Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 3, 1989

УДК 531.36

Л. М. Мархашов

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ АНАЛОГАХ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Ставится и решается задача построения основных характеристик всех теоретически допустимых обобщений классической механики одномерных движений материальной точки. Это преобразования, связывающие инерциальные системы отсчета, факторы изменения геометрических масштабов и хода часов в этих системах, законы преобразования скоростей и законы динамики. Наиболее интересный результат состоит в обнаружении механик, сколь угодно близких к релятивистской, но принципиально от нее отличающихся. Отличие состоит в нарушении четности (масштабы и часы, движущиеся в прямо противоположных направлениях с одной и той же по величине скоростью, ведут себя по-разному).

Строятся и исследуются движения материальной точки по инерции, контролируемые (главным образом) конформной группой, уже давно играющей заметную роль в физике. Задача решается в полномерной постановке. Необычными оказываются здесь порядок уравнений движения (третий, а не второй) и допустимость движений со сверхсветовой скоростью.

В Эрлангенской программе [1] Клейн сформулировал общую концепцию, согласно которой каждая геометрия представляет собой теорию инвариантов некоторой группы преобразований. В физике такой подход воплотился в принципах инвариантности [2]. Общность последних выражается, в частности, в том, что не только галилеевой и лоренцевой, но и всякой другой группе преобразований пространства-времени могут быть поставлены в соответствие своя относительность и своя механика. Представляется полезным использовать эту точку зрения для конструирования различных механических моделей.

Предварительно сделаем несколько общих замечаний.

Группы преобразований. Для нужд теоретической физики уже давно ведутся исследования по теории сжатий и деформаций групп и алгебр Ли [3—6]. Наиболее интересны группы размерности 10. Но задача их описания настолько сложна, что в ней получены пока лишь частичные (хотя и важные) результаты (см., например, [7—8]). Одномерные механики контролируются трехпараметрическими группами. Для конструирования таких механик простого перечисления групп, которыми традиционно ограничиваются специальные руководства [9], совершенно недостаточно. Требуемое более полное описание трехмерных алгебр Ли в пространстве структурных констант было дано автором [10]. Оно позволило указать предельные переходы между алгебрами и построить наиболее простым образом все координатные реализации соответствующих групп преобразований. Этим описанием и будем пользоваться в этой работе. Дискретные компоненты, в частности отражения, в группы не включаются.

Инерциальные системы отсчета. Примем следующие неформальные определения, достаточные для дальнейшего.

Система отсчета $\{x, t\}$ — физическое тело, имеющее в каждой точке свои часы. Точки тела арифметизированы переменными x, показания часов — переменным t.

Инерциальные системы отсчета — это системы, переводимые одна в другую заданной группой преобразований $G: x' = \varphi(x, t, \tau)$, $t' = \psi(x, t, \tau)$. Очевидно, последнее определение зависит лишь от структуры группы.

Каждая заданная группа G преобразований преобразует в себя некоторое семейство движений. Это семейство тем шире, чем большему числу начальных условий позволено в нем присутствовать. Наиболее интересны минимальные семейства такого рода, в которых зависимость закона движения от начальных условий содержит минимально возможный произвол. Здесь и в дальнейшем такие движения материальной точки именуются движениями по инерции.

Подвижное тело отсчета, очевидно, образовано точками, покоящимися относительно этого тела. Следовательно, точки подвижного тела движутся по отношению к неподвижному по закону $\varphi(x, t, \tau) = \mathrm{const}$. Это семейство движений сохраняется группой. Оно минимально и, таким образом, описывает движения по инерции.

В первой части работы рассматриваются линейные преобразования. Поэтому здесь тела отсчета — твердые тела, движущиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно.

Инвариантность динамического закона. В динамике сила — такая же фундаментальная физическая величина, как время, протяженность и масса. Для нее, как и для этих величин, должен быть указан закон преобразования при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (так, в классической динамике точки компоненты силы сохраняются при галилеевых движениях и трансляциях и преобразуются как координаты материальной точки при вращениях). Это превращает кинематическую группу, контролирующую закон инерции, в изоморфную ей динамическую группу. Относительно преобразований именно этой группы и должен быть инвариантен динамический закон.

В каждом конкретном случае взаимодействия точки с окружающей средой сила превращается в функцию координат, скорости и времени, а закон динамики — в уравнения движения. Эти последние, вообще говоря, уже не обязаны быть инвариантными относительно преобразований кинематической группы.

1. Исходные соотношения. *Следствия условия однородности.* Пусть x — геометрическая координата материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчета, t — время, измеряемое часами в той же системе. Из принятого предположения об однородности пространства-времени следует инвариантность измерений физических переменных x, t относительно изменения начал отсчета $x' = x + \tau_1$, $t' = t + \tau_2$, где τ_1, τ_2 — канонические групповые параметры. Написанным преобразованиям отвечают операторы

$$X_1 = \partial/\partial x, \quad X_2 = \partial/\partial t \tag{1.1}$$

(В дальнейшем иногда, ради удобства, будем обозначать $x = x_1$, $t = x_2$.) Включим операторы (1.1) в базис рассматриваемых ниже трехмерных алгебр. Поскольку $[X_1, X_2] = 0$, то

$$c_{12}{}^1 = c_{12}{}^2 = c_{12}{}^3 = 0 \tag{1.2}$$

Простые группы G^1, G^2 (движений плоскости Лобачевского и вращений) условиям (1.2) не удовлетворяют и из дальнейших рассмотрений исключаются [10].

Компоненты оператора X_3. Оставшиеся коммутационные соотношения в трехмерных алгебрах имеют вид

$$[X_i, X_3] = c_{i3}{}^j X_j, \quad X_3 = \xi_1 \partial/\partial x_1 + \xi_2 \partial/\partial x_2$$

Здесь и всюду далее $i, j = 1, 2$. По повторяющимся индексам ведется суммирование.

В скалярной форме

$$\partial\xi_i/\partial x_j = c_{j3}{}^i + c_{j3}{}^3 \xi_i \tag{1.3}$$

Условия Якоби:

$$c_{13}{}^3 c_{23}{}^i - c_{23}{}^3 c_{13}{}^i = 0$$

Теперь нужно проинтегрировать соотношения (1.3), рассматривая их как уравнения относительно неизвестных функций ξ_i. Из полученных решений требуется отобрать такие, для которых возможен предельный переход к галилееву оператору

$$X_3 \to t\partial/\partial x \equiv x_2 \partial/\partial x_1 \tag{1.4}$$

При $c_{13}{}^3 = c_{23}{}^3 = 0$ наиболее общее однородное решение уравнений (1.3), удовлетворяющее условию (1.4)

$$\xi_i = c_{j3}{}^i x_j, \quad c_{23}{}^1 \neq 0 \tag{1.5}$$

В случаях $(c_{13}{}^3)^2 + (c_{23}{}^3)^2 \neq 0$, отвечающих одной и той же группе преобразований (G^{c_0}, $c_0 = 1$), уравнения (1.3) допускают также и нелинейное решение, которое рассматривать не будем.

Возникает вопрос: нельзя ли упростить задачу, взяв выражения (1.5) не в общем виде, а при фиксированных значениях структурных констант, отвечающих неизоморфным алгебрам. Дело в том, что специализировать структурные константы внутри одной и той же алгебры можно по-разному. При этом для преобразований одной и той же группы будут получаться различные выражения. Какие из них предпочесть? Без новых физических соображений ответить на этот вопрос нельзя в принципе. Поэтому предпочтительней сохранить общность рассмотрений вплоть до получения окончательных результатов. Их обсуждение будет дано в п. 4.

Группы движений. Группам движений отвечают операторы с компонентами, удовлетворяющими уравнениям Киллинга. Для римановых пространств с метрикой $ds^2 = a_{ij}dx_i dx_j$ эти уравнения имеют вид

$$\xi_k \frac{\partial a_{lm}}{\partial x_k} + a_{mk} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} + a_{lk} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_m} = 0$$

Здесь и далее $k, l, m = 1, 2, 3$.

Подстановка компонент операторов X_1 ($\xi_1{}^{(1)} = 1$, $\xi_2{}^{(1)} = 0$), X_2 ($\xi_1{}^{(2)} = 0$, $\xi_2{}^{(2)} = 1$), X_3 ($\xi_1{}^{(3)} = \xi_1$, $\xi_2{}^{(3)} = \xi_2$) дает

$$a_{ij} = \text{const}, \quad c_{13}{}^1 a_{11} + c_{13}{}^2 a_{12} = 0, \quad c_{23}{}^1 a_{12} + c_{23}{}^2 a_{22} = 0$$

$$c_{23}{}^1 a_{11} + (c_{13}{}^1 + c_{23}{}^2) a_{12} + c_{13}{}^2 a_{22} = 0$$

Очевидно, при

$$(c_{13}{}^1 + c_{23}{}^2) D \neq 0 \quad (D = c_{13}{}^2 c_{23}{}^1 - c_{23}{}^2 c_{13}{}^1) \tag{1.6}$$

Группа преобразований никакой метрики не сохраняет. При

$$D = 0 \tag{1.7}$$

сохраняемая метрика вырождена: $ds^2 = (c_{23}{}^2 dx_1 - c_{23}{}^1 dx_2)^2$. При $c_{13}{}^1 + c_{23}{}^2 = 0$ сохраняется метрика

$$ds^2 = -(c_{13}{}^2/c_{23}{}^1) dx_1{}^2 - 2(c_{23}{}^2/c_{23}{}^1) dx_1 dx_2 + dx_2{}^2$$

Она индефинитна при $D > 0$ и дефинитна при $D < 0$.

