

УДК 532.5

Б. С. Чекин

ВХОД КЛИНА В НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Исследуется автомодельная задача о входе жесткого клина в идеальную несжимаемую невесомую жидкость, занимающую полупространство. Трудность заключается в том, что нелинейное граничное условие должно быть удовлетворено на свободной поверхности жидкости, положение которой неизвестно и должно быть определено в процессе решения задачи. Рассматриваются три режима движения жидкости: безотрывное обтекание клина, случай, когда одна из граней клина не смачивается жидкостью (полубесконечная пластинка), и промежуточный случай, когда на одной из граней образуется полость. Задача сводится к решению нелинейной системы интегральных уравнений. Предлагается способ решения этой системы для безотрывного обтекания и пластинки. Приводятся примеры некоторых вычислений. Результаты для тонких и тупых клиньев сравниваются с расчетами по приближенным формулам.

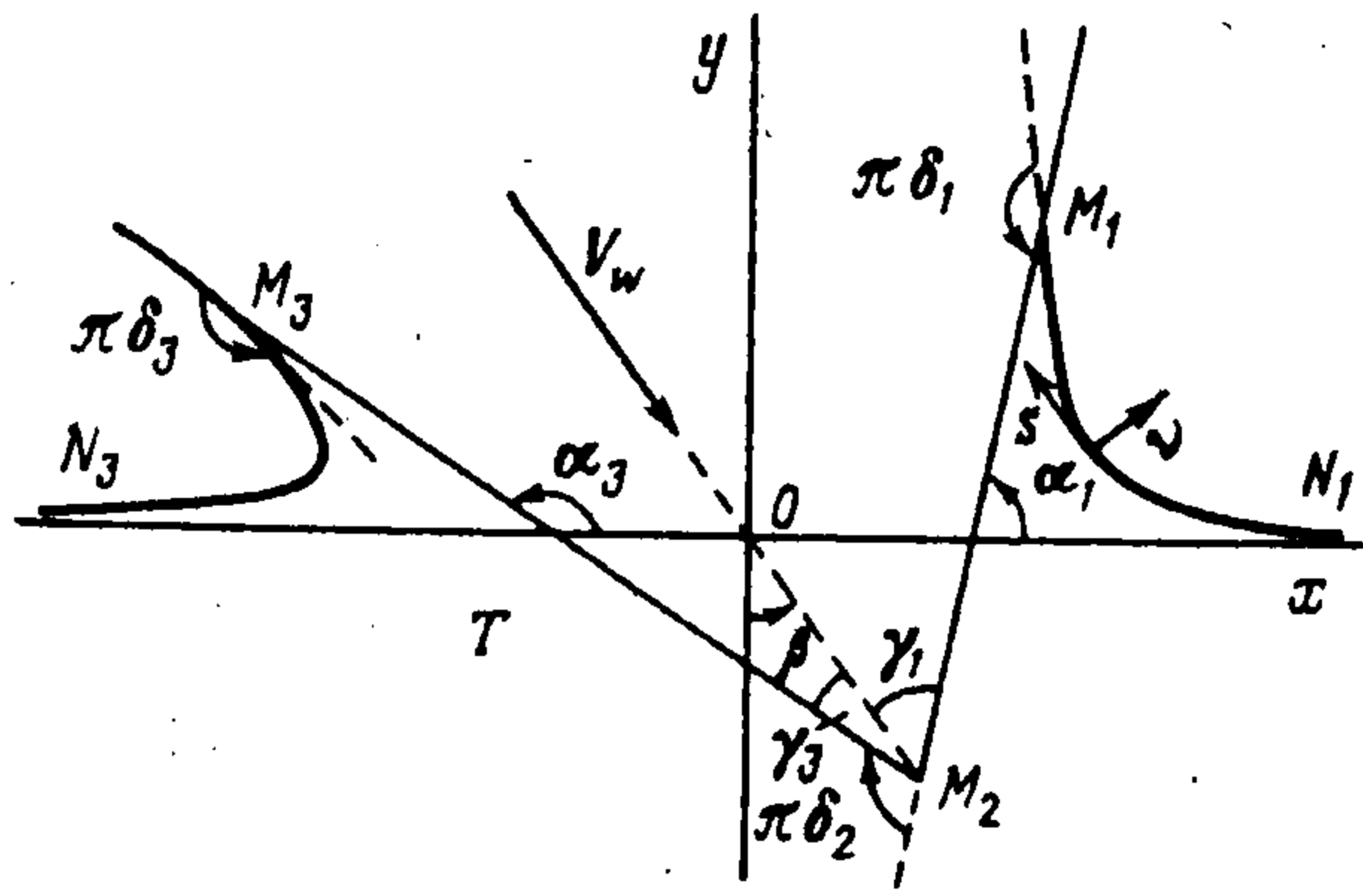
Впервые проникание клина в жидкость было исследовано в [1]. Получено [2] решение линейной задачи о нормальном ударе клина о поверхность воды. Приближенное решение задачи можно найти, например, в [3—5]. В [6] удалось получить решение для некоторого частного случая входа клина в жидкость. В [7] рассматривалась задача о нормальном входе клина в точной нелинейной постановке. Этой же проблеме посвящена работа [8].

Ниже используется метод, близкий к изложенному в [7].

