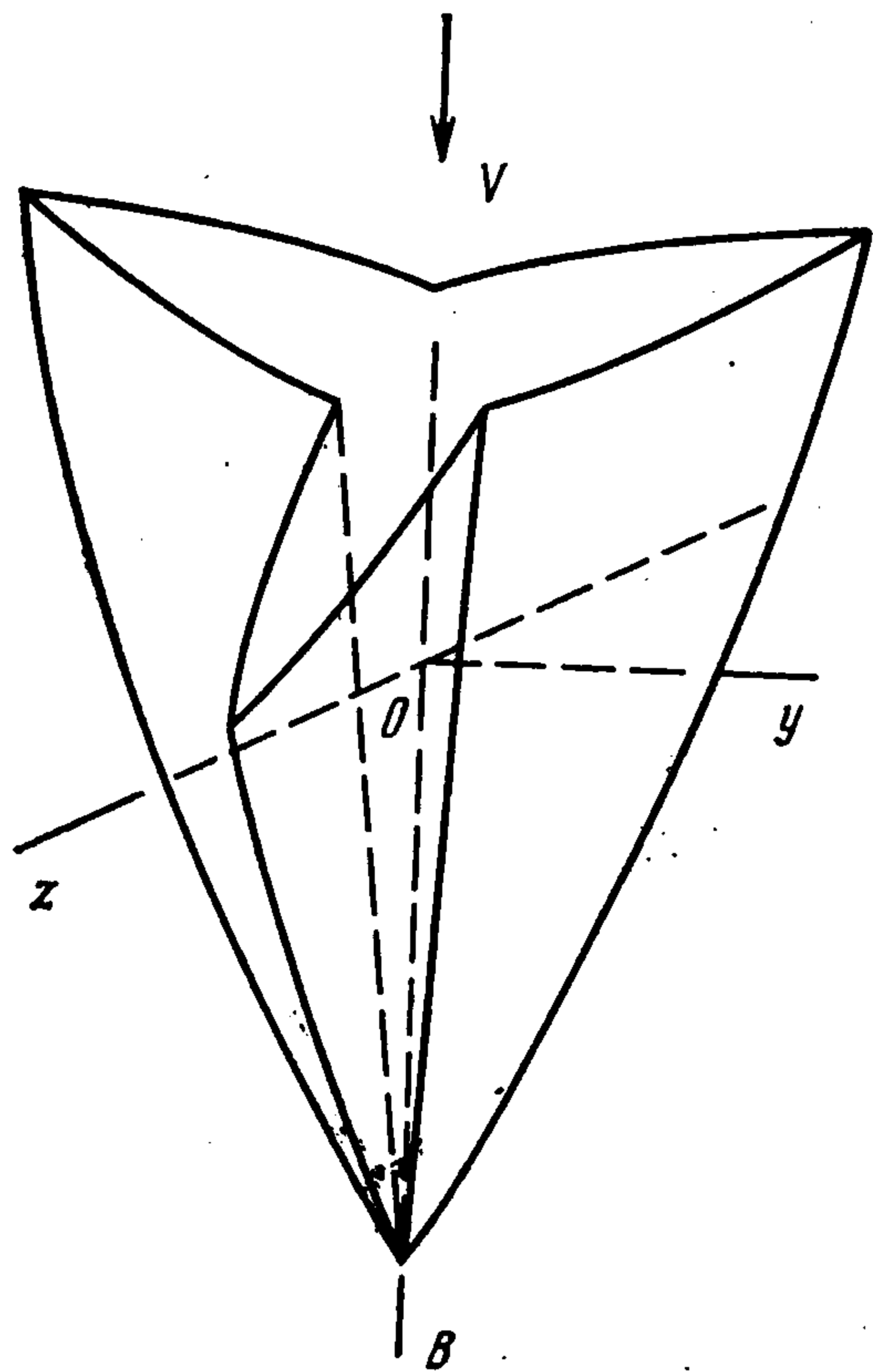
$$\varphi = 0 \quad (x = 0) \quad (1.3)$$

$$\partial_n\varphi = v_n(t, x, y, z) \quad \text{на } S_k \quad (1.4)$$

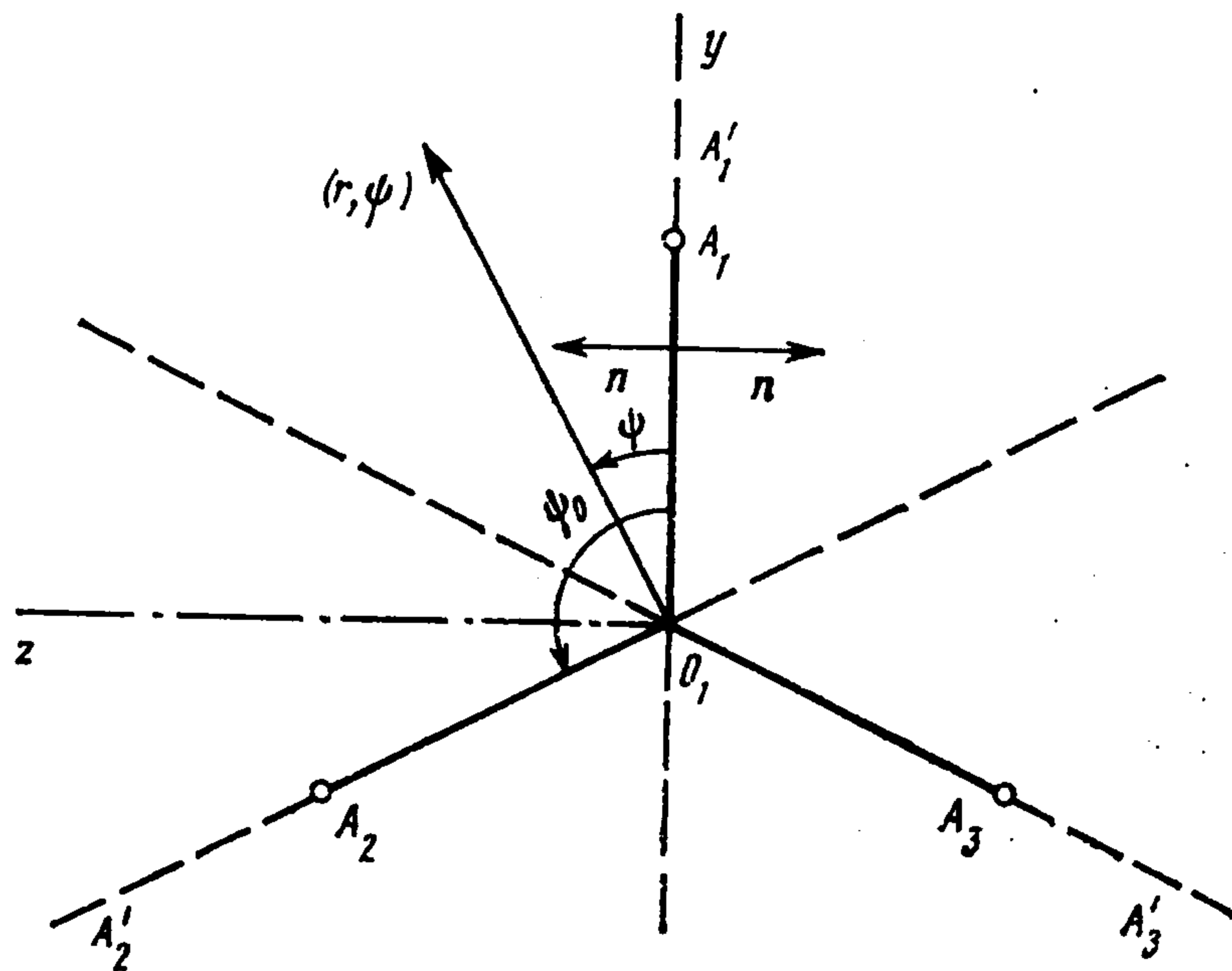
Здесь c_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости, S_k — проекция k -го лепестка на плоскость его симметрии, на которую сносятся граничные условия в силу линейной постановки задачи; выше и всюду далее $k = 1, 2, \dots, m$. Заметим, что из-за симметричности формы лепестков и их симметричного расположения в пространстве следует, что на плоскостях симметрии лепестков вне их проекций S_k должно выполняться условие $\partial_n\varphi = 0$ (фиг. 2).