Конечные преобразования. Искомая группа преобразований геометрической координаты и времени, отвечающая оператору X_3, дается решением задачи Коши

$$dx_i'/d\tau = c_{j3}^i x_j', \quad x_i' |_{\tau=0} = x_i \tag{1.8}$$

Решение уравнений (1.8) записывается в форме

$$x_i' = b_{ij}(\tau) x_j, \quad b_{ij}(0) = \delta_j{}^i \tag{1.9}$$

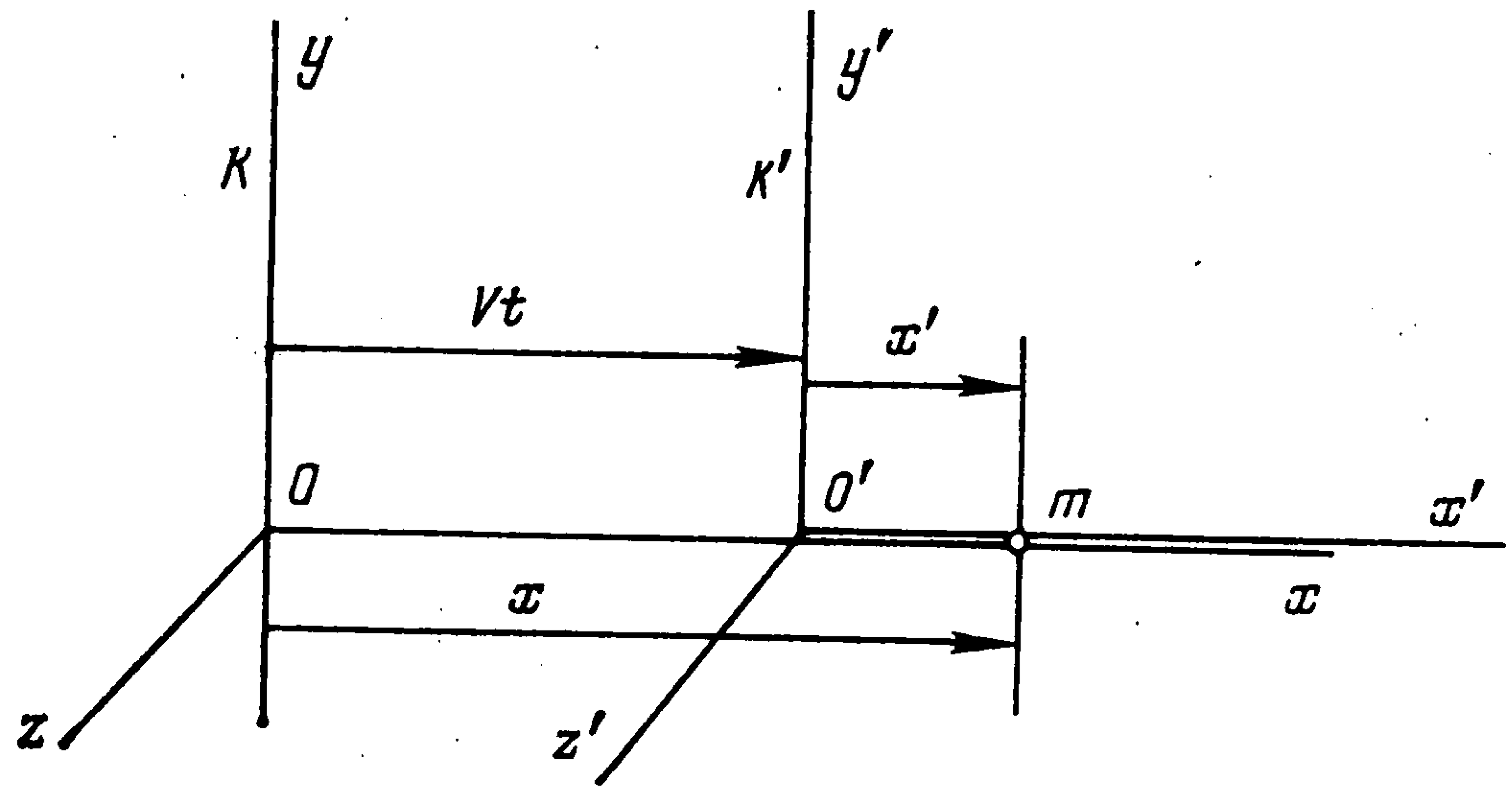
где $\delta_j{}^i$ — символ Кронекера. Обратное преобразование

$$x_i = b_{ij}(-\tau) x_j' \tag{1.10}$$

Обычно канонический параметр τ заменяется постоянной скоростью V движения тела отсчета системы $K' = \{x', t'\}$ относительно тела отсчета системы $K = \{x, t\}$, принимаемого за неподвижное (фиг. 1). Замена делается по формуле

$$b_{11}(\tau) V + b_{12}(\tau) = 0 \tag{1.11}$$

Закон преобразования скоростей. Пусть $dx/dt = V''$ — скорость материальной точки, измеренная неподвижным наблюдателем, $dx'/dt' = V'$ — скорость точки в подвижной системе отсчета. Тогда согласно формулам



Фиг. 1

(1.9), (1.10)

$$V'' = \frac{b_{11}(-\tau)V' + b_{12}(-\tau)}{b_{21}(-\tau)V' + b_{22}(-\tau)} = \frac{b_{12}(\tau) - b_{22}(\tau)V'}{b_{21}(\tau)V' - b_{11}(\tau)} \tag{1.12}$$

Факторы изменения геометрических масштабов и хода часов в инерциальных системах. Зафиксируем в неподвижной системе K точки x^1, x^2 и расстояние $\Delta x = x^1 - x^2 = l$ и найдем величину последнего, измеренную подвижным наблюдателем в K' при $t_1' = t_2'$, воспользовавшись снова формулами (1.9), (1.10), найдем

$$l' = \Delta x' = \lambda_x l, \ \lambda_x = b_{11}^{-1}(-\tau) = [b_{11}(\tau)b_{22}(\tau) - - b_{12}(\tau)b_{21}(\tau)]/b_{22}(\tau) \tag{1.13}$$

Зафиксируем в точке x'^1, x'^2 подвижной системы K' часы. Пусть t_1', t_2' — их показания. Найдем соответствующие показания t_1, t_2, $\Delta t = t_2 - t_1$ часов в неподвижной системе K. Из формул (1.9), (1.10) получим

$$\Delta t' = \lambda_t \Delta t, \ \lambda_t = b_{22}^{-1}(-\tau) = [b_{11}(\tau)b_{22}(\tau) - b_{12}(\tau)b_{21}(\tau)]/b_{11}(\tau) \tag{1.14}$$

Релятивистские аналоги второго закона Ньютона. Механики, контролируемые группами движений некоторого риманова пространства, допускают лагранжево описание. Способ построения динамического закона в этой ситуации не вызывает затруднений. В прочих случаях для построения закона преобразования силы приходится использовать другие соображения, на которых останавливаться не будем. Однако в одномерной динамике и они не приемлемы. Поэтому естественно ограничиться, как это было сделано ранее [1], самым простым предположением, выполненным в одномерной классической механике (сила — инвариант).

Ниже приводится анализ лишь для наиболее интересных групп [10].

2. Группы G^{c_0}. Эти группы выделены при выполнении равенств (1.2) и (1.4) условиями