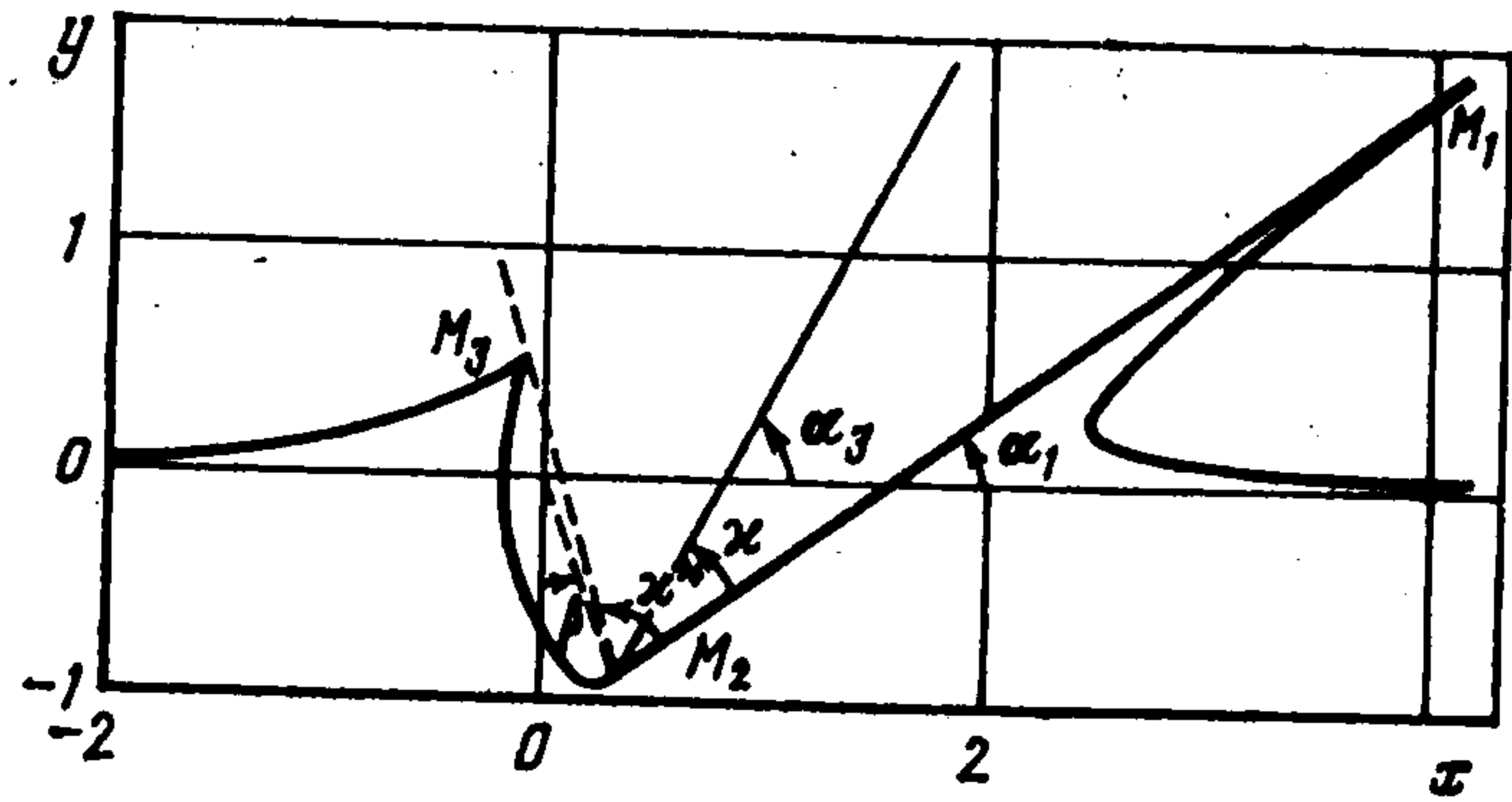
1. Пусть клин $M_1M_2M_3$, движущийся с постоянной скоростью V_w (фиг. 1), входит в жидкость, которая в начальный момент времени $t = 0$ занимала нижнюю часть пространства $Y \leq 0$ и находилась в покое. В момент времени $t > 0$ искаженная граница жидкости $N_1M_1M_2M_3N_3$ может иметь вид, изображенный на фиг. 1. Участки границы N_1M_1 , M_3N_3 назовем свободными границами (СГ), так как будем требовать, чтобы на них давление было равно нулю. Участки границы M_1M_2 , M_2M_3 , совпадающие с гранями клина, назовем непроницаемыми границами (НГ). Углы α_1 , α_3 , β , характеризующие ориентацию клина в пространстве и направление вектора V_w , обозначены на фиг. 1.

На фиг. 1 изображен лишь один из возможных режимов движения жидкости, соответствующий определенному соотношению между α_1 , α_3 , β , при котором нет отрыва струи от ребра клина M_2 . Если это соотношение не выполняется, то происходит отрыв струи от ребра клина и возможны два режима. Один из них представлен на фиг. 2, когда не смоченной жидкостью оказывается одна из граней, что соответствует по существу входу в жидкость полубесконечной пластинки или клина с достаточно малым углом раствора $\kappa = \alpha_3 - \alpha_1$. Третий режим изображен на фиг. 3. На одной из граней образуется полость. Этот режим можно рассматривать как промежуточный для первых двух режимов, который получается, если вышеупомянутое соотношение для углов α_1 , α_3 , β , необходимое для безотрывного движения, нарушается при достаточно малых изменениях α_1 , α_3 , β .

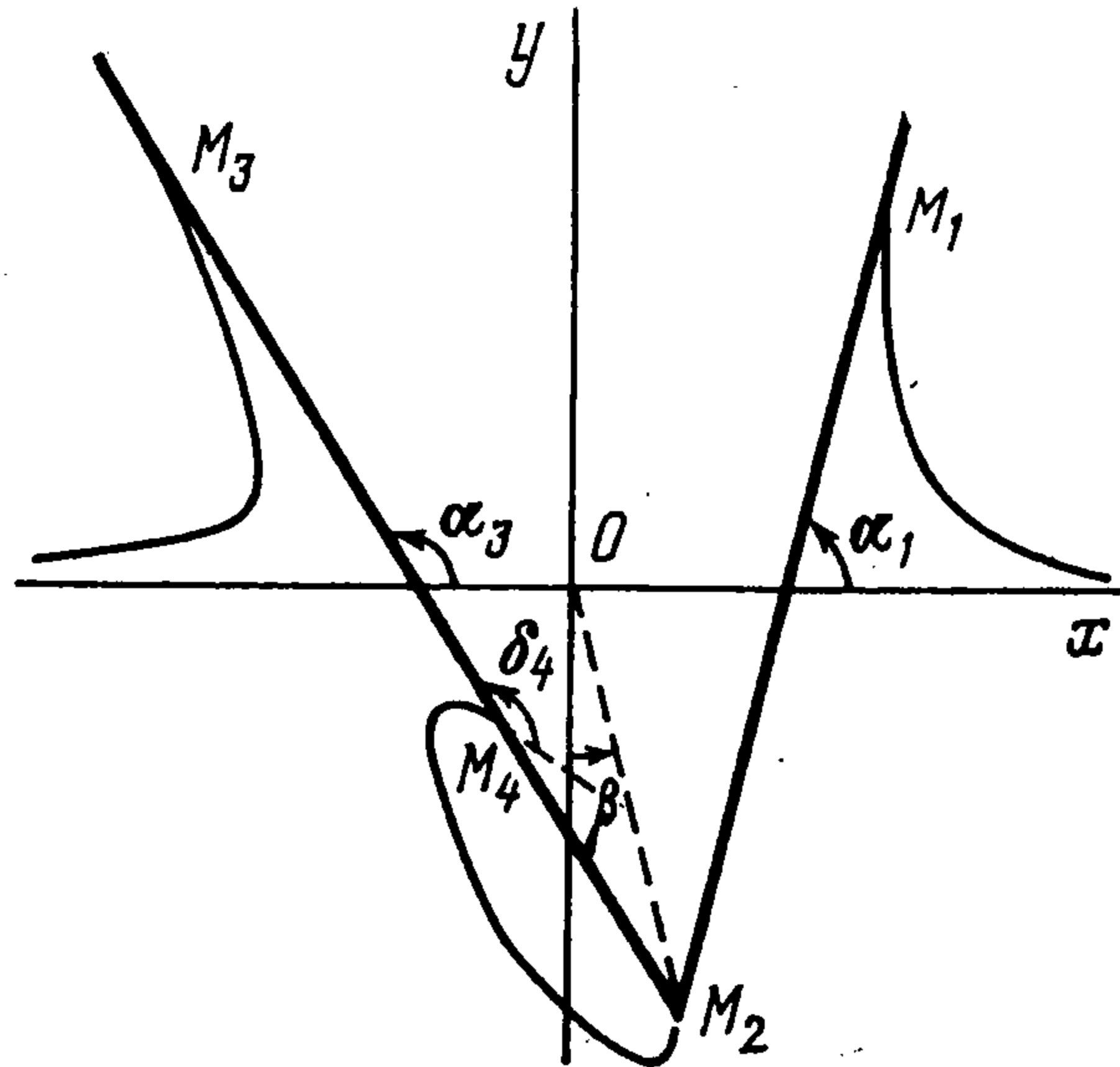
2. Предположим, что движение жидкости потенциально. Тогда можно ввести гармоническую функцию $\Phi(X, Y, t)$ — потенциал скоростей частиц $V = \nabla\Phi$. Интеграл Лагранжа дает выражение для давления $P = -\rho_0(\partial\Phi/\partial t + V^2/2)$, где ρ_0 — плотность. Рассматриваемая задача авто-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