На фиг. 2 показано сечение трехмерного пространства плоскостью $x = \text{const} > 0$ после линеаризации задачи. Штриховые линии — части сечений плоскостей, в точках которых выполняется условие $\partial_n\varphi = 0$, а соответствующие сплошные линии $O_1A_1, O_1A_2, \dots, O_1A_m$ — сечения соответствующих проекций S_1, S_2, \dots, S_m , на каждой стороне которых выполняется симметричное условие $\partial_n\varphi = v_n(t, x, y, z)$.

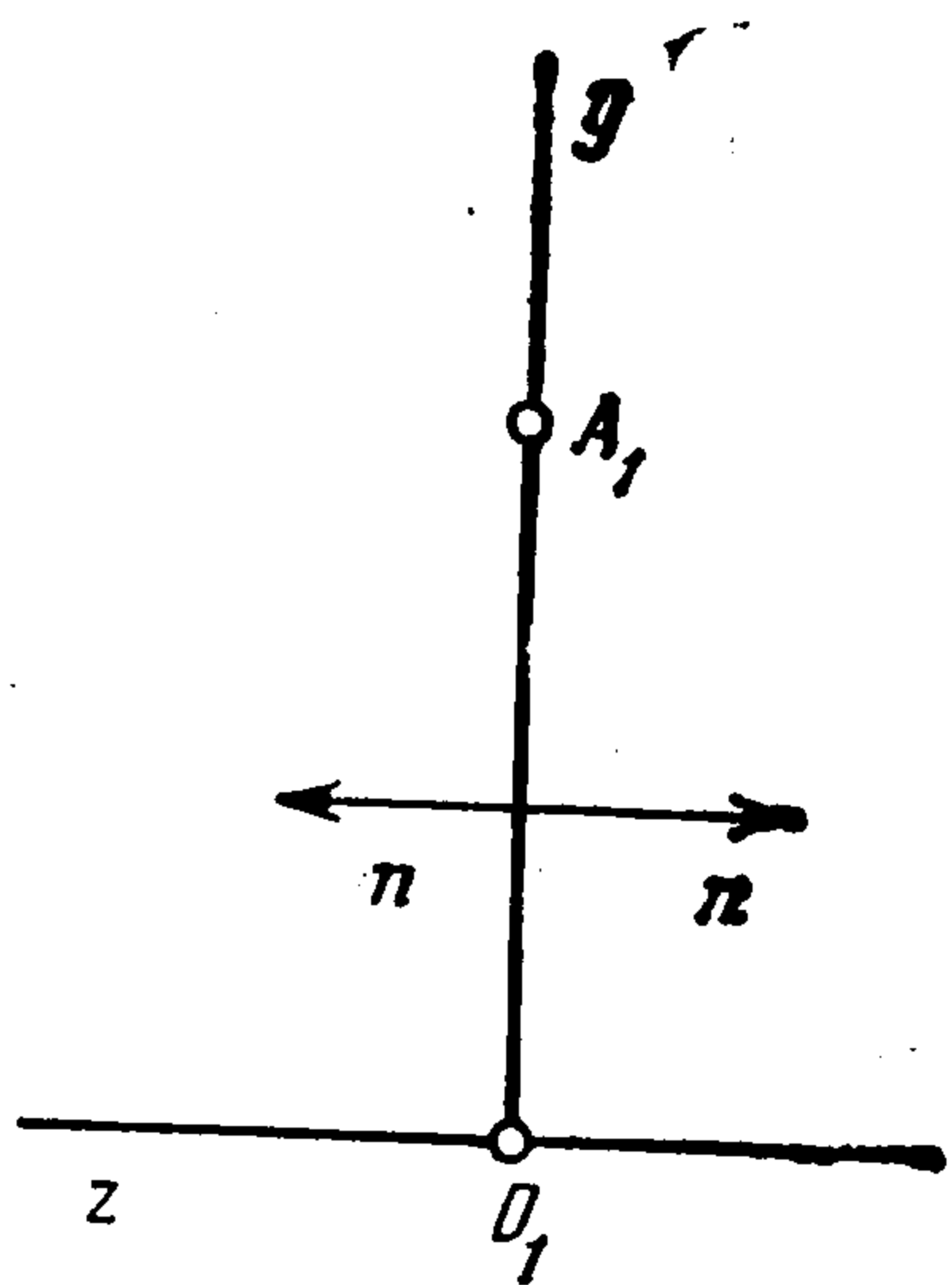
Для обеспечения единственности решения рассматриваемой задачи достаточно потребовать [2], чтобы давление удовлетворяло в окрестности линий и точек, в которых нарушается гладкость границы тела, следующим