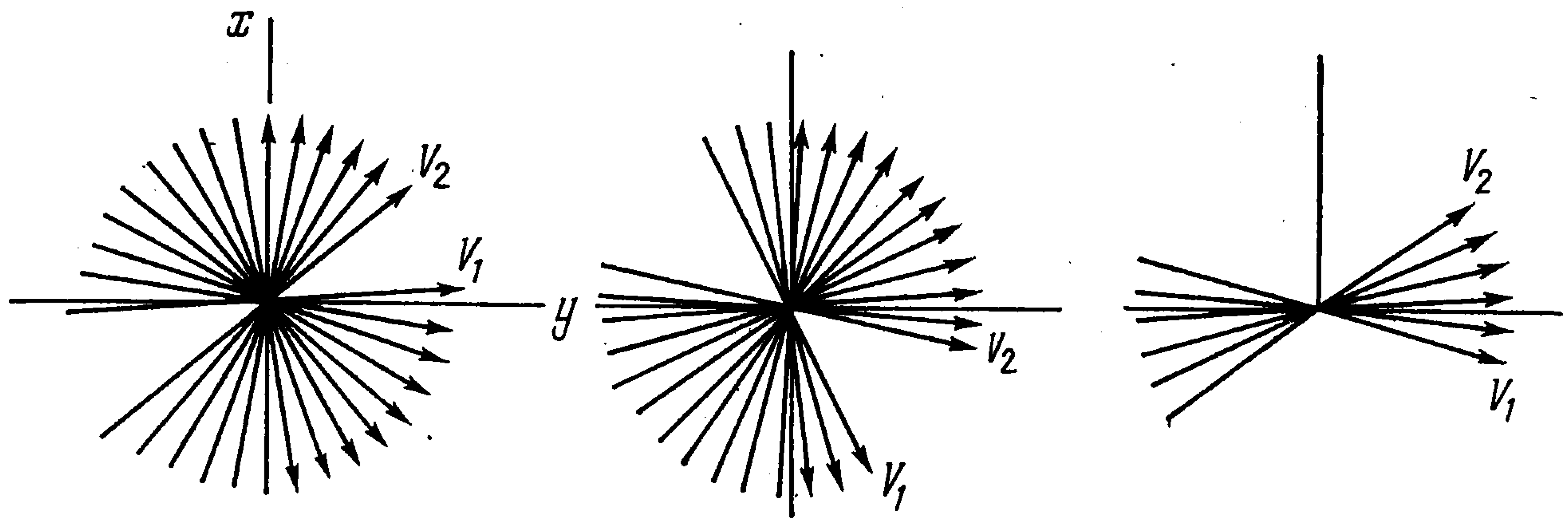
$$\begin{gathered} f_1 \equiv c_{12}^{\ 2} + c_{13}^{\ 3} = 0, f_2 \equiv c_{13}^{\ 1} + c_{23}^{\ 2} \neq 0, \ f_3 \equiv c_{12}^{\ 1} - c_{23}^{\ 3} = 0 \\ \psi_2/f_2^{\ 2} \equiv (\theta_2^{\ 2} + 4uv)/f_2^{\ 2} = c_0, \ \theta_2 \equiv c_{13}^{\ 1} - c_{23}^{\ 2}, \ u \equiv c_{23}^{\ 1}, v \equiv c_{13}^{\ 2} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Параметр c_0 принимает все вещественные значения кроме предельных: 0, $\pm\infty$. Соотношение (2.1) можно переписать в форме $D = (c_0 - 1)f_2^2/4$.

При помощи этого равенства найдем корни характеристического уравнения системы (1.8)

$$\lambda_{1,2} = {}^1/_2 (1 \pm \sqrt{c_0}) f_2$$

[1] *Журавлев В. Ф.* Основания механики. Методические аспекты. Препринт № 251. Институт проблем механики АН СССР, М.: 1985. 46 с.



Фиг. 2

Характер дальнейших формул будет зависеть от знака параметра c_0. Ограничимся рассмотрением лишь случая $c_0 = \alpha^2$ $(\alpha > 0)$.

Преобразование геометрической координаты и времени по формулам (1.9) дает

$$
\begin{gathered}
x' = \frac{x}{\alpha f_2}(A_1 e^{\lambda_1\tau} + A_2 e^{\lambda_2\tau}) + \frac{c_{23}{}^1 t}{\alpha f_2}(e^{\lambda_1\tau} - e^{\lambda_2\tau}) \\
t' = \frac{x}{\alpha f_2 c_{23}{}^1} A_1 A_2 (e^{\lambda_1\tau} - e^{\lambda_2\tau}) + \frac{t}{\alpha f_2}(A_1 e^{\lambda_2\tau} + A_2 e^{\lambda_1\tau}) \\
A_{1,2} = {}^1/_2\,(\alpha f_2 + \theta_2)
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Связь (1.11) между групповым параметром τ и скоростью V дается формулой

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau} = (c_{23}{}^1 - A_2 V)/(c_{23}{}^1 + A_1 V) \equiv Q$$

при помощи которой преобразованию (2.2) можно придать вид

$$
\begin{gathered}
x' = c_{23}{}^1 (x - Vt)\, R^{-1} Q^{1/(2\alpha)}, \quad R = \sqrt{(c_{23}{}^1 + A_1 V)(c_{23}{}^1 - A_2 V)} \\
t' = c_{23}{}^1 [- c_{13}{}^2 V x + (c_{23}{}^1 + \theta_2 V)\, t]\, R^{-1} Q^{1/(2\alpha)}
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

При этом необходимо $c_{23}{}^1 > 0$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением наиболее интересных ситуаций общего положения, когда $c_{13}{}^2 \neq 0$, а структурный параметр группы α не специализирован каким-либо образом. Из формулы (2.1) видно, что в этих случаях

$$A_1 A_2 = {}^1/_4\,(\alpha^2 f_2{}^2 - \theta_2{}^2) = c_{23}{}^1 c_{13}{}^2 \neq 0$$

Пусть V_1 — наименьшее, а V_2 — наибольшее из чисел $c_{23}{}^1/A_2$, $-c_{23}{}^1/A_1$. Тогда формулы (2.3) сохраняют смысл, если скорость V удовлетворяет условиям:

$$
\begin{gathered}
V < V_1 \text{ либо } V > V_2 \text{ при } V_1 V_2 > 0 \\
V_1 < V < V_2 \text{ при } V_1 V_2 < 0
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Области, соответствующие допустимым значениям V, заполнены на фиг. 2 мировыми линиями.

Закон преобразования скоростей согласно формуле (1.12)

$$V'' = [c_{23}{}^1 (V + V') + \theta_2 V V']/(c_{23}{}^1 + c_{13}{}^2 V V') \tag{2.5}$$

От параметра α они не зависят.

Величины V_i представляют собой род предельных скоростей движения, одинаковых во всякой инерциальной системе отсчета, и в этом смысле могут рассматриваться как скорости распространения сигналов. В самом деле, полагая в формуле (2.5) $V'' = V'$, получим

$$V'_{1,2} = (\theta_2 \pm \alpha f_2)/(2c_{13}{}^2)$$

$$\frac{\theta_2 + \alpha f_2}{2c_{13}{}^2} = \frac{2c_{23}{}^1}{\alpha f_2 - \theta_2} = \frac{c_{23}{}^1}{A_2}, \quad \frac{\theta_2 - \alpha f_2}{2c_{13}{}^2} = -\frac{2c_{23}{}^1}{\alpha f_2 + \theta_2} = -\frac{c_{23}{}^1}{A_1}$$

Факторы изменения геометрических масштабов и хода часов найдем по формулам (1.13), (1.14)

$$\lambda_x = RQ^{1/(2\alpha)}/(c_{23}^1 + \theta_2 V), \quad \lambda_t = RQ^{1/(2\alpha)}/c_{23}^1 \tag{2.6}$$

Сопоставление формул (1.6), (1.7) и (2.1) показывает, что если $c_0 \neq 1$, группы G^{c_0} никакой метрики не сохраняют; если $c_0 = 1$, сохраняемая метрика вырождена. При построении обобщений второго закона Ньютона считаем силу, как и массу, инвариантами.

Операторы X_k ($k = 1, 2, 3$), продолженные на скорость и ускорение, имеют вид

$$X_1^* = X_1 = \partial/\partial x, \quad X_2^* = X_2 = \partial/\partial t$$

$$X_3^* = X_3 + (-c_{13}^2 \dot{x}^2 + \theta_2 \dot{x} + c_{23}^1)\,\partial/\partial \dot{x} + (-3c_{13}^2 \dot{x} + \theta_2 - c_{23}^2)\,\ddot{x}\,\partial/\partial \ddot{x}$$

Единственный инвариант продолженной группы, зависящий от $\ddot{x}$,

$$X_k^*\Omega = 0 \quad k = 1, 2, 3$$

Полагая его линейным относительно ускорения, получим

$$\Omega = \ddot{x}\,(1 - A_2 \dot{x}/c_{23}^1)^{-3/2 - 1/(2\alpha)}(1 + A_1 \dot{x}/c_{23}^1)^{-3/2 + 1/(2\alpha)}$$

Искомый закон

$$m\ddot{x} = \left[\left(1 - \frac{A_2}{c_{23}^1}\,\dot{x}\right)\left(1 + \frac{A_1}{c_{23}^1}\,\dot{x}\right)\right]^{3/2}\left(\frac{1 - A_2 \dot{x}/c_{23}^1}{1 + A_1 \dot{x}/c_{23}^1}\right)^{1/(2\alpha)} \tag{2.7}$$

Очевидно, области допустимых значений скорости $\dot{x}$ — те же, что в законе преобразования (2.3) и формулах (2.4).

3. Группа Лоренца. Группа Лоренца (G^3) выделена условиями

$$f_k = 0, \quad \psi_2 = 4D > 0 \tag{3.1}$$

Преобразование пространства-времени получаем, решив задачу Коши (1.1)

$$x' = \{x\,[(\lambda + c_{13}^1)\,e^{\lambda\tau} + (\lambda - c_{13}^1)\,e^{-\lambda\tau}] + c_{23}^1 t\,(e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau})\}/(2\lambda)$$

$$t' = \{x c_{13}^2\,(e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}) + t\,[(\lambda - c_{13}^1)\,e^{\lambda\tau} + (\lambda + c_{13}^1)\,e^{-\lambda\tau}]\}/(2\lambda)$$

Зависимость параметра τ от скорости V, согласно условиям (3.1)

$$e^{2\lambda\tau} = [c_{23}^1 + (c_{13}^1 - \lambda)\,V]/[c_{23}^1 + (c_{12}^1 + \lambda)\,V], \quad \lambda^2 = D > 0$$

Отсюда

$$x' = c_{23}^1\,(x - Vt)\,R_1^{-1},\ t' = [-c_{13}^2 V x + (c_{23}^1 + 2c_{13}^1 V)\,t]\,R_1^{-1} \tag{3.2}$$

$$R_1 = \sqrt{(c_{23}^1 + (\lambda + c_{13}^1)\,V)(c_{23}^1 + (c_{13}^1 - \lambda)\,V)}$$

(Этот же результат можно получить из обычного преобразования Лоренца аффинной заменой в образе и прообразе. Но тогда вместо структурных констант в ответ войдут коэффициенты аффинного преобразования.)