модельна. Введем безразмерные автомодельные координаты $\mathbf{r} = \mathbf{R}/(V_w t)$, где \mathbf{R} — радиус-вектор, имеющий компоненты X, Y . Компоненты вектора \mathbf{r} обозначим x, y . Введем безразмерные потенциал скоростей $\psi(x, y) = \Phi/(tV_w^2)$, скорость $\mathbf{v} = \mathbf{V}/V_w$ и давление $p = P/(\rho_0 V_w^2)$. Тогда $\mathbf{v} = \nabla\psi$. В новых переменных интеграл Лагранжа и кинематическое условие, которое заключается в требовании, чтобы СГ состояла из одних и тех же частиц, записываются в виде

$$p = \mathbf{v}\mathbf{r} - \frac{1}{2}v^2 - \psi \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{r}) = 0 \quad (2.2)$$

где \mathbf{v} — нормаль к границе. Так как на НГ должно быть $\mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{r}_2\mathbf{v} = \mathbf{r}\mathbf{v}$, где \mathbf{r}_2 соответствует точке M_2 , то равенство (2.2) имеет место не только на СГ, но и на всей границе жидкости.

Пусть T — область в плоскости xy , которую занимает жидкость (фиг. 1), а s — длина дуги границы, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки. Предполагается, что s возрастает, если при движении вдоль границы область T обходится против часовой стрелки. Пусть \mathbf{s} — единичный вектор, касательный к границе. Тогда $\mathbf{s} = d\mathbf{r}/ds = \mathbf{r}'(s)$, где $\mathbf{r}(s)$ — радиус-вектор точек границы. Продифференцировав (2.1) по s , получим на СГ, учитывая, что $p'(s) = 0$

$$\mathbf{v}'(s)(\mathbf{r} - \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3)$$

Соотношения (2.2), (2.3) можно записать в виде одного векторного выражения

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - (s + s_0)\mathbf{s}, \quad s_0 = s_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0) \quad (2.4)$$

где \mathbf{r}_0 соответствует некоторой фиксированной точке на СГ. Из (2.2), (2.3) видно, что вектор $\mathbf{r} - \mathbf{v}$ направлен вдоль \mathbf{s} , а $\mathbf{v}'(s)$ ортогонален \mathbf{s} на СГ и параллелен \mathbf{s} на НГ.

3. Введем комплексную плоскость $z = x + iy$ и комплексную скорость $V = v_x - iv_y$. Следуя работе [7], введем также некоторую комплексную плоскость $w = u + i\bar{v}$. Пусть $w = w(z)$ конформно отображает область T в верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$. Граница области T взаимно однозначно отображается в действительную ось $\text{Im } w = 0$. По теореме Римана такое отображение существует. Функция $z(w)$ конформно отображает полуплоскость $\text{Im } w > 0$ в область T . При этом отображении точки границы M_i ($i = 1, 2, \dots$) перейдут в точки u_i действительной оси $\text{Im } w = 0$, причем две из них могут быть выбраны произвольно.

Представим функцию $z'(w)$ в виде

$$z'(w) = a\omega(w)e^{i\vartheta(w)}; \quad a = \text{const} > 0, \quad \omega(w) > 0$$

где $\vartheta(u)$ — угол между осью x и вектором s , отсчитываемый от оси x против часовой стрелки. Введем также угол $\theta(u) = \pi - \vartheta(u)$. Очевидно, должно быть $\theta(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow \infty$. Так как функция

$$i \ln(e^{-i\pi} z'(w)) = i \ln(a\omega(w)) + \theta(w)$$

аналитическая в полуплоскости $\text{Im } w > 0$ и принимает действительные значения $\theta(u)$ на оси $\text{Im } w = 0$, то $z'(w)$ можно выразить через $\theta(u)$

$$z'(w) = -a \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(u)}{u-w} du\right)$$

Полагая $w \rightarrow u$ и применяя формулу Племееля, находим

$$z'(u) = -a\omega(u)e^{-i\theta(u)}, \quad \omega(u) = \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(t) dt}{t-u}\right) \quad (3.1)$$

Интеграл в (3.1) нужно понимать в смысле главного значения. При выводе этой формулы предполагалось, что $\theta(u)$ — кусочно-непрерывная, ограниченная функция, удовлетворяющая на каждом участке оси u , где она непрерывна, условию Гельдера. Функция $\omega(u) \rightarrow 1$ при $|u| \rightarrow \infty$ и может обращаться либо в нуль, либо в бесконечность при $u \rightarrow u_i$. Эти особенности имеют вид

$$\omega(u) \rightarrow \text{const} |u - u_i|^{-\delta_i}, \quad u \rightarrow u_i$$

где δ_i — угол, на который поворачивается вектор s в окрестности точки M_i (фиг. 1), причем $\delta_i > 0$, если s поворачивается в точке излома границы против часовой стрелки. Вектор s имеет компоненты $s_x = -\cos \theta$, $s_y = \sin \theta$.