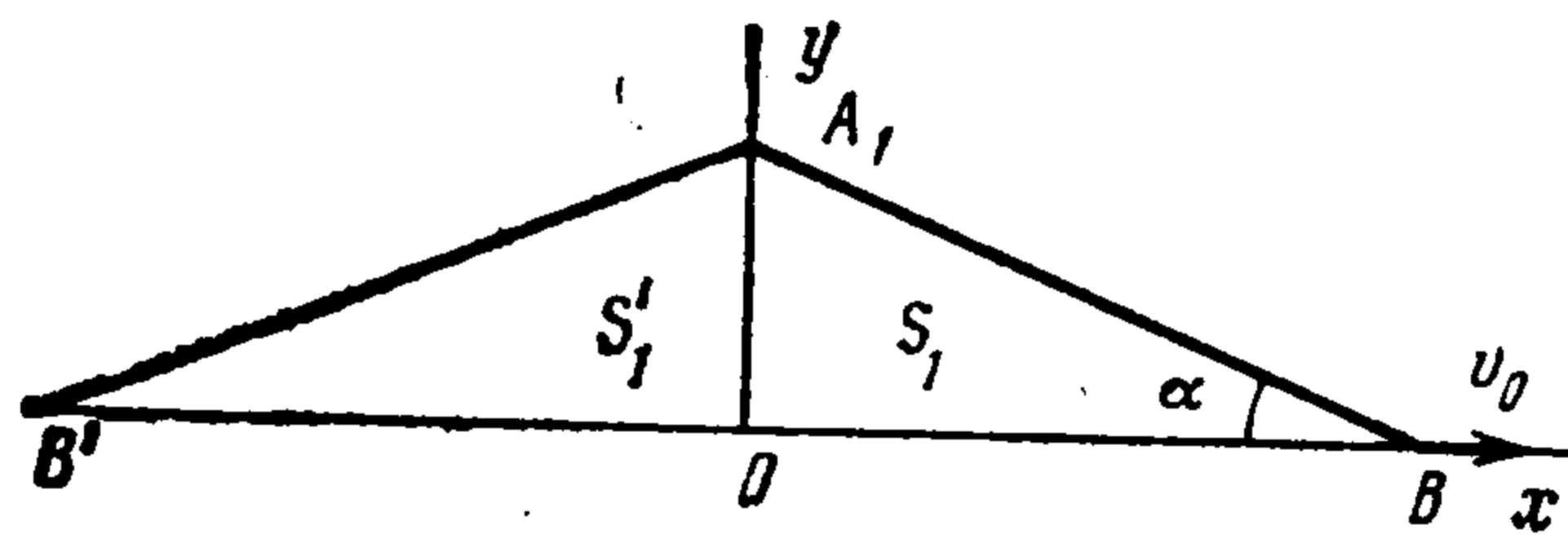
Фиг. 1



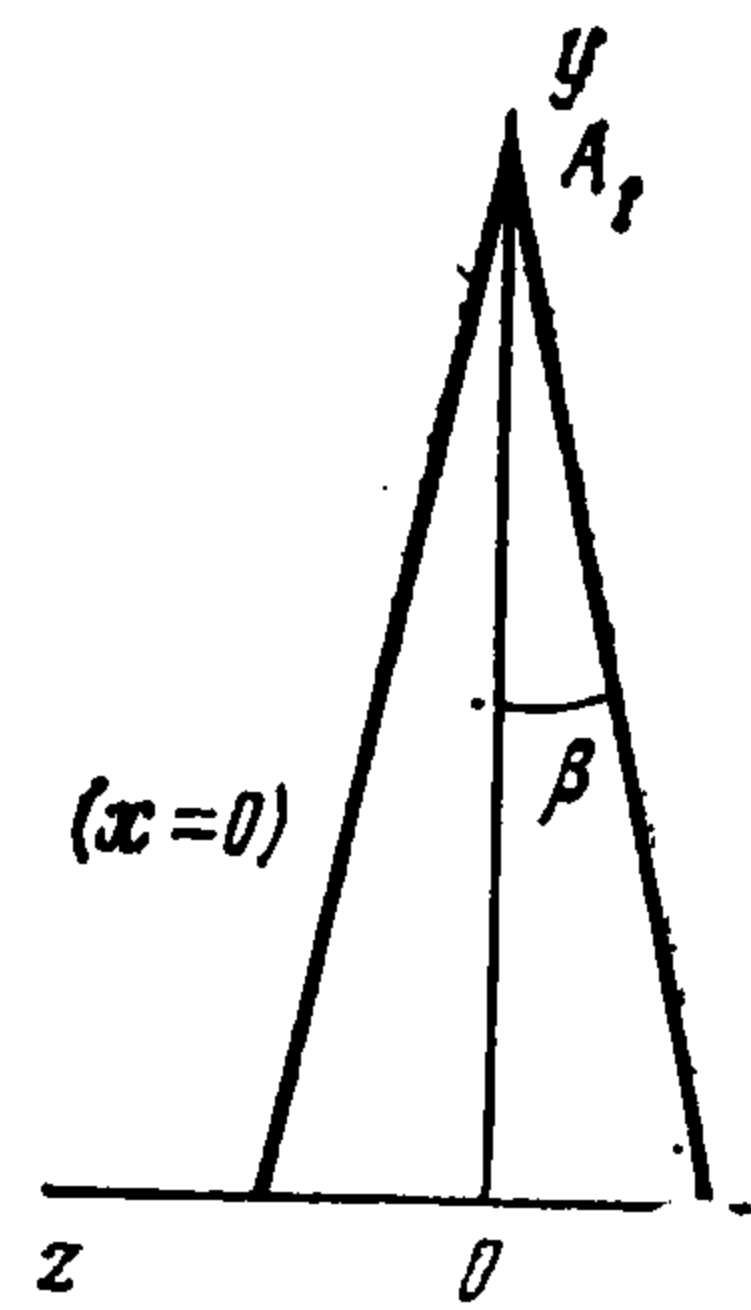
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



ограничениям: $p = C + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\beta > -1$ для движущейся точки (острие тела и точки излома движущихся ребер проекций S_k), $\beta > -1/2$ для движущейся линии (точки движущихся ребер S_k без точек излома) и неподвижной точки O , $\beta > 0$ для неподвижной линии (линия пересечения проекций S_k — часть оси x и линии пересечения проекций S_1, S_2, \dots, S_m с плоскостью $x = 0$).

Здесь ε — расстояние до линии (точки) где нарушается гладкость, а величина C и остаточный член $O(\varepsilon^\beta)$ могут зависеть от времени и других пространственных переменных.

Заметим, что давление определяется по линеаризованной формуле интеграла Коши — Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_0 \partial_t \varphi \quad (1.5)$$

где p_0 и ρ_0 — давление и плотность в невозмущенной жидкости.

Как следует из рассмотренной картины течения (фиг. 2), внутри каждого сектора с углом раствора $\psi_0 = 2\pi/m$, например $A_1'A_1O_1A_2A_2'$, течение такое же, как и в остальных секторах.