Закон преобразования скоростей описывается, как и в предыдущем случае, формулой (2.5) ($\theta_2 = 2c_{13}^1$). Скорости распространения сигналов (скорости движения, инвариантные относительно выбора инерциальной системы)

$$(c_{13}^1 + \lambda)/c_{13}^2 = c_{23}^1/(\lambda - c_{13}^1), \quad (c_{13}^1 - \lambda)/c_{13}^2 = -c_{23}^1/(c_{13}^1 + \lambda)$$

совпадают со значениями V, обращающими в ноль подрадикальные множители в формулах (3.2). Области допустимых скоростей качественно совпадают с изображенными на фиг. 2.

Факторы изменения геометрических масштабов и хода часов в инерциальных системах

$$\lambda_x = R_1/(c_{23}^1 + 2c_{13}^1 V), \quad \lambda_t = R_1/c_{23}^1 \tag{3.3}$$

В наиболее интересном из случаев, когда $c_{23}^1 c_{13}^2 > 0$ будет

$$V_1 < 0, \quad V_2 > 0 \tag{3.4}$$

В области (3.4) допустимых значений скорости V функции (3.3) не имеют особенностей.

Группа Лоренца сохраняет индефинитную метрику $(D > 0)$. Динамический закон строится по классической методике

$$m\ddot{x} = (1 - 2c_{23}^2 \dot{x}/c_{23}^1 - c_{13}^2 \dot{x}^2/c_{23}^1)^{3/2} \tag{3.5}$$

4. Замечания о координатных реализациях преобразований и месте групп G^{c_0} $(c_0 > 0)$ в общей схеме. В п. п. 2 и 3 построены соотношения, характеризующие наиболее интересные механики одномерных движений материальной точки, из которых ньютонова получается некоторым предельным переходом.

Эти соотношения содержат от двух до трех произвольных постоянных — комбинаций структурных констант соответствующей группы.

Если нельзя указать веских физических соображений, при помощи которых число постоянных можно уменьшить, то все они должны считаться мировыми константами двумерного пространства-времени. (От них, естественно, будет зависеть и динамика точки.)

Очевидно в рамках рассматриваемой постановки задачи, когда можно оперировать лишь с четырьмя видами объектов (второй закон Ньютона, принцип инвариантности, набор групп преобразований и условие однородности пространства-времени), все возможности уже исчерпаны в процессе предыдущих построений.

Число постоянных можно было бы уменьшить подходящей заменой переменных

$$x_1 = dx + et, \; t_1 = gx + ht, \; dh - ge \neq 0 \tag{4.1}$$

сохраняющих однородность пространства-времени (что эквивалентно замене базиса в подалгебре $\{X_1, X_2\}$). Однако при чисто математической операции перехода (4.1) к фиксированной координатной реализации все равно потребуются основания для того, чтобы считать физическими переменными именно x_1, t_1, а не x, t.

Такие основания появляются лишь при наложении дополнительного требования инвариантности уравнений Максвелла в вакууме относительно преобразований пространства-времени. Можно проверить, что преобразования групп G^1, G^7 и G^{c_0} $(c_0 < 0)$ из [10] ни при какой координатной реализации этому требованию не удовлетворяют даже приблизительно. Соответствующие этим группам механики оказываются в противоречии с электродинамикой и поэтому были отброшены.

Иначе обстоит дело с группами G^{c_0} $(c_0 > 0)$ и группой Лоренца (G^3). О группах G^{c_0} речь пойдет в следующем замечании. Для выяснения же роли координатных реализаций остановимся лишь на преобразованиях Лоренца.

При

$$c_{13}^1 = 0, \; c_{23}^1/\lambda = c, \; c_{13}^2/c_{23}^1 = c^{-2}$$

формулы (3.2) переходят в преобразования Лоренца, записанные в обычной координатной реализации

$$x' = (x - Vt)\,\beta, \; t' = (-xV/c^2 + t)\,\beta, \; \beta = [1 - (V/c)^2]^{-1/2} \tag{4.2}$$

При

$$c_{13}^1 \neq 0, \quad c_{23}^1 c_{13}^2 > 0$$

согласно закону преобразований скоростей (2.5), распространение света (сигнала) в различных направлениях будет различным: $|V_1| \neq |V_2|$, что можно истолковать как неизотропность пространства.

Заметим, что такое предположение (в полномерной ситуации) не противоречит эксперименту, поскольку погрешность, с которой в настоящее время измерена скорость света, все еще исчисляется несколькими сотнями метров в секунду.

Возможность зависимости величины скорости света от направления его распространения допускалась Пуанкаре, Эйнштейном и Рейхенбахом в связи с проблемой измерения времени и анализом понятия одновременности событий [11]. Подробно рассматривалась [11] зависимость от направления координатной скорости света, тогда как скорость света физическая считалась постоянной.

Обратимся к группам G^{c_0} ($c_0 = \alpha^2$, $\alpha > 0$). Из условий (2.1) видно: если $\theta_2 = 0$ ($c_{23}{}^1 > 0$), то $c_{13}{}^2/c_{23}{}^1 = (\alpha f_2/(2c_{23}{}^1))^2$. Положив для определенности $\alpha f_2/(2c_{23}{}^1) > 0$, при условиях

$$\theta_2 = 0, \quad c_{13}{}^2/c_{23}{}^1 = c^{-2}, \quad \alpha f_2/(2c_{23}{}^1) = c^{-1} \tag{4.3}$$

(c — скорость света) из преобразований (2.3) найдем

$$x' = (x - Vt)\beta\chi, \quad t' = (-xV/c^2 + t)\beta\chi \tag{4.4}$$
$$\chi = [(1 - V/c)/(1 + V/c)]^{1/(2\alpha)}$$

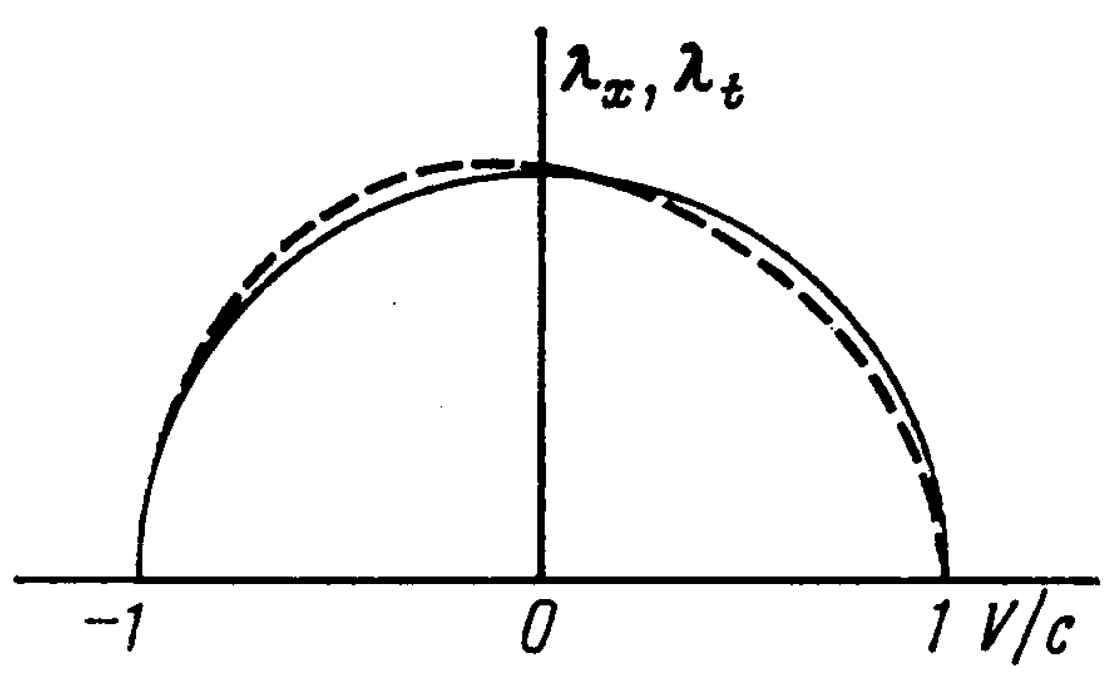
Отсюда при $\alpha \to \infty$ ($f_2 \to 0$) получим преобразования Лоренца (4.2). При этом динамический закон (2.7) перейдет в закон (3.5).

Рассмотрим более подробно преобразования (4.4) групп G^{c_0} и некоторые их следствия, полагая значения параметров $c_0 = \alpha^2$ ($\alpha > 0$) достаточно большими.

При условиях (4.3) формулы (2.6) приобретают вид

$$\lambda_x = \lambda_t = \beta\chi$$

График этих функций изображен на фиг. 3 штрихами. Сплошная линия — аналогичный график для группы Лоренца.