Для комплексной координаты границы получаем

$$z(u) = -a \int_{u_2}^u \omega(t) e^{-i\theta(t)} dt + z_2, \quad z_2 = \sin \beta - i \cos \beta$$

где угол θ известен на участках НГ.

Введем аналитическую в полуплоскости $\text{Im } w > 0$ функцию

$$\chi(w) = z'(w) V'(w)$$

Отсюда

$$V(w) = \int_{\infty}^w \chi(\tau) \frac{d\tau}{z'(\tau)} \quad (3.2)$$

На действительной оси $\text{Im } w = 0$ имеем

$$V(u) = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^u \frac{\chi(t)}{\omega(t)} e^{i\theta(t)} dt \quad (3.3)$$

Из (3.3) можно получить

$$\chi(u) = a\omega(u) v'(u) (s + iv)$$

Из этого соотношения следует, что функция $\chi(u)$ действительна на НГ и мнима на СГ. Используя (3.3), можно показать, что условие (2.2) на каждом участке НГ выполняется, если потребовать, чтобы это условие было выполнено лишь в какой-нибудь одной точке этого участка.

Кроме выражения для скорости (3.3) на СГ имеем также формулу (2.4). Записывая (2.4) в комплексном виде и приравнявая правую часть этого соотношения правой части (3.3), найдем на каждом участке СГ

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^u \frac{\chi(t)}{\omega(t)} e^{i\theta(t)} dt + \bar{z}(u) + \left[a \int_{u_0}^u \omega(t) dt + s_0 \right] e^{i\theta(u)} = 0 \quad (3.4)$$

(черта над z означает комплексно-сопряженную величину и u_0 соответствует некоторой фиксированной точке на данном участке СГ). Дифференцируя равенство (3.4) по u , на каждом участке СГ, где непрерывен угол $\theta(u)$, получаем

$$\theta'(u) = i\chi(u) \left\{ a\omega(u) \left[\int_{u_0}^u \omega(t) dt + s_0 \right] \right\}^{-1} \quad (3.5)$$

Можно показать, что уравнение (3.5) эквивалентно (3.4), если потребовать выполнения условия (2.2) лишь в какой-нибудь одной точке на данном участке СГ, например в точке $u = u_0$:

$$v(u_0) [v(u_0) - r(u_0)] = 0 \quad (3.6)$$

Таким образом, на каждом участке границы, СГ или НГ, должно быть выполнено условие (3.6) в некоторой произвольной точке $u = u_0$. Тогда условие (2.2) будет удовлетворено на всей границе и

$$p'(u) = 0 \quad (3.7)$$

на каждом участке СГ.

На свободных поверхностях жидкости для всех трех режимов движения 1, 2, 3 (фиг. 1, 2, 3 соответственно) требуем выполнения условия

$$p(u) = 0 \text{ на СГ} \quad (3.8)$$

Давление представим в виде

$$p(w) = \text{Re } \varphi(w) - \frac{1}{2} V(w) \bar{V}(w) \quad (3.9)$$

$$\varphi(w) = z(w) V(w) - \int_{\infty}^w V(\tau) z'(\tau) d\tau$$

Из (3.2), (3.7), (3.9) следует, что аналитические в верхней полуплоскости $\text{Im } w > 0$ функции $V(w)$, $\varphi(w)$ обращаются в нуль при $w \rightarrow \infty$ и условие (3.8) выполняется автоматически для режимов движения 1 и 2. В случае же режима 3 условие (3.8) также будет выполнено, если потребуем, чтобы давление было равно нулю в какой-нибудь одной точке на свободной границе M_2M_4 (фиг. 3), например в точке M_2

$$p(u_2) = 0 \quad (3.10)$$

Еще одно дополнительное условие для режима 3 должно быть выполнено: точка M_4 действительно должна лежать на грани клина M_2M_3 .

Это условие можно записать в виде (v_{23} — нормаль к грани M_2M_3)

$$v_{23} \int_{u_2}^{u_4} \omega(t) s(t) dt = 0 \quad (3.11)$$

Заметим, что из соотношений (3.4), (3.6) и непрерывности $V(u)$ следует: $y(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow \infty$ и $v_i = r_i$ в точках излома границы, где $\delta_i \neq 0$, например в точках M_1, M_3 .

4. Функция $\chi(w)$, аналитическая в полуплоскости $\text{Im } w > 0$, принимающая действительные значения на участках действительной оси $\text{Im } w = 0$, соответствующих НГ, и мнимые значения на участках, соответствующих СГ, может быть найдена для рассматриваемых здесь режимов движения жидкости. При построении $\chi(w)$ учитывались следующие обстоятельства: скорость $V(u)$ непрерывна, функция, стоящая в правой части (3.5), а также функции $\omega(u)$, $\chi(u)/\omega(u)$ интегрируемы, $\theta(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow \infty$, давление $p(w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$, давление на НГ не отрицательно, любые две точки излома границы не могут быть концами одного и того же участка СГ. Последнее утверждение следует из равенства $v = r$ в этих точках и формулы (2.4).

Находим:

для режима 1

$$\chi(w) = -ib (w - u_1)^{-3/2} (w - u_3)^{-3/2}$$

для режима 2

$$\chi(w) = -ib (w - u_1)^{-3/2} (w - u_2)^{-1/2} (w - u_3)^{-1}$$

причем в этом случае (фиг. 2) оказывается, что угол $\theta(u)$ непрерывен в точке M_2 и в некоторой точке M_3 обязательно должна иметь излом СГ ($\delta_3 > 0$);

для режима 3

$$\chi(w) = -ib [(w - u_1)(w - u_4)(w - u_3)]^{-3/2} (w - u_2)^{-1/2} \times \\ \times (b_0 + b_1 w + w^2)$$

где b, b_0, b_1 — некоторые постоянные. Как и в случае режима 2, излома границы в точке M_2 нет.

Разрезы аналитической в полуплоскости $\text{Im } w > 0$ функции $\chi(w)$ должны быть расположены в полуплоскости $\text{Im } w < 0$, и при $u \gg u_3$ полагаем $\text{Im } \chi(u) < 0$.