Таким образом, решение исходной задачи проникания сводится к решению уравнения (1.1) внутри пространственного сектора $A_1'A_1O_1A_2A_2'$ в области $x > 0$ (фиг. 2) при нулевых начальных условиях (1.2), краевых

условиях (1.3), заданной нормальной производной $\partial_n \varphi$ на граничных плоскостях ($\partial_n \varphi = v_n$ на $O_1 A_1$ и $O_1 A_2$, $\partial_n \varphi = 0$ на $A_1 A_1'$ и $A_2 A_2'$) и ограничениях указанных выше для окрестности изломов поверхности тела.

2. Метод построения решения задачи для произвольного числа лепестков. Для построения решения сформулированной выше задачи для сектора $A_1' A_1 O_1 A_2 A_2'$ с углом раствора $\psi_0 = 2\pi/m$ используем принцип суперпозиции решений линейных задач. Будем строить решение данной задачи в виде линейной комбинации вспомогательных решений некоторых математических задач, каждая из которых может, вообще говоря, и не иметь физического смысла.

Пусть имеем решение $\varphi = \varphi_1(t, x, y, z)$ волнового уравнения (1.1) для полупространства $x > 0$ (см. сечение $x = \text{const} > 0$ на фиг. 3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям (1.2), краевому условию (1.3) и условиям на плоскости $z = 0$; $\partial_n \varphi = v_n(t, x, y, \pm 0)$ на S_1 ($O_1 A_1$ на фиг. 3), $\partial_n \varphi = 0$ вне S_1 (ось y вне отрезка $O_1 A_1$ на фиг. 3).

Рассмотрим сначала случай, когда $m = 2l - 1$ (нечетное число лепестков у звездообразного тела). Наложим на решение $\varphi = \varphi_1(t, x, y, z)$ решения задач, полученных поворотом около оси x плоскости $z = 0$ (фиг. 3) с заданной на ней нормальной производной $\partial_n \varphi$ последовательно на углы $\psi_k = \psi_0 k$ ($k = 1, 2, \dots, 2l - 2$) так, чтобы сечение $O_1 A_1$ занимало последовательно положения $O_1 A_2, O_1 A_3, \dots, O_1 A_{2l-1}$. Из-за симметричного расположения сечений $O_1 A_2, O_1 A_3, \dots, O_1 A_{2l-1}$ (а их четное число $2l - 2$) относительно плоскости $z = 0$ добавленные решения не нарушают значений производной $\partial_n \varphi$ на этой плоскости. Аналогичным образом не нарушаются значения $\partial_n \varphi$ и на повернутых плоскостях. В результате получаем решение задачи, периодическое по углу ψ ($y = r \cos \psi, z = r \sin \psi$) с периодом $\psi = \psi_0$, отвечающее конфигурации на фиг. 2, т. е. решение исходной линейной задачи (1.1)–(1.5), которое имеет вид

$$\varphi(t, x, y, z) = \sum_{k=1}^m \varphi_1\left(t, x, r, \psi - \frac{2\pi(k-1)}{m}\right) \quad (2.1)$$

$$\varphi_1(t, x, r, \psi) \equiv \varphi_1(t, x, y, z), \quad x \geq 0, \quad (y = r \cos \psi, z = r \sin \psi)$$

Формула (2.1) получена для тела с нечетным числом лепестков. В случае четного числа лепестков построение аналогично и решение также описывается формулой (2.1).

Таким образом, для получения решения (2.1) требуется найти в области $x \geq 0$ вспомогательное решение $\varphi = \varphi_1(t, x, y, z)$. Чтобы удовлетворить условию $\varphi = 0$ на плоскости $x = 0$, продолжим решение $\varphi = \varphi_1$ нечетным образом из области $x > 0$ в область $x < 0$.

Далее, учитывая четность φ_1 по z , приходим окончательно к задаче определения функции $\varphi_1(t, x, y, z)$, удовлетворяющей в области $z > 0$ волновому уравнению (1.1), нулевым начальным условиям (1.2) и следующему краевому условию на плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_z \varphi_1(t, x, y, z)|_{z=+0} &= v_n(t, x, y) \operatorname{sgn} x H[F(t, x, y)] H(t) \\ (H(x) &= 1, x > 0; H(x) = 0, x < 0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $F(t, x, y) = 0$ — уравнение линии $BA_1 B'OB$ при $t > 0$ (фиг. 4), ограничивающей область S_1 и ее симметричное отображение S_1' , причем в точках внутри области $S_1 + S_1'$ выполняется неравенство $F(t, x, y) > 0$.

Решение этой задачи известно (его можно получить непосредственно при помощи интегральных преобразований) и имеет вид [3]

$$\varphi_1(t, x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{z_0} \varphi_1 \left(t - \frac{R}{c_0}, \xi, \eta, z_0 \right) \Big|_{z_0=+0} \frac{d\xi d\eta}{R} \quad (2.3)$$

$$R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}$$

(определение величины $\partial_{z_0} \varphi_1|_{z_0=+0}$ дано в (2.2)).

Вследствие четности по z полученное решение (2.3) пригодно во всем пространстве $-\infty < z < \infty$, где оно непрерывно, но при переходе через плоскую область $S_1 + S_1'$ терпит разрыв нормальная производная (ибо согласно (2.2))

$$(\partial_z \varphi_1)_{z=+0} = -(\partial_z \varphi_1)_{z=-0} = \partial_n \varphi_1 = v_n \operatorname{sgn} x$$

Принимая во внимание соотношения (1.5), (2.1) и (2.3), находим

$$p(t, x, r, \psi) - p_0 = \sum_{k=1}^m p_1 \left(t, x, r, \psi - \frac{2\pi(k-1)}{m} \right) \quad (2.4)$$

$$p_1(t, x, r, \psi) = -\rho_0 \partial_t \varphi_1(t, x, r, \psi)$$

В частности, если форма и сечение лепестка — треугольные (фиг. 4), а скорость входа тела постоянна ($v(t) \equiv v_0$), то $v_n(t, x, y) = v_0 \gamma$, где $\gamma = (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \beta)^{-1/2} \approx \beta \operatorname{tg} \alpha$ (ибо $\beta \ll 1$) и

$$F(t, x, y) = \left(1 - \frac{|x|}{v_0 t} - \frac{y}{v_0 t \operatorname{tg} \alpha} \right) H(y)$$

Тогда

$$\varphi_1(t, x, r, \psi) = -\frac{v_0 \gamma}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\operatorname{sgn} \xi d\xi d\eta}{R} \quad (x \geq 0)$$