Фиг. 3

Если перейти к четырехмерному пространству-времени, определив соответствующие (4.4) преобразования двух других координат формулами

$$y' = y\chi, \quad z' = z\chi \tag{4.5}$$

можно заметить следующее. Преобразования (4.4), (4.5), в отличие от лоренцовых, не сохраняют псевдоевклидову метрику $ds'^2 = \chi^2 ds^2$, но сохраняют световой конус

$$ds^2 \equiv dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2 = 0$$

Следовательно, относительно них инвариантны уравнения Максвелла. (В четырехмерном случае параметр α определяет фактор подобия.) Таким образом, преобразования (4.4), (4.5) сколь угодно мало отличаются от лоренцовых (при больших α), допускают предельный переход к галилеевым (при $c \to \infty$) и сохраняют уравнения Максвелла.

Между свойствами соответствующих пространственно-временных континуумов, как бы близки количественно они ни были, существуют глубокие качественные различия. Они заключаются в зависимости свойств масштабов и хода часов от знака скорости их движения по отношению к неподвижному наблюдателю (нарушение четности) и зависимости поперечных размеров тел от скорости (формулы (4.7)).

5. Движения материальной точки по инерции, контролируемые галилеевой, лоренцовой и конформной группами преобразований. В п. п. 1—4 рассматривались в основном одномерные динамические модели. Как отмечалось, более интересны трехмерные модели движения, контролируемые группами размерности 10 (и выше). В данном пункте рассмотрена именно в такой, полномерной, постановке одна из первичных задач механики материальной точки — построение движений по инерции, контролируемых в смысле принципов инвариантности [1, 2] наиболее интересными группами преобразований. Предложена методика решения подобных задач. Она применена к группам галилеевых, лоренцовых и конформных преобразований. Подробно описаны свойства конформно-инвариантных движений точки в до- и сверхсветовой областях.

Первоочередность изучения движений материальной точки по инерции обусловлена двумя причинами: во-первых, эти движения лежат в основе инвариантного определения инерциальных систем отсчета, во-вторых, они служат важным ориентиром для построения динамических законов.

Постановка задачи и результат. Под законом движения точки будем понимать, как обычно, зависимость ее координат от времени и некоторой совокупности начальных условий. Если их число достаточно велико, заданные преобразования будут сохранять широкий класс движений. Если напротив, число начальных условий слишком мало, движений, сохраняемых группой может не существовать вовсе. Интересны случаи, когда удается ввести начальных условий ровно столько, сколько требуется для получения единственного закона движения: конкретность закона усиливает уверенность в его правдоподобии и облегчает экспериментальную проверку.

Будем искать движения материальной точки, зависящие от ее начальных положений, скорости и ускорения (что обусловлено числом параметров (15) наиболее широкой из рассматриваемых групп преобразований — конформной, которая обеспечивает единственность закону инерции)

$$x_k = \varphi_k\,(t,\ t_0;\ x_1^\circ,\ x_2^\circ,\ x_3^\circ;\ v_1,\ v_2,\ v_3;\ w_1,\ w_2,\ w_3) \tag{5.1}$$

преобразующиеся в себя

$$x_k' = \varphi_k\,(t',\ t_0';\ x_1'^\circ,\ x_2'^\circ,\ x_3'^\circ;\ v_1,\ v_2,\ v_3;\ w_1,\ w_2,\ w_3)$$

всеми преобразованиями заданной группы. Здесь x_k — декартовы координаты точки, v_k, w_k — проекции ее скорости и ускорения в начальный момент времени t_0.

Использование изложенной ниже методики приводит к следующему результату.

Наиболее общие законы движения материальной точки указанного класса, инвариантные относительно галилеевых, лоренцовых и конформных преобразований, имеют вид

$$x_k = x_k^\circ + v_k t^* + b w_k, \quad t^* = t - t_0 \tag{5.2}$$

Для галилеевой группы b — произвольная функция t^*, $w = \left(\sum_k w_k^2\right)^{1/2}$.

Для лоренцовой группы b — функция переменных $\omega_1 = \sum_k v_k^2 = v^2$, $\omega_2 = \sum_k w_k^2 = w^2$, $\varepsilon = \sum_k v_k w_k$, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{gathered} 2\omega_1^* \frac{\partial b}{\partial \omega_1^*} + 3\varepsilon \frac{\partial b}{\partial \varepsilon} + 4\omega_2 \frac{\partial b}{\partial \omega_2} - t^* \frac{\partial b}{\partial t^*} + 2b = 0 \\ \omega_1^* \frac{\partial b}{\partial \varepsilon} + 2\varepsilon \frac{\partial b}{\partial \omega_2} - b \frac{\partial b}{\partial t^*} = 0, \quad \omega_1^* = v^2 - c^2 \end{gathered} \tag{5.3}$$

(c — скорость света).

Для конформной группы

$$b = (-\varepsilon t^* + \omega_1^* \pm \sqrt{R_0})\, w^{-2} \tag{5.4}$$

$$R_0 = (\omega_1^* - \varepsilon t^*)^2 - \omega_1^* w^2 t^{*2} = (\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2)\, t^{*2} - 2\varepsilon\omega_1^* t^* + \omega_1^{*2}$$

В формуле (5.4) перед радикалом следует взять нижний знак при $\omega_1^* > 0$ и верхний знак при $\omega_1^* < 0$.

Конформно-инвариантные движения удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$d\mathbf{W}/dt = -3(\mathbf{V}, \mathbf{W})(c^2 - \mathbf{V}^2)^{-1}\mathbf{W} \tag{5.5}$$

где $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ — скорость и ускорение в текущий момент времени, $(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ — их скалярное произведение.

Доказательства формул (5.2)—(5.5) опущены.

Следствия. 1°. Инвариантных движений точки, зависящих только от начального положения, не существует.

2°. Конформно-инвариантные движения определены единственным образом начальными положениями, скоростью и ускорением.

3°. При отсутствии зависимости от начального ускорения ($b \equiv 0$) движения точки, инвариантные относительно преобразований галилеевой и лоренцовой групп, определены единственным образом. Это закон инерции Галилея.

Методика решения задачи. Искомый закон движения (5.1), согласно постановке задачи, описывает инвариантное многообразие заданной группы преобразований, продолженной на выбранную совокупность начальных значений.

Инвариантные многообразия удобно вычислять, используя вместо группы ее алгебру Ли ([12], с. 178).

Правые части φ_k равенств (5.1) вычисляются из условий

$$X_l^*\Phi_k|_\Gamma = 0, \quad \Phi_k \equiv x_k - \varphi_k, \quad \Gamma : \Phi_k = 0 \tag{5.6}$$

$$l = 1, \ldots, n; \quad k = 1, 2, 3$$

Каждый из базисных операторов X^* продолженной алгебры выражается через соответствующие операторы основной алгебры

$$X = \xi_k \partial/\partial x_k + \xi\partial/\partial t$$

по формулам

$$X^* = X + \xi_k{}^\circ \frac{\partial}{\partial x_k{}^\circ} + \xi^\circ \frac{\partial}{\partial t_0} + \eta_k{}^\circ \frac{\partial}{\partial v_k} + \zeta_k{}^\circ \frac{\partial}{\partial w_k}$$

$$\eta_k = \frac{d\xi_k}{dt} - v_k \frac{d\xi}{dt}, \quad \zeta_k = \frac{d\eta_k}{dt} - w_k \frac{d\xi}{dt}$$

($\xi_k{}^\circ$, ξ°, $\eta_k{}^\circ$, $\zeta_k{}^\circ$ — результат подстановки в функции ξ_k, ξ, η_k, ζ_k начальных условий.

Вычисления по формулам (5.6), не вызывая принципиальных затруднений, приводят к требуемому результату. Данный способ по сравнению с другими имеет следующие преимущества: применим для любых групп преобразований (а не только групп движений некоторого риманова пространства), которые заданы своей алгеброй Ли; дает закон движения в конечном (проинтегрированном) виде; не требует знания в явной форме конечных преобразований группы.

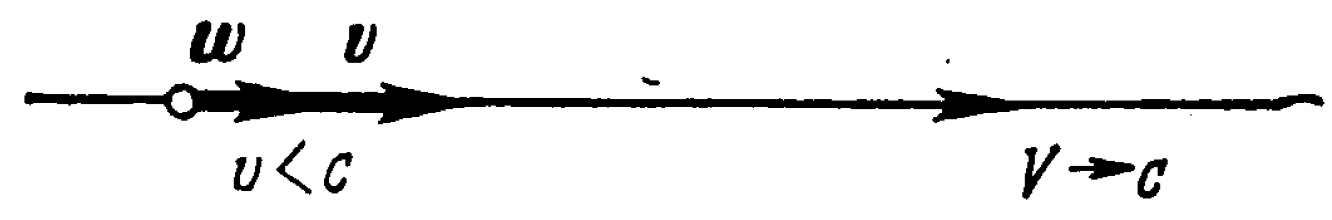
Кинематика конформно-инвариантных движений материальной точки. Инвариантность относительно конформных преобразований, среди которых содержатся и преобразования Лоренца, играет важную роль и не один раз использовалась в физике (см., например, [13]). Это объясняется тем, что конформные преобразования сохраняют уравнения Максвелла в вакууме [14] и тем самым должны быть как-то связаны с фундаментальными свойствами пространства-времени, в частности с законом инерции.

Перечислим некоторые общие свойства конформно-инвариантных движений.