Из требования интегрируемости упомянутых выше функций следуют ограничения на искомый угол $\theta(u)$:

$$3\pi/4 - \alpha_1 < \theta(u_1 - 0) < \pi - \alpha_1, \quad 3/4 < \delta_1 < 1 \quad (\text{режимы 1, 2, 3})$$

$$-\alpha_3 < \theta(u_3 + 0) < \pi/4 - \alpha_3, \quad 3/4 < \delta_3 < 1 \quad (\text{режимы 1, 3})$$

$$\pi/2 < \theta(u_3 - 0) - \theta(u_3 + 0) < \pi, \quad 1/2 < \delta_3 < 1 \quad (\text{режим 2})$$

$$3\pi/4 - \alpha_3 < \theta(u_4 - 0) - \pi < \pi - \alpha_3, \quad 3/4 < \delta_4 < 1 \quad (\text{режим 3})$$

Можно убедиться, что участки СГ, уходящие в бесконечность, не имеют точек перегиба и целиком лежат в полуплоскости $y > 0$. Справедливы следующие асимптотические формулы при $|u| \rightarrow \infty$

$$\theta(u) \rightarrow -b/(3a^2u^3), \quad y(u) \rightarrow b/(6au^2) \\ v_x(u) \rightarrow -b^2/(15a^3u^5), \quad v_y(u) \rightarrow b/(2au^2)$$

В этих формулах параметр u можно заменить на $-x/a$.

5. Рассмотрим режимы движения 1, 2, 3. Введем обозначения

$$c = b/a^2, \quad \xi(u) = |\chi(u)|/b, \quad \eta(u) = \text{sign}(b_0 + b_1u + u^2)$$

$$\Omega_k(u) = \omega(u) \int_{u_k}^u \omega(t) dt, \quad I_k(\alpha, \beta) = -c \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\xi(t)}{\Omega_k(t)} dt$$

$$J_k(\alpha, \beta) = -c \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\xi(t) \eta(t)}{\Omega_k(t)} dt, \quad k = 1, 3, 4$$

Здесь функция $\omega(u)$ должна быть выражена через $\theta(u)$ по формуле (3.1).

Режим 1. Уравнения (3.5) запишем в виде системы интегральных уравнений

$$\theta(u) = I_1(-\infty, u), \quad u \leq u_1; \quad \theta(u) = I_3(u, \infty), \quad u \geq u_3 \quad (5.1)$$

Пусть $u_1 = -1$, $u_3 = 1$. В данном случае имеем четыре соотношения типа (3.6), в которых, например, положим $u_0 = u_1 - 0$, $u_0 = u_1 + 0$, $u_0 = u_3 - 0$, $u_0 = u_3 + 0$. Полученные таким образом уравнения служат для определения u_2 , a , b и одного соотношения между углами α_1 , α_3 , β . Например, фиксируя α_1 , α_3 , находим из этих уравнений u_2 , a , b и такой угол β , при котором возможен режим движения жидкости, представленный на фиг. 1, когда нет отрыва струи от ребра клина.

Режим 2. Угол $\theta(u)$ на трех частях СГ (фиг. 2) удовлетворяет уравнениям

$$\theta(u) = I_1(-\infty, u), \quad u \leq u_1; \quad \theta(u) = I_3(u_2, u) - \alpha_1, \quad u_2 \leq u \leq u_3 \\ \theta(u) = I_3(u, \infty), \quad u \geq u_3$$

Пусть $u_1 = -1$, $u_3 = 1$. Учитывая, что угол $\theta(u)$ непрерывен в точке $u = u_2$, можно показать, что в данном случае независимых уравнений типа (3.6) будет только три. Эти уравнения служат для определения u_2 , a , b .

Режим 3. Для угла $\theta(u)$ на трех частях СГ (фиг. 3) получаем уравнения

$$\theta(u) = J_1(-\infty, u), \quad u \leq u_1; \quad \theta(u) = J_4(u_2, u) - \alpha_1, \quad u_2 \leq u \leq u_4 \\ \theta(u) = J_3(u, \infty), \quad u \geq u_3$$

Положим $u_1 = -1$, $u_3 = 1$. Для шести неизвестных постоянных u_2 , u_4 , a , b , b_0 , b_1 имеем шесть уравнений: четыре независимых уравнения типа (3.6) (учитываем, что угол $\theta(u)$ непрерывен в точке M_2), уравнения (3.10), (3.11).

Полученные уравнения связаны с отрывом струи от левой грани клина. Если же соотношения между углами α_1 , α_3 , β соответствуют отрыву струи от правой грани, то можем воспользоваться выведенными формулами, заменив эти углы на $\pi - \alpha_3$, $\pi - \alpha_1$, $-\beta$ соответственно.

6. Предложим для получения решения выведенных уравнений в случае режимов 1 и 2 некоторый итерационный процесс. Считаем, что получаем решение уравнений, если при численной реализации такого процесса он сходится. Продемонстрируем способ на самом простом примере — при нормальном входе клина в жидкость, когда $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi$, $\beta = 0$. В этом случае можно положить $u_3 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$, независимых уравнений типа (3.6) будет только два (из которых определяются a и b),

и вместо системы (5.1) получаем одно уравнение

$$\theta(u) = c(1 - \delta) \int_0^{\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{2\delta-5/2} G(t) \frac{dt}{t^4}, \quad u \geq 1 \quad (6.1)$$

$$\pi\delta = \pi/2 - \alpha + \theta_0, \quad \theta_0 = \theta(u_3 + 0), \quad 3/4 < \delta < 1$$

где $G(u)$ — непрерывная функция, зависящая от $\theta(u)$, α — угол полураствора клина. В подынтегральной функции в правой части (6.1) выделена особенность, характер которой зависит от решения (зависит от θ_0).

Пусть известно n -приближение $\theta_n(u)$. Тогда $(n+1)$ -приближение находим следующим образом. Величины $G(u)$, c вычисляются по n -приближению, а $\theta_{n+1}(u)$ находится из решения уравнения

$$\theta_{n+1}(u) = c_n(1 - \delta_{n+1}) \int_u^{\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{2\delta_{n+1}-5/2} G_n(t) \frac{dt}{t^4} \quad (6.2)$$

Полагая в (6.2) $u = 1$, приходим к уравнению для определения $\theta_{n+1}(1)$. Решение этого уравнения, удовлетворяющего необходимым неравенствам $\pi/4 + \alpha < \theta_{n+1}(1) < \pi/2 + \alpha$, существует. Найдя $\theta_{n+1}(1)$ и, следовательно, δ_{n+1} , получаем $\theta_{n+1}(u)$ интегрированием по формуле (6.2). Первое приближение $\theta_1(u)$ можно найти, полагая в (6.1) $G(u) = 1$.

В случае режима 3 применение этого способа затруднено, так как не удастся показать, что уравнение типа (6.2) при $u = 1$ имеет решение, удовлетворяющее соответствующим неравенствам.