где область интегрирования Δ определяется из решения системы неравенств

$$F[t - (R/c_0), \xi, \eta] > 0, \quad t - (R/c_0) > 0$$

В частном случае, когда скорость движения кромки вдоль свободной поверхности (точки A_1) вдоль оси Oy на фиг. 4 дозвуковая, т. е. $v_0 \operatorname{tg} \alpha < c_0$, для составляющей давления в формуле (2.4) после соответствующих выкладок получаем

$$p_1(t, x, r, \psi) = \frac{\gamma \rho_0 v_0 c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \xi H(\eta_0) d\xi}{R_0/a + \eta_0 - y} \quad x \geq 0 \quad (2.5)$$

$$\eta_0 = y + (b - a \{b^2 + (1 - a^2) [(x - \xi)^2 + z^2]\}^{1/2}) / (1 - a^2), \quad R_0 = R|_{\eta=\eta_0}$$

$$b = (v_0 t - |\xi|) \operatorname{tg} \alpha - y, \quad a = v_0 \operatorname{tg} \alpha / c_0 = M \operatorname{tg} \alpha < 1$$

$$M = v_0 / c_0, \quad y = r \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad x \geq 0$$

Преобразуя знаменатель в подынтегральном выражении формулы (2.5) при помощи равенства $\eta_0 - y = b - aR_0$ и переходя к безразмерным переменным

$$x^1 = \frac{x}{v_0 t}, \quad y^1 = \frac{y}{v_0 t}, \quad z^1 = \frac{z}{v_0 t}, \quad \xi^1 = \frac{\xi}{v_0 t}, \quad \eta_0^1 = \frac{\eta_0}{v_0 t}$$

получим

$$p_1(t, x, r, \psi) \equiv p_1(x^1, r^1, \psi) = \frac{\rho_0 v_0 c_0 a \gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \xi^1 H(\eta_0^1) d\xi^1}{\{[(1 - |\xi^1|) \operatorname{tg} \alpha - y^1]^2 + (1 - a^2)[(x^1 - \xi^1)^2 + (z^1)^2]\}^{1/2}} \quad (2.6)$$

$$x^1 \geq 0, y^1 = r^1 \cos \psi, z^1 = r^1 \sin \psi, r^1 = [(y^1)^2 + (z^1)^2]^{1/2}$$

$$\eta_0^1 = y^1 + (b^1 - a \{(b^1)^2 + (1 - a^2) [(x^1 - \xi^1)^2 + (z^1)^2]^{1/2}\}) / (1 - a^2)$$

$$b^1 = (1 - |\xi^1|) \operatorname{tg} \alpha - y^1$$

Верхний индекс 1 всюду далее опускаем.

Рассмотрим теперь последовательно дозвуковой ($M < 1$) и сверхзвуковой ($M > 1$) случаи проникания.

3. Проникание с постоянной дозвуковой скоростью тела с лепестками треугольной формы. Пусть $M < 1$ (и $a < 1$). Заменяем бесконечные пределы интегрирования в (2.6) на конечные пределы ξ^+ и ξ^- , которые определяются из неравенства $\eta_0 > 0$ и при $M < 1$, $a < 1$ для рассматриваемых точек из области $x^2 + y^2 + z^2 < M^{-2}$, $x \geq 0$ имеют вид

$$(1 - M^2) \xi^\pm = -xM^2 \pm 1 \mp [(xM^2 \mp 1)^2 + M^2(1 - M^2)(x^2 + y^2 + z^2 - M^{-2})]^{1/2} \quad (\xi^+ > 0, \xi^- < 0) \quad (3.1)$$

Так как $\xi^-(-x) = \xi^+(x)$, то соотношение (2.6) окончательно записывается в форме

$$p_1(x, r, \psi) = (2\pi)^{-1} \rho_0 v_0 c_0 a \gamma [A(x) - A(-x)], \quad x \geq 0$$

$$A(x) = N^{-1} \ln B(x, y, z, \psi), \quad B(x, y, z, \psi) = C_+(x, y, z, \psi) (1 - a^2) \cdot$$

$$\cdot (1 + NM)^{-1} [N \{(\operatorname{tg} \alpha - y)^2 + (1 - a^2)(x^2 + z^2)\}^{1/2} - \operatorname{tg}^2 \alpha +$$

$$+ y \operatorname{tg} \alpha - x(1 - a^2)]^{-1} \quad (3.2)$$

$$C_\pm(x, y, z, \psi) = 1 - x + y(1 - M^2) \operatorname{tg} \alpha \pm N \{(1 - x)^2 + (1 - M^2) \cdot$$

$$\cdot (y^2 + z^2)\}^{1/2}, \quad N = (\sec^2 \alpha - a^2)^{1/2}$$

Итак, согласно (2.4) и (3.2) получаем выражение для безразмерной величины давления в любой точке (x, r, ψ) возмущенной области $x^2 + y^2 + z^2 < M^{-2}$ ($x \geq 0$)

$$p^\circ(x, r, \psi) = \frac{p - p_0}{\rho_0 v_0 c_0} = \frac{a\gamma}{2\pi N} \ln \prod_{k=1}^m \frac{B(x, y_k, z_k, \psi)}{B(-x, y_k, z_k, \psi)} \quad (3.3)$$

$$y_k = r \cos [\psi - 2\pi(k-1)m^{-1}], \quad z_k = r \sin [\psi - 2\pi(k-1)m^{-1}]$$

Из формул (3.2) и (3.3) вытекают следующие результаты:

1°. При $x \rightarrow 0$ имеем $B(+0, y_k, z_k, \psi) = B(-0, y_k, z_k, \psi)$, откуда получаем $p^\circ \rightarrow 0$.

2°. При $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow M^{-2}$ имеем $B(\pm x, y_k, z_k, \psi) \rightarrow 1$ и $p^\circ \rightarrow 0$.

3°. При $z_k = 0$, $0 < x < 1$ и $y_k \rightarrow (1 - x) \operatorname{tg} \alpha$ находим, что знаменатель выражения для $B(x, y_k, z_k, \psi)$ стремится к нулю, тогда

$$\ln [B(x, y_k, z_k, \psi) / B(-x, y_k, z_k, \psi)] \rightarrow +\infty$$

и p° имеет логарифмическую особенность у соответствующей кромки лепестка.