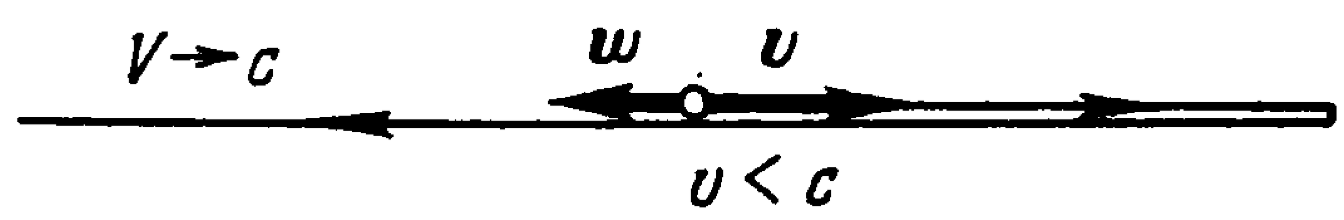
1°. Движения совершаются как с до-, так и сверхсветовой скоростями. Переход через скорость света невозможен.

2°. Если начальные скорость и ускорение точки коллинеарны $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$, траектории движения в геометрическом пространстве $\{x_1, x_2, x_3\}$ —

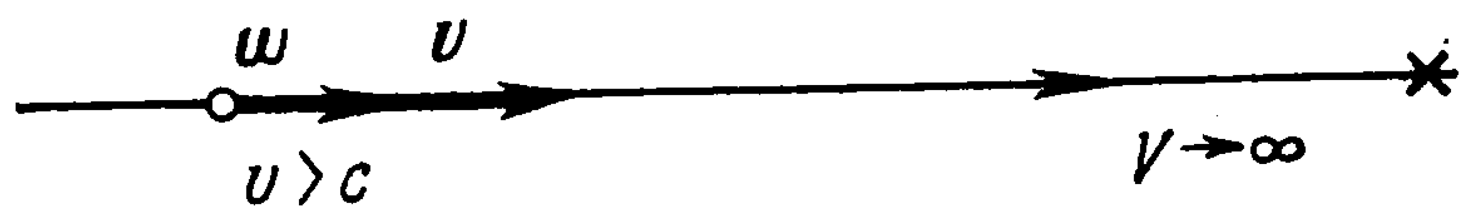
Фиг. 4



Фиг. 5

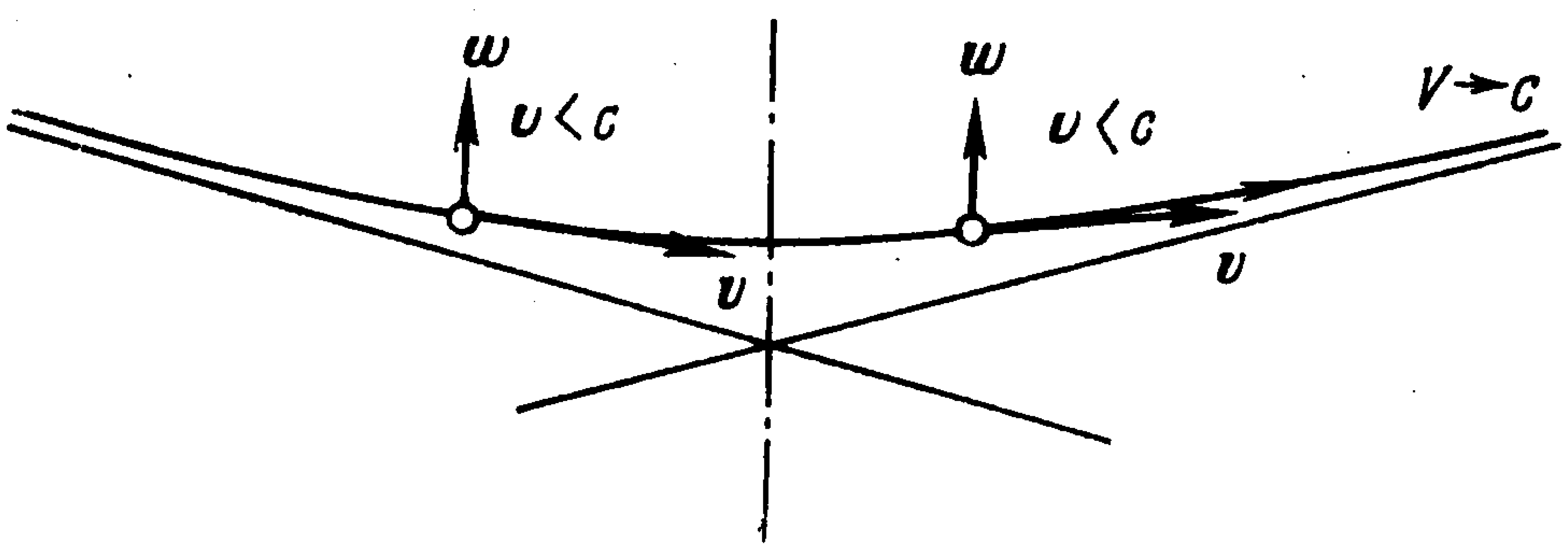


Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 8



Фиг. 9

прямые. Такие движения называются релятивистскими равноускоренными.

3°. Если начальные скорость и ускорение точки неколлинеарны ($\mathbf{w} \neq \lambda \mathbf{v}$), траектории движения в геометрическом пространстве — плоские кривые второго порядка, лежащие в плоскости, определяемой векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$: в досветовой области — это неограниченные дуги гиперболы, в сверхсветовой области — неограниченные либо конечные дуги гиперболы, параболы или эллипса. (Досветовые движения были описаны ранее [15].)

4°. В зависимости от начальных условий материальная точка либо удаляется в бесконечность со скоростью $V \to c$ при $t \to \infty$, либо движение заканчивается за конечное время в конечной точке пространства со скоростью $V \to \infty$ (последнее может иметь место лишь при $v > c$).

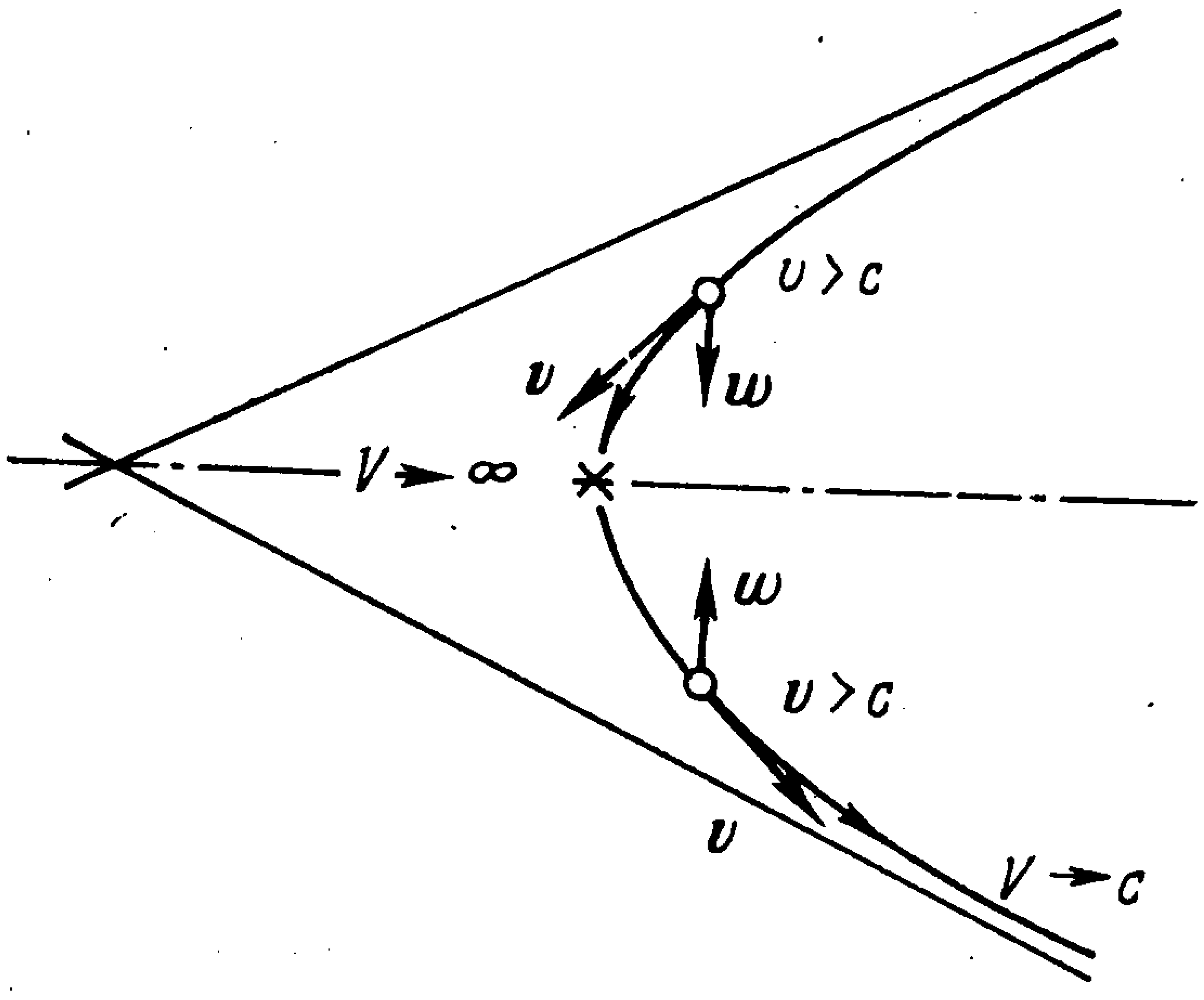
5°. При заданной начальной скорости $v > c$ тип траектории и характер движения точки вдоль нее полностью определяется углом γ между векторами начальной скорости и ускорения: тип траектории и характер движения точки зависит от соотношения между углом γ и критическим углом γ_0, причем