7. Итак, имеются три режима движения. Как уже было выяснено выше, безотрывное движение (режим 1) может существовать лишь при определенном соотношении между углами α_1 , α_3 , β . Это соотношение всегда можно представить в виде

$$\gamma_3/\gamma_1 = f(\kappa, \beta) \quad (7.1)$$

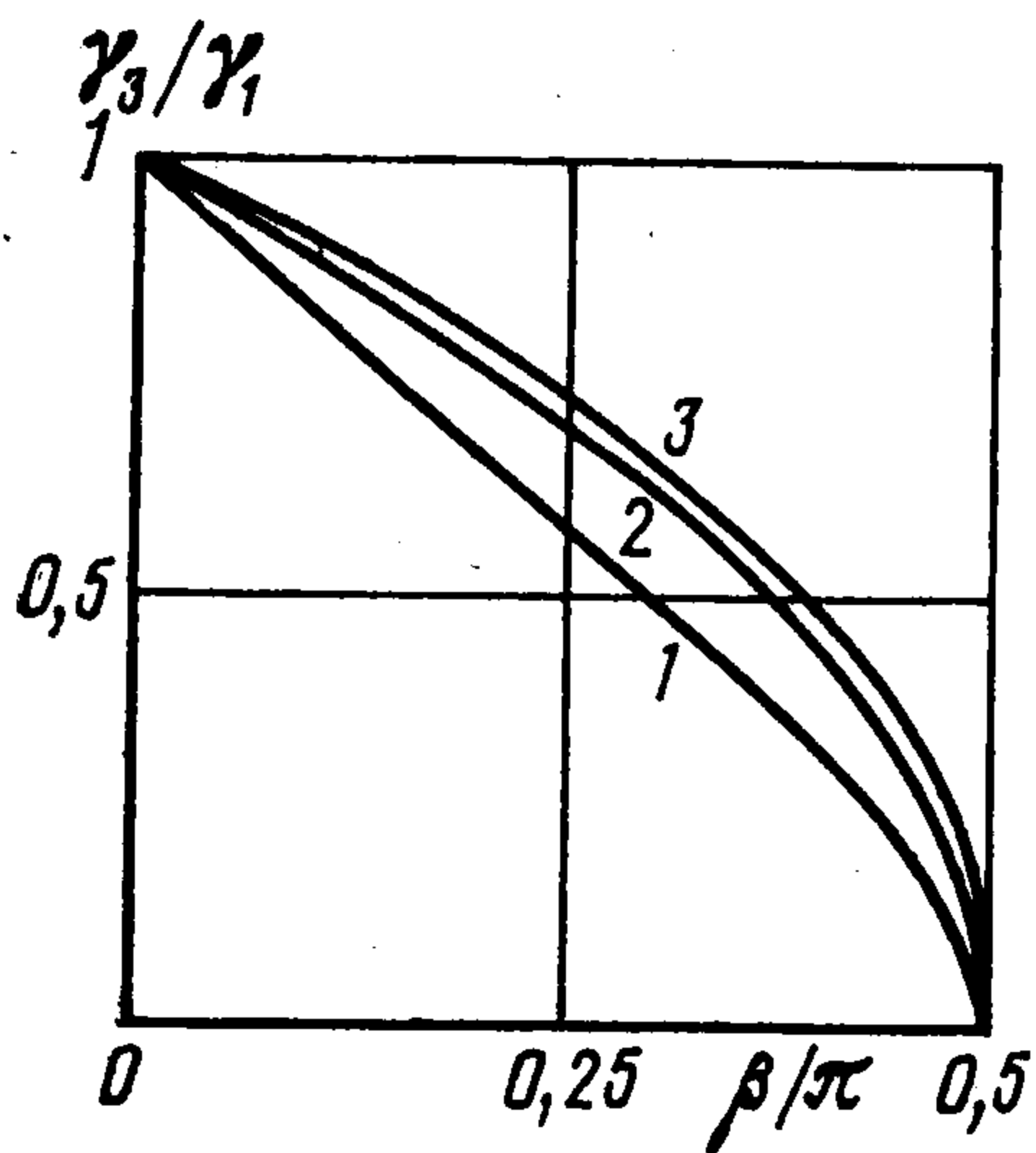
$$\gamma_1 = \pi/2 - \alpha_1 + \beta, \quad \gamma_3 = \alpha_3 - \pi/2 - \beta, \quad \kappa = \gamma_1 + \gamma_3$$

Углы γ_1 , γ_3 изображены на фиг. 1. Прямая OM_2 , совпадающая с направлением скорости клина V_w , должна делить угол раствора клина κ на такие две части γ_1 и γ_3 , при которых нет отрыва струи от ребра клина.

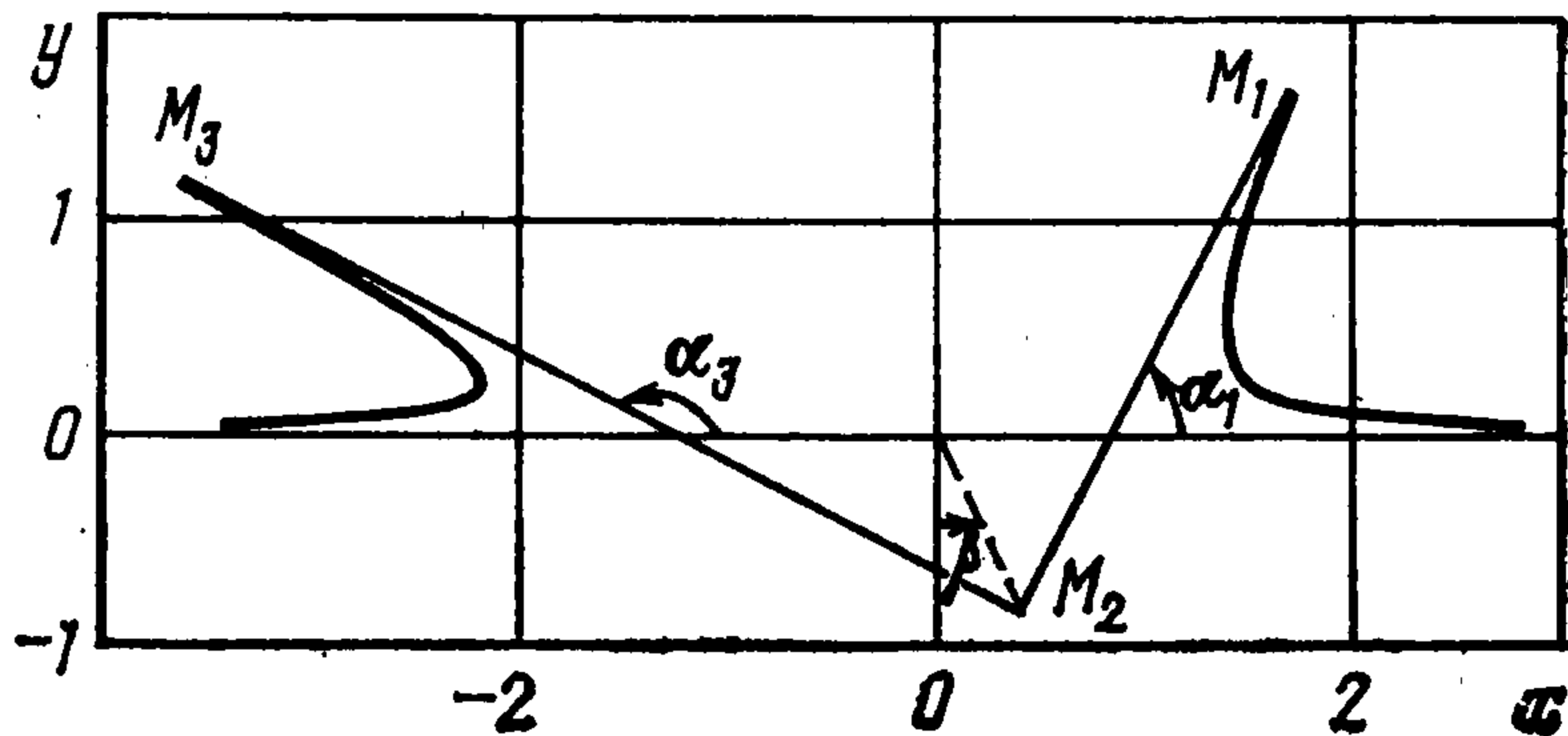
В случае нормального входа клина в жидкость ($\beta = 0$) имеем $\gamma_1 = \gamma_3$, $f(\kappa, 0) = 1$. В общем случае функция $f(\kappa, \beta)$ заранее неизвестна и ее значение при данных κ , β может быть определено лишь в процессе решения задачи 1 (режим 1). Зафиксировав κ и проводя вычисления для различных β , можем построить функцию $f(\kappa, \beta)$, т. е. некоторую кривую в плоскости $(\gamma_3/\gamma_1, \beta)$.