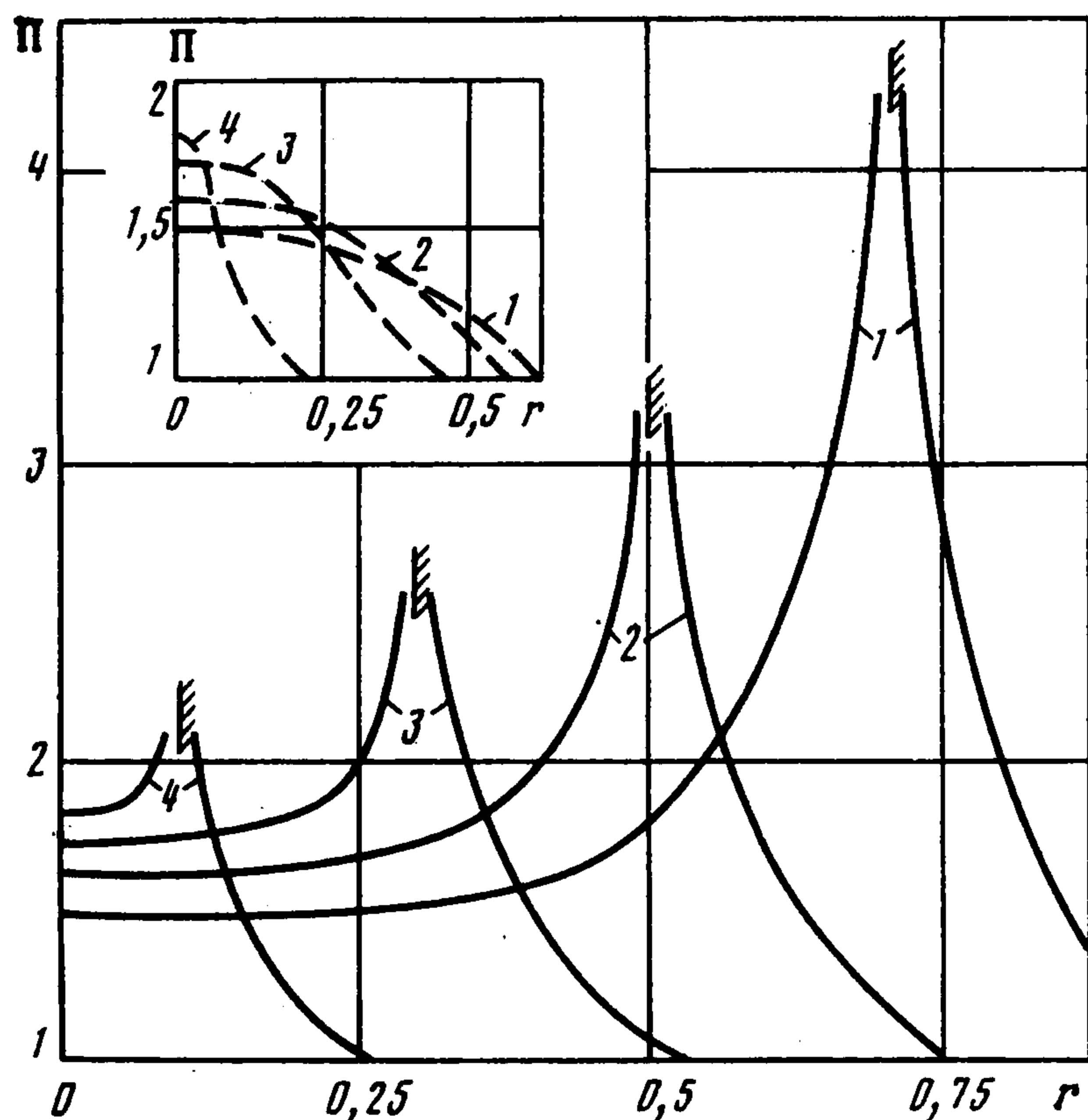
4°. В точках оси x вне точки B , т. е. при $y_k = z_k = 0$, $x \neq 1$ давление p° конечно, но при $x \rightarrow 1 \pm 0$ оно имеет логарифмическую особенность.

Полученные результаты удовлетворяют указанным выше ограничениям на порядок особенностей; следовательно, решение (3.3) единственно.

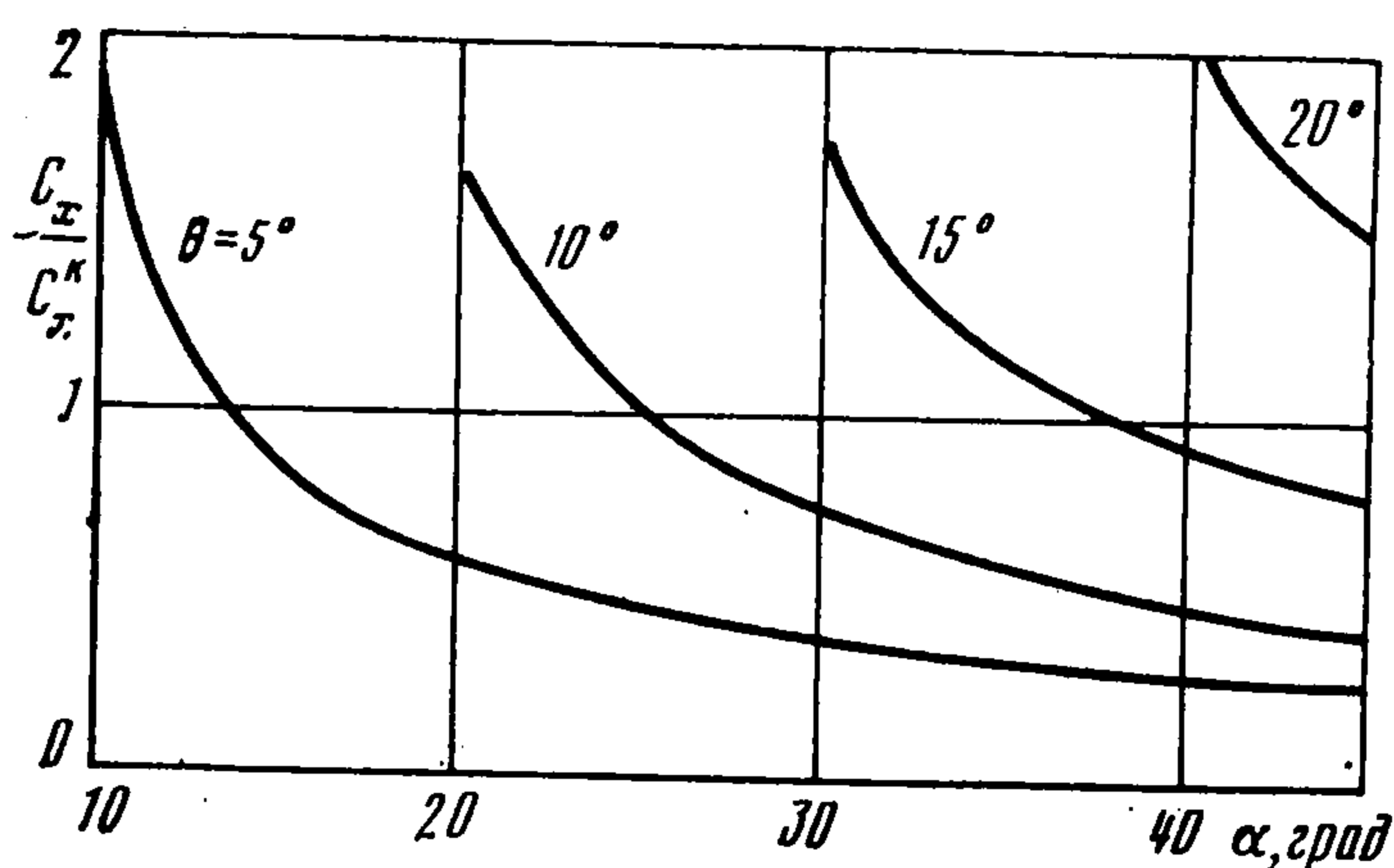
Отметим, что хотя во вспомогательном решении φ_1 составляющая скорости $\partial_r \varphi_1$ имеет на оси OB (фиг. 4) логарифмическую особенность, при построении искомого решения φ все эти особенности взаимно уничтожаются, так как согласно [4]