$$\cos \gamma_0 = \sqrt{1 - c^2/v^2}, \quad 0 < \gamma_0 < \pi/2$$

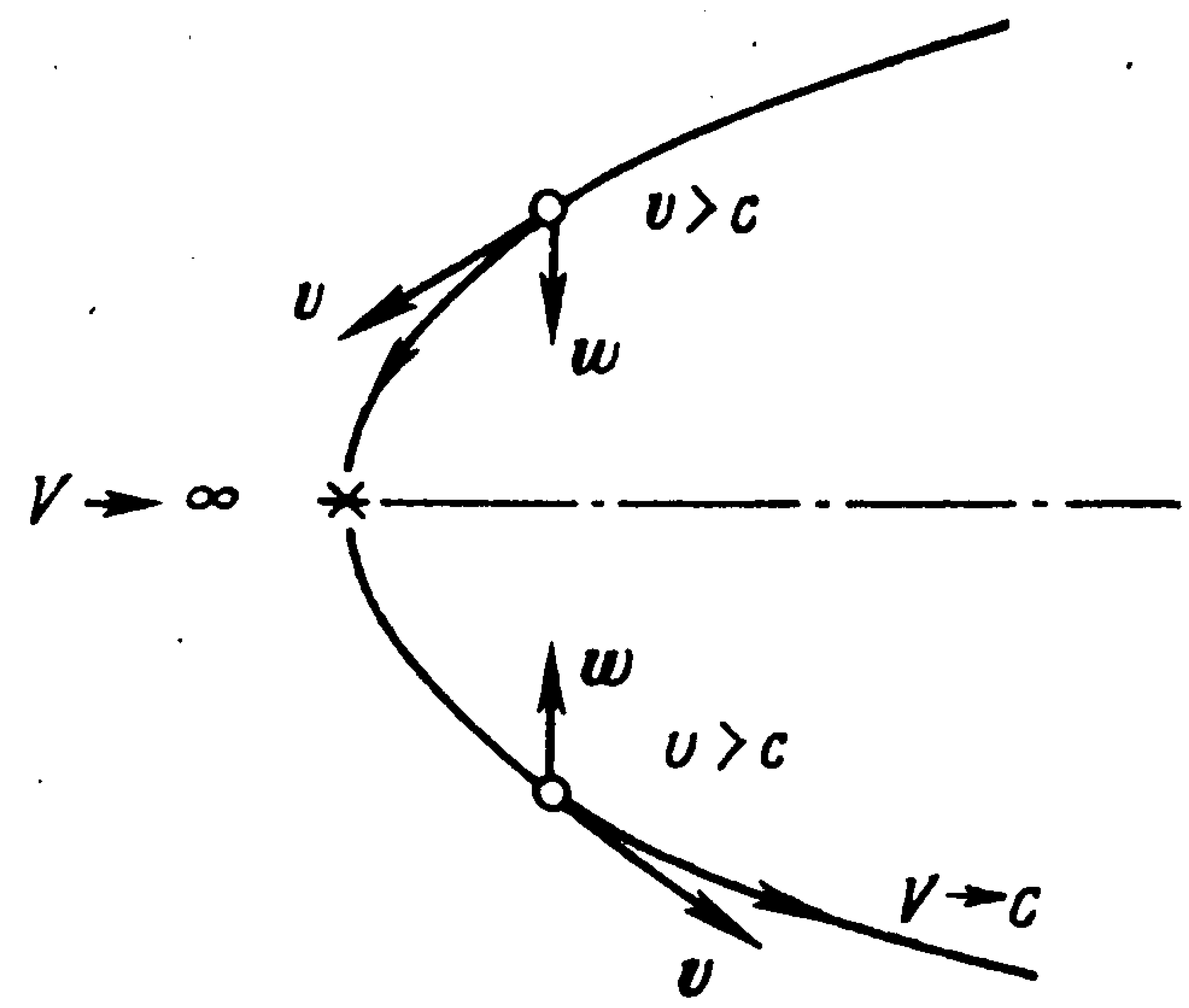
Опишем теперь более подробно все типичные ситуации.

1) $w = 0$. Равномерное прямолинейное движение с постоянной скоростью $V = v$ $(v \lessgtr c)$ (фиг. 4).

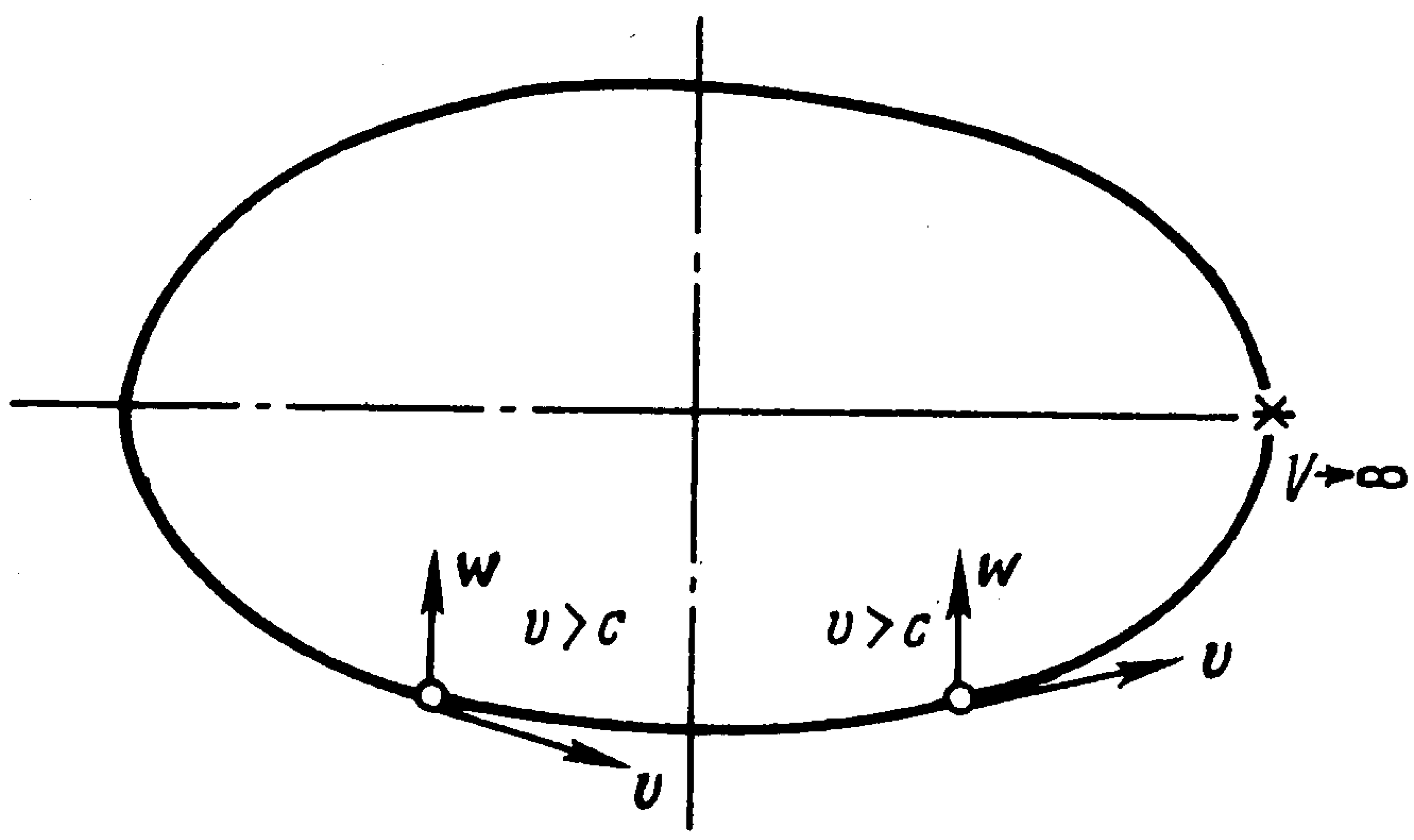
2) $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$, $0 < v < c$, $\lambda > 0$. Движение прямолинейно. Скорость V монотонно растет $\lim V = c$ при $t^* \to \infty$ (фиг. 5).



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

3) $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$, $0 < v < c$, $\lambda < 0$. Движение прямолинейно. Скорость убывает до нуля, затем, изменив знак, монотонно растет. $\lim V = c$ при $t^* \to \infty$ (фиг. 6).

4) $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$, $v > c$, $\lambda > 0$. Движение прямолинейно. Прекращается в момент $t_*{}^* = \omega_1{}^* (\varepsilon + w\sqrt{\omega_1{}^*})^{-1}$ в конечной точке пространства. Скорость монотонно растет, $\lim V = \infty$ при $t^* \to t_*{}^*$ (фиг. 7).