На фиг. 4 приведена такая кривая 1 для $\kappa = 0,2\pi$ при $0 \leq \beta \leq \pi/2$. Точки плоскости $(\gamma_3/\gamma_1, \beta/\pi)$, лежащие ниже этой кривой, соответствуют отрыву струи от левой грани клина, точки $(\gamma_3/\gamma_1, \beta/\pi)$, лежащие выше, соответствуют отрыву струи от правой грани. Если эти точки лежат достаточно близко к кривой (7.1), то имеем режим 3. Кривая 2 на фиг. 4 построена для $\kappa = 0,04\pi$ и кривая 3 — для бесконечно малого угла раствора κ . Эта последняя кривая была получена из приближенной, линейной теории, не учитывающей подъем свободной поверхности жидкости.

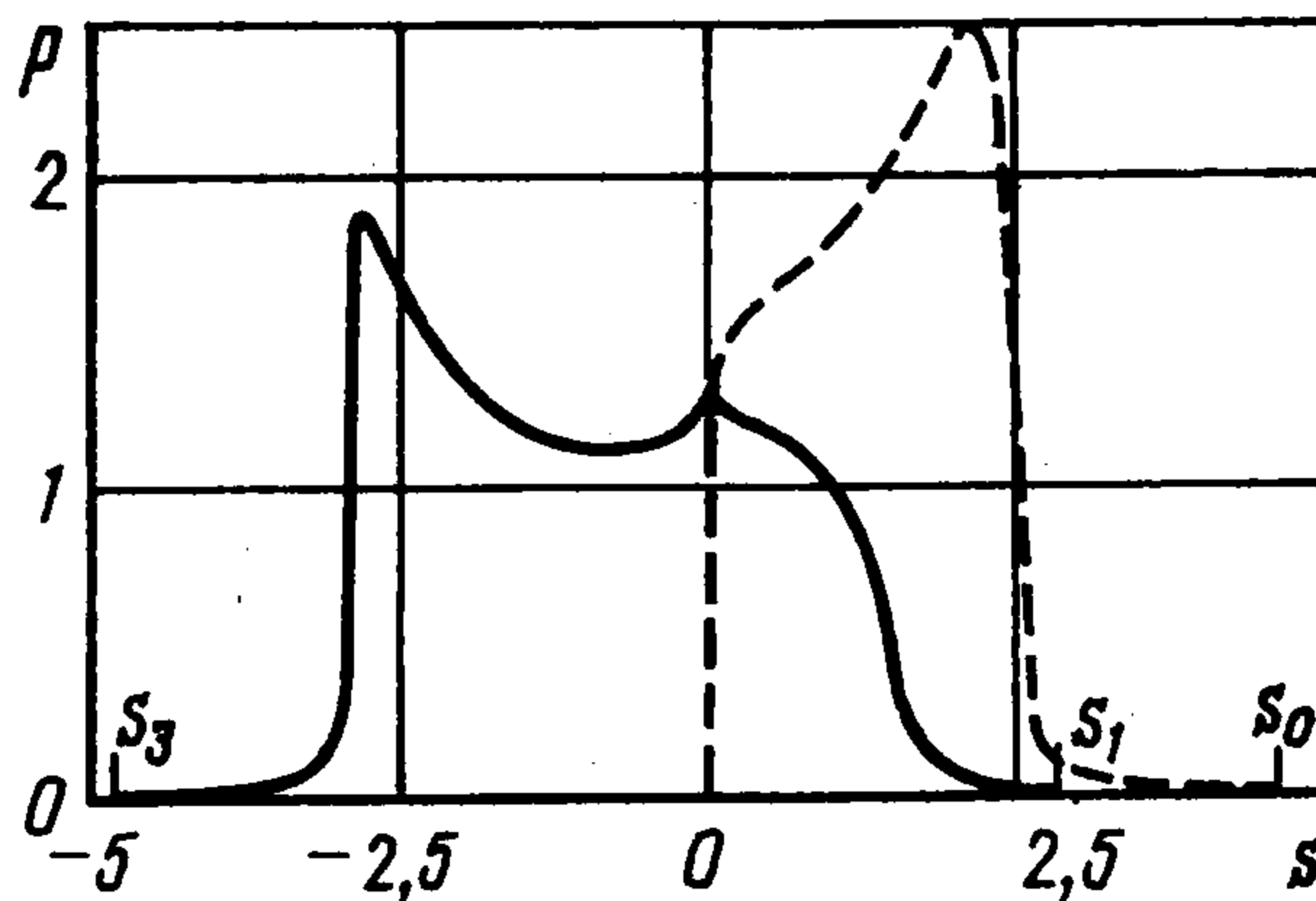
В случае отрывного движения также нельзя заранее указать ограничения, накладываемые на углы α_1 , α_3 , β , при которых наблюдаются либо режим 2, либо режим 3. Эти ограничения могут быть выяснены лишь в процессе решения задачи. При любых заданных α_1 , α_3 , β всегда можно определить тот режим, который соответствует этим углам. Зафиксируем углы α_1 , β . Для достаточно малого угла раствора клина κ существует



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

режим 2. Решая задачу 2, находим угол раствора $\kappa = \kappa^*$, при котором точка M_3 лежит на грани клина (фиг. 2). При $0 \leq \kappa < \kappa^*$ имеем режим 2. Решая задачу 1, находим угол $\kappa = \bar{\kappa}$, соответствующий безотрывному движению (режим 1). При $\kappa^* \leq \kappa < \bar{\kappa}$ имеем режим 3. При $\kappa > \bar{\kappa}$ — движения с отрывом струи, но от другой грани клина.