$$\sum_{k=1}^m \cos [\psi - 2\pi(k-1)m^{-1}] \equiv 0$$

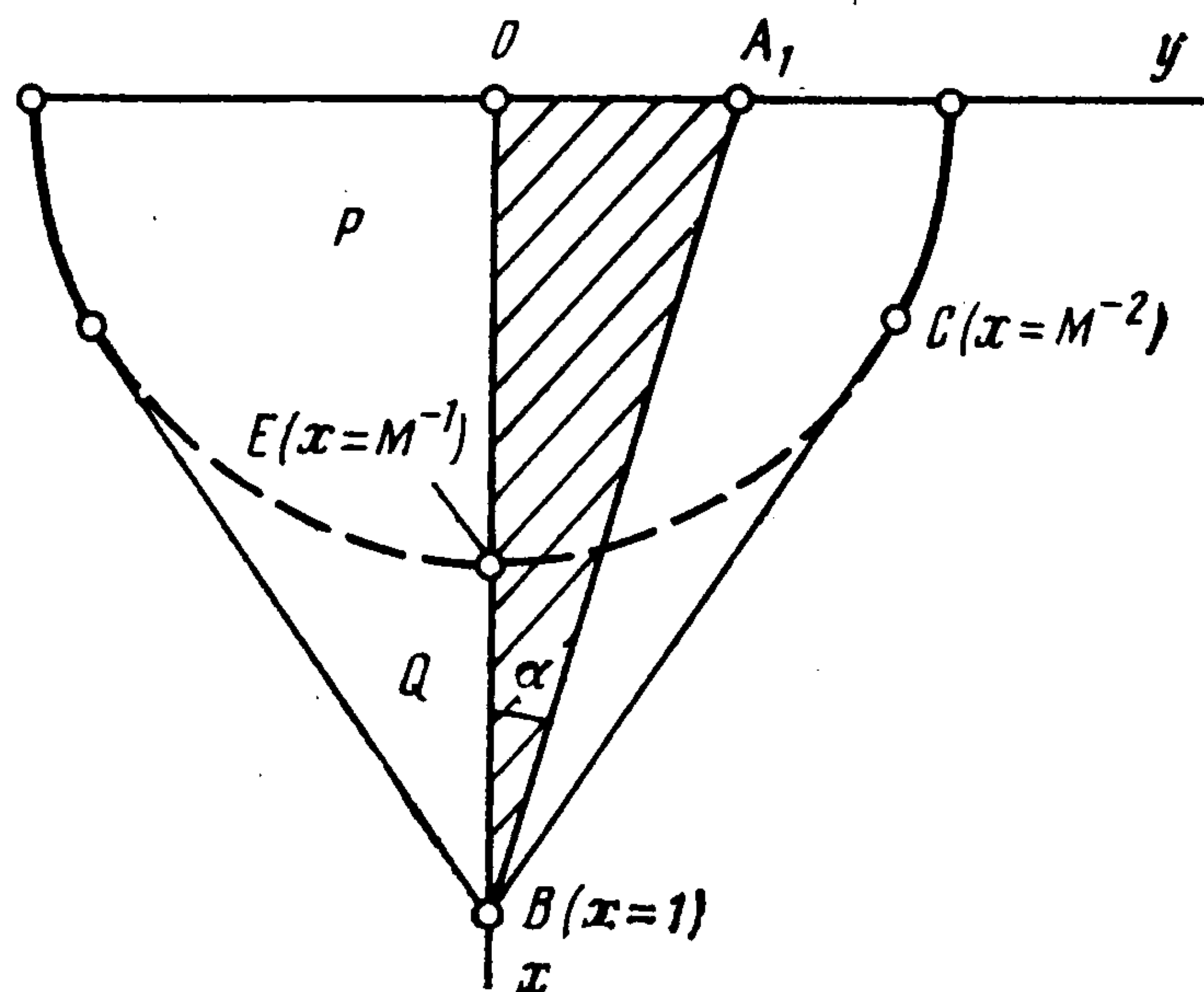
и скорость на оси OB вне окрестностей точек O и B ограничена.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Подробное исследование характеристик течения проводилось для звездообразного тела с лепестками треугольной формы и сечения (фиг. 4), число которых $m = 4$. На фиг. 5 представлены данные по распределению давления на поверхности лепестка $\psi = 0$ (сплошные линии) и в плоскости $\psi = \pi/4$, проходящей через биссектрису угла между лепестками в различных сечениях $x = \text{const}$ (штриховые линии). Кривые 1 — 4 соответствуют $x = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$.

Расчет выполнен при $M = 0,8$, $\alpha = \pi/4$, причем давление отнесено к соответствующему в каждом сечении $x = \text{const}$ среднему значению давления на стенке двухлепесткового клина и обозначено Π . Превышение давления почти в 2 раза во всей области возмущенного течения между лепестками объясняется их сильной интерференцией. Давление сохраняет высокие значения на стенке и вдоль любого луча в области, охваченной лепестками, и существенно падает вне этой области.

Таким образом, на основе анализа распределения давлений можно сделать качественный вывод о том, что погружению звездообразного тела в жидкость сопутствует обширная область высокого давления, которая

перемещается вместе с телом. Подобное утверждение для связки клиньев получено в работе [1]. Зависимость сопротивления звездообразного тела, отнесенного к сопротивлению эквивалентного по длине и объему кругового конуса с полууглом раствора θ , от угла α при вершине лепестка представлено на фиг. 6 для $M = 0,9$. Видно, что сопротивление звездообразного тела может быть как больше сопротивления эквивалентного конуса (при относительно малых углах α), так и меньше такового при увеличении угла α .