5) $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$, $v > c$, $\lambda < 0$. Движение прямолинейно. Скорость монотонно убывает, $\lim V = c$ при $t^* \to \infty$ (фиг. 8).

6) $v < c$, $\varepsilon = (v, w) > 0$. Траектория — ветвь гиперболы, не содержащая вершины. Точка, удаляясь, неограниченно приближается к асимптоте. Скорость монотонно растет, $\lim V = c$ при $t^* \to \infty$ (фиг. 9, правая точка).

7) $v < c$, $(v, w) < 0$. Траектория — неограниченная дуга гиперболы. Точка проходит через вершину гиперболы, затем, удаляясь, неограниченно приближается к асимптоте. Скорость убывает, затем монотонно растет, $\lim V = c$ при $t^* \to \infty$ (фиг. 9, левая точка).

8) $v > c$, $-\gamma_0 < \gamma < \gamma_0$. Движение по ограниченной дуге гиперболы с монотонно нарастающей скоростью, прекращающейся в момент $t^* = t_*{}^*$ достижения вершины, $\lim V = \infty$, при $t^* \to t_*{}^*$ (фиг. 10, верхняя точка).

9) $v > c$, $\pi - \gamma_0 < \gamma < \pi + \gamma_0$. Движение по неограниченной дуге гиперболы от вершины с монотонно убывающей скоростью $\lim V = c$ при $t^* \to \infty$ (фиг. 10, нижняя точка).

10) $v > c$, $\gamma = \gamma_0$, либо $\gamma = 2\pi - \gamma_0$. Движение по ограниченной дуге параболы с монотонно нарастающей скоростью прекращается в момент $t^* = t_*^*$ достижения вершины, $\lim V = \infty$ при $t_* \to t_*^*$ (фиг. 11, верхняя точка).

11) $v > c$, $\gamma = \pi - \gamma_0$, $\gamma = \pi + \gamma_0$. Движение по ветви параболы от вершины с монотонно убывающей скоростью, $\lim V = c$ при $t^* \to \infty$ (фиг. 11, нижняя точка).

12) $v > c$, $\pi/2 < \gamma < \pi - \gamma_0$, $\pi + \gamma_0 < \gamma < 3\pi/2$. Движение по дуге эллипса. Точка сближается с малой полуосью с убывающей скоростью, после пересечения этой полуоси продолжает движение в прежнем направлении с монотонно возрастающей скоростью. Движение прекращается в момент t_*^* пересечения с большой полуосью $\lim V = \infty$ при $t^* \to t_*^*$ (фиг. 12, левая точка).

13) $v > c$, $\gamma_0 < \gamma \leqslant \pi/2$, $(3/2)\pi \leqslant \gamma < 2\pi - \gamma_0$. Движение по дуге эллипса от пересечения его меньшей полуосью с монотонно возрастающей скоростью. Движение прекращается в момент $t^* = t_*^*$ пересечения с большой полуосью, $\lim V = \infty$ при $t^* \to t_*^*$ (фиг. 12, правая точка).

К доказательству свойств конформно-инвариантных движений. Траектории. Приняв точку $\{x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ\}$ за начало координат, направим ось Ox вдоль начального ускорения w, ось Oy расположим в плоскости векторов v, w (если $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$, очевидно, траектория — прямая). Получим

$$x_1 = (\omega_1^* \pm \sqrt{R_0})/w, \quad x_2 = v_2 t^*, \quad x_3 = 0 \tag{5.7}$$

Отсюда

$$v_2^2 x_1^{*2} - (\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2) x_2^{*2} = B \text{ при } \varepsilon^2 - \omega_1^* w^2 \neq 0 \tag{5.8}$$

$$x_1^* = w x_1 - \omega_1^*, \quad x_2^* = x_2 - \varepsilon\omega_1^* v_2/(\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2)$$

$$B = -\omega_1^{*3} v_2^2 w^2/(\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2)$$

$$v_2^2 x_1^{*2} = -2\varepsilon\omega_1^* v_2 x_2 + \omega_1^{*2} v_2^2 \text{ при } \varepsilon^2 - \omega_1^* w^2 = 0 \tag{5.9}$$

Тип траектории определяется знаком выражения $c^2 - v^2 \sin\gamma$ или, что то же самое выражения $\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2$ (γ — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$): при $\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2 > 0$ это гипербола, при $\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2 = 0$ — парабола, при $\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2 < 0$ — эллипс.

Уравнения (5.7)—(5.9) позволяют определить точку на траектории, в которой прекращается движение в сверхсветовой области при надлежащих начальных условиях, а также расположение траектории относительно направления начального ускорения. Для этого достаточно заметить, что движение прекращается, когда R_0 обращается в нуль, т. е. в точке пересечения траектории с осью Ox_2^*, и что вектор w параллелен оси Ox_1^*.

Начальное положение точки на траектории и ее последующее движение легко находим при помощи выводимых из (5.2) формул для текущих скорости и ускорения

$$V_i = v_i - \varepsilon w_i w^{-2} + w_i w^{-2} R_0^{-1/2} [\omega_1^*\varepsilon + (\omega_1^* w^2 - \varepsilon^2) t^*] \operatorname{sgn} \omega_1^*$$

$$V^2 = c^2 + \omega_1^{*3} R_0^{-1}, \quad W_i = |\omega_1^*|^3 w_i R_0^{-3/2}, \quad W^2 = w^2 \omega_1^{*6} R_0^{-3}$$

$$(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \sum_k V_k W_k = |\omega_1^*|^3 [\omega_1^*\varepsilon + (\omega_1^* w^2 - \varepsilon^2) t^*] R_0^{-2}$$

а также радиуса кривизны ρ траектории для текущего положения материальной точки

$$\rho = \rho_0 v^{-3} (\omega_1^* + c^2 \omega_1^{*-3} R_0)^{3/2}$$

При этом важен учет следующих факторов:

1) положение материальной точки, ее скорость и ускорение определены лишь для $R_0 > 0$;

2) при $v < c$ будет $R_0 > 0$ для всех $t^* \in]-\infty, \infty[$;

3) при $v > c$ функция R_0 имеет два нуля:

$$t_1^* = \omega_1^* (\varepsilon + w\sqrt{\omega_1^*})^{-1}, \quad t_2^* = \omega_1^* (\varepsilon - w\sqrt{\omega_1^*})^{-1}$$

которые либо оба положительны, либо оба отрицательны, если $\varepsilon^2 - \omega_1^* w^2 > 0$ и разных знаков, если $\varepsilon^2 - \omega_1{}^* w^2 < 0$; при $\varepsilon^2 - \omega_1{}^* w^2 = 0$ функция R_0 имеет один нуль $t^* = \omega_1{}^*/(2\varepsilon)$;

4) ускорения материальной точки в любом ее положении на траектории остаются параллельными между собой. Их общее направление совпадает с направлением оси симметрии траектории в досветовой области и перпендикулярно ему в сверхсветовой. В случае, когда траектория — эллипс, ускорение направлено вдоль малой оси;

5) в сверхсветовой области движение может заканчиваться только в вершине траектории;

6) радиус кривизны траектории материальной точки растет или убывает вместе с функцией R_0.

Таким образом, клейновский подход, основанный на предварительном переборе групп и изучении их иерархий, позволяет придать задаче построения механических моделей единообразие и последовательность, приводит к формулам, допускающим экспериментальную проверку. Поэтому опыт построения моделей, подобных рассмотренным в этой статье, представляется полезным.

Автор благодарит В. В. Румянцева, В. Ф. Журавлева и В. В. Козлова за полезные дискуссии по некоторым принципиальным вопросам, затронутым в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических методов («Эрлангенская программа») / Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. С. 399—434.
2. *Вигнер Е.* События, законы природы и принципы инвариантности // Успехи физ. наук. 1965. Т. 85. № 4. С. 727—736.
3. *Saletan E. J.* Contractio of Lie groups // J. Math. Phys. 1961. V. 2. № 1. P. 22.
4. *Gerstenhaber M.* On the deformation of rings and algebras // Ann. Math. 1964. V. 79. № 1. P. 59—103.
5. *Lévy-Nahas M.* Deformation and contraction of Lie algebras // J. Math. Phys. 1967. V. 8. № 6. P. 1211—1222.
6. *Lévy-Nahas M.* Deformation du groupe de Poincaré // Collog. intern. Centr. nat. rech. scient., 1968. № 159. P. 25—45.
7. *Bacry H., Lévy-Leblond J.-M.* Possible kinematics. // J. Math. Phys. 1968. V. 9. № 10. P. 1605—1614.
8. *Lévy-Leblond J.-M.* Une nouvelle limite nonrelativiste du groupe de Poincaré // Ann. Inst. H. Poincaré. 1965. V. 13. № 1. P. 1—12.
9. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 355 с.
10. *Мархашов Л. М.* Трехпараметрические группы Ли, примыкающие к группам Галилея и Евклида // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 278—289.
11. *Логунов А. А.* Лекции по теории относительности. М.: Изд-во МГУ, 1984. 221 с.
12. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли. М.; Л, Гостехиздат, 1940. 396 с.
13. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal Invariance in Physics // Rev. Modern Phys. 1962. V. 34. № 3. P. 442—457.
14. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
15. *Мархашов Л. М.* О конформно-инвариантных движениях материальной точки // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 3—13.

Москва

Поступила в редакцию
8.VII.1988