Приведем конкретный пример. Пусть $\alpha_1 = 0,6\pi$, $\beta = 0,25\pi$. Вычисления дают $\kappa^* = 0,131\pi$, $\bar{\kappa} = 0,235\pi$. Таким образом, при $0 \leq \kappa < 0,131\pi$, $0,131\pi \leq \kappa < 0,235\pi$, $\kappa = 0,235\pi$ имеем режимы 2, 3, 1 соответственно.

8. Приведем результаты некоторых вычислений для режимов движения жидкости 1 и 2. Здесь s — расстояние вдоль грани клина от точки M_2 , причем $s > 0$ соответствует правой грани и $s < 0$ — левой. В таблице для клина, нормально входящего в жидкость, дана зависимость от угла полураствора α силы

$$F = \int_0^{s_1} p(s) ds$$

действующей на одну из граней, давления на ребре клина $p_w = p(0)$, угла $\rho\pi = \pi - \pi\delta_1$.

В [8], где выполнены вычисления при $\alpha = \pi/4$, даны значения $\rho = 0,020$, $F_y = 2F \sin \alpha = 3,40$. Из приведенной таблицы следует: $\rho = 0,021$, $F_y = 3,45$.

При достаточно больших α максимальное давление p_m больше p_w . Например, при $\alpha = 0,4\pi$ имеем $p_w = 4,24$, $p_m = p(4,92) = 11,2$. В последнем столбце таблицы приведены значения силы $F = F_0$, вычисленные по приближенным формулам. Первые четыре строки этого столбца соответствуют тонкому клину, последняя соответствует результатам вычислений по формуле работы [1] для тупого клина, учитывающей подъем свободной поверхности. Из таблицы видно, что давление p_w для $\alpha \ll 1$ хорошо описывается формулой $p_w = 0,5 + 2 \ln 2 \cdot \alpha/\pi$, полученной [5] для тонкого клина.

На фиг. 5 изображена форма поверхности возмущенной жидкости для $\alpha_1 = 0,35\pi$, $\alpha_3 = 0,85\pi$. Угол, при котором не происходит отрыва струи от ребра клина, $\beta = 0,153\pi$. Для углов, определяющих изломы поверхности в точках M_1, M_3 , получаем $\pi(1 - \delta_1) = 0,0358\pi$, $\pi(1 - \delta_3) = 0,0083\pi$.

α/π	F	p_w	ρ	F_0
0,001	$0,140 \cdot 10^{-2}$	0,501	0,102	$0,139 \cdot 10^{-2}$
0,005	$0,725 \cdot 10^{-2}$	0,507	$0,964 \cdot 10^{-1}$	$0,693 \cdot 10^{-2}$
0,01	$0,151 \cdot 10^{-1}$	0,514	$0,926 \cdot 10^{-1}$	$0,139 \cdot 10^{-1}$
0,05	0,103	0,581	$0,715 \cdot 10^{-1}$	$0,693 \cdot 10^{-1}$
0,1	0,289	0,688	$0,536 \cdot 10^{-1}$	
0,2	1,26	1,05	$0,292 \cdot 10^{-1}$	
0,3	4,86	1,82	$0,138 \cdot 10^{-1}$	
0,35	10,62	2,61	$0,820 \cdot 10^{-2}$	
0,4	28,8	4,24	$0,400 \cdot 10^{-2}$	
0,45	136	9,1	$0,110 \cdot 10^{-2}$	156

На фиг. 6 сплошной линией представлено распределение давления, действующего на грани клина M_2M_1 , M_2M_3 . Силы, действующие на эти грани, таковы:

$$F_1 = \int_0^{s_1} p(s) ds = 1,55, \quad F_3 = \int_{s_3}^0 p(s) ds = 3,62$$

Модуль производной $|p'(s)|$ неограниченно возрастает при приближении к ребру клина. В общем случае при $s \rightarrow 0$ имеем $|p'(s)| \rightarrow \infty$ для угла раствора $\kappa < 2\pi/3$ и $p'(s) \rightarrow 0$ при $\kappa > 2\pi/3$.

Приведем пример вычисления для пластинки при $\alpha_1 = 0,2\pi$, $\beta = 0,1\pi$. На фиг. 2 дана форма поверхности жидкости, штриховой линией на фиг. 6 — распределение давления $p(s)$ вдоль пластинки. Сила, действующая на пластинку, равна

$$F = \int_0^{s_0} p(s) ds = 4,64$$

В точке $s = 0$ производная $p'(s)$ имеет особенность вида $1/\sqrt{s}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wagner H.* Uber Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // *Z. angew. Math. und Mech.* 1932. В. 12, Н. 4. С. 193—215.
2. *Седов Л. И.* Удар плавающего клина // *Тр. ЦАГИ.* 1935. № 152. С. 27—31.
3. *Borg S. F.* Some contributions to the wedge-water entry problem // *Proc. Amer. Civil. Engrs. J. Engng. Mech.* 1957. V. 83. № EM2. Pap. 1214, P. 1—28.
4. *Борисова Э. П., Коряков П. П., Моисеев Н. Н.* Плоские и осесимметричные автомодельные задачи погружения и соударения струй // *ПММ.* 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 347—360.
5. *Гонор Л. А.* Вход тонкого клина в жидкость // *Докл. АН СССР.* 1986. Т. 290. № 5. С. 1068—1071.
6. *Garabedian P. R.* Oblique water entry of a wedge // *Communs. Pure and Appl. Math.* 1953. V. 6. № 2. P. 157—165.
7. *Добровольская Э. Н.* Некоторые нелинейные автомодельные задачи о движении несжимаемой жидкости со свободной поверхностью // *Приложения теории функций в механике сплошной среды.* М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 150—170.
8. *Hughes O. F.* Solution of the wedge entry problem by numerical conformal mapping // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 56. Pt. 1. P. 173—192.