Уменьшение сопротивления отмечалось ранее при рассмотрении стационарного обтекания звездообразного тела гиперзвуковым потоком газа. Объяснение причины такого поведения состояло в том, что при постоянной длине тела и объеме ($\theta = \text{const}$) увеличение угла при вершине α приводит к утоньшению лепестка и снижению волнового сопротивления тела. Однако при гиперзвуковом обтекании звездообразного тела в широком диапазоне изменения угла α волновое сопротивление меньше, чем у эквивалентного конуса. Превышение сопротивления такого тела по сравнению с эквивалентным конусом при входе в жидкость с дозвуковой скоростью, по-видимому, объясняется интерференцией соседних лепестков, которая почти отсутствует при гиперзвуковом обтекании тела потоком газа.

4. Проникание звездообразного тела с постоянной сверхзвуковой скоростью. Пусть $M > 1$ ($a < 1$). Как и в рассмотренном выше дозвуковом случае ($M < 1$, $a < 1$), решение $p_1(x, r, \psi)$ вспомогательной задачи для постоянной скорости входа v_0 и лепестка треугольной формы с сечением S_1 представляется в виде интеграла (2.6). В дозвуковом случае это решение было записано в элементарных функциях. Аналогичным образом сведем к элементарным функциям интеграл (2.6) и в рассмотренном здесь сверхзвуковом случае входа с дозвуковыми кромками (фиг. 7).

Как и в дозвуковом случае, область интегрирования по ξ определяется условием $\eta_0 > 0$, где η_0 дается формулой в (2.6) (верхний индекс 1 у переменных всюду после формулы (2.6) был опущен). Это условие приводит к системе

$$\begin{aligned} a^2 \{b^2 + (1 - a^2) [(x - \xi)^2 + z^2]\} < [b + y(1 - a^2)]^2 \\ b + y(1 - a^2) > 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Первое неравенство в (4.1) приводится в областях $\xi \geq 0$ и $\xi < 0$ к квадратным неравенствам для ξ , которые удобно представить в виде:

$$u^2 (M^2 - 1) \pm 2(1 \mp x)u + M^2(y^2 + z^2) - (1 \mp x)^2 < 0 \quad (u \equiv \xi - x) \quad (4.2)$$

где верхний знак берется при $\xi \geq 0$, нижний — при $\xi < 0$. Второе неравенство в (4.1) принимает вид

$$-1 + yMa < \xi < 1 - yMa$$

Прежде чем найти решение системы (4.1) в различных областях возмущенного движения среды, выпишем выражения корней квадратных трехчленов из левых частей неравенств (4.2). Они имеют вид

$$\xi_{i\pm} = [xM^2 \mp 1 \mp (-1)^i \{(xM^2 \mp 1)^2 + M^2(1 - M^2)(x^2 + y^2 + z^2 - M^{-2})\}^{1/2}] \times (M^2 - 1)^{-1} \quad (i = 1, 2) \quad (4.3)$$

где $\xi_{1,2}^+$ ($\xi_{1,2}^-$) — корни квадратного трехчлена из левой части (4.2) для верхних (нижних) знаков в (4.2).

В зависимости от значений переменных и параметров эти корни могут быть как действительными, так и комплексными, причем могут как входить, так и не входить в области $\xi \geq 0$ и $\xi < 0$.

В общем случае имеется шесть областей возмущенного движения при сверхзвуковом входе тела, которые осесимметричны и занимают в совокупности все полупространство $x > 0$.

Анализ показывает, что при $M > 1$, $a < 1$ решение вспомогательной задачи отлично от нуля только в областях P и Q (см. сечение $z = 0$ возмущенной области на фиг. 7), что согласуется с физическими представлениями. В результате для пределов интегрирования находим:

$$\begin{aligned} \xi_1^- < \xi < \xi_1^+ & \text{ в области } P \ (x^2 + y^2 + z^2 < M^{-2}, x > 0) \\ \xi_2^+ < \xi < \xi_1^+ & \text{ в области } Q \ (x^2 + y^2 + z^2 > M^{-2}, \\ & M^{-2} < x < 1 - [(z^2 + y^2)(M^2 - 1)]^{1/2}) \end{aligned}$$

Для области P пределы интегрирования ξ_1^- и ξ_1^+ те же, что и в дозвуковом случае. Для области Q , где пределами интегрирования являются корни ξ_2^+ и ξ_1^+ , решение также можно найти, используя вывод выражений (3.2), (3.3). В результате аналогично (3.3) получаем с помощью (2.4) в рассматриваемой области Q следующее выражение для безразмерного давления:

$$p^\circ(x, r, \psi) = \frac{p - p_0}{\rho_0 v_0 c_0} = \frac{a\gamma}{2\pi N} \ln \prod_{k=1}^m \frac{C_+(x, y_k, z_k, \psi)}{C_-(x, y_k, z_k, \psi)} \quad (4.4)$$

(обозначения такие же, как в формулах (3.2)).

Таким образом, в случае сверхзвукового входа звездообразного тела ($M > 1$) с дозвуковыми кромками ($a = M \operatorname{tg} \alpha < 1$) формулы, описывающие решение в дозвуковой области $x^2 + y^2 + z^2 < M^{-2}$ (обл. P на фиг. 7), совпадают с формулами (3.3), полученными при дозвуковом проникании ($M < 1$, $a < 1$). В сверхзвуковой области решение отлично от нуля только внутри характеристического конуса $(M^2 - 1)^{1/2}(y^2 + z^2)^{1/2} < 1 - x$, ограниченного сверху сферой $x^2 + y^2 + z^2 = M^{-2}$ (область Q на фиг. 7). В этой области решение для безразмерного давления описывается формулами (4.4).

Анализ решения показывает, что на кромках тела (BA_1 на фиг. 7) давление как в сверх-, так и в дозвуковых областях имеет логарифмическую особенность. При подходе по разным направлениям к носику тела (B на фиг. 7) давление принимает различные конечные значения, так что в носике тела функция p° предела не имеет. На оси тела (OB на фиг. 7) давление всюду непрерывно и ограничено, причем в сверхзвуковой области (BE на фиг. 7) оно равно постоянной величине $p^\circ = (a\gamma t / (2\pi N)) \ln [(1 + N)/(1 - N)]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. Движение тела с звездообразным поперечным сечением в сжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 1. С. 101—112.
2. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
3. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1961. 276 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.