

УДК 531.36

А. И. Грудев, А. Ю. Ишлинский, Ф. Л. Черноусько

## О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается движение материальной точки по шероховатой горизонтальной плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. На точку действует сила сухого трения о плоскость, удовлетворяющая закону Кулона. Построены асимптотические разложения решений уравнений движения вблизи момента остановки точки. Выявлены различные типы движений с остановками. Проведено численное моделирование движений во всем диапазоне изменения параметров и начальных условий. В результате построены характерные траектории движений точки. Найдено интегральное многообразие, разделяющее в фазовом пространстве движения с остановкой и движения, при которых точка уходит на бесконечность. На этом многообразии построены фазовые траектории системы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение материальной точки  $P$  массы  $m$  по горизонтальной плоскости, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Примем, что точка и плоскость взаимодействуют друг с другом согласно закону сухого трения Кулона с коэффициентом трения  $f$ . Свяжем подвижную декартову систему координат  $Oxyz$  с вращающейся плоскостью, приняв за ось  $z$  вертикальную ось вращения плоскости. Для определенности будем считать, что плоскость вращается против часовой стрелки, так что  $\omega > 0$ .

Уравнения плоского движения точки  $P$  запишем во вращающейся системе координат  $Oxyz$  с учетом сил инерции и силы сухого трения

$$\begin{aligned} x'' &= -fgv^{-1}x' + \omega^2x + 2\omega y', & y'' &= -fgv^{-1}y' + \omega^2y - 2\omega x' \\ v &= [(x')^2 + (y')^2]^{1/2} > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $v$  — скорость точки  $P$  относительно вращающейся плоскости,  $g$  — ускорение силы тяжести, точки означают производные по времени.

Введем в плоскости  $xy$  полярные координаты  $r, \varphi$  и обозначим через  $\theta$  угол между вектором относительной скорости точки  $P$  и осью  $x$  (фиг. 1). Тогда имеем

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi \\ x' &= v \cos \theta, & y' &= v \sin \theta \end{aligned}$$

Переходя от переменных  $x, x', y, y'$  в системе (1.1) к переменным  $r, \varphi, v, \theta$ , получим уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} r' &= v \cos(\theta - \varphi), & \varphi' &= vr^{-1} \sin(\theta - \varphi) \\ v' &= -fg + \omega^2 r \cos(\theta - \varphi), & \theta' &= -2\omega - \omega^2 r v^{-1} \sin(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если в какой-либо момент времени точка покоится относительно плоскости ( $v = 0$ ) и выполнено условие

$$r \leq a = fg\omega^{-2} \quad (1.3)$$

то точка останется в состоянии покоя, так как центробежная сила  $m\omega^2 r$  в этом случае не превосходит силы трения покоя  $fmg$ .

Перейдем к безразмерным переменным, приняв в качестве единицы длины радиус  $a$  зоны покоя из (1.3), а в качестве единицы времени —

величину  $\omega^{-1}$ . Положим в (1.2)

$$r = ar', \quad t = \omega^{-1}t', \quad v = a\omega^{-1}v' \quad (1.4)$$

Кроме того, вместо угла  $\theta$  введем угол  $\alpha$  между вектором скорости и радиусом-вектором (фиг. 1)

$$\alpha = \theta - \varphi \quad (1.5)$$

После преобразований (1.4), (1.5) с учетом (1.3) уравнения движения (1.2) примут вид (штрихи у безразмерных переменных опущены, точкой обозначены производные по безразмерному времени  $t'$ )

$$\begin{aligned} r' &= v \cos \alpha, & v' &= r \cos \alpha - 1 \\ \alpha' &= -2 - (rv^{-1} + vr^{-1})\sin \alpha, & \varphi' &= vr^{-1} \sin \alpha \quad (v \geq 0, r \geq 0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

а начальные условия

$$t = t_0, \quad r = r_0, \quad v = v_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (1.7)$$

Заметим, что первые три уравнения (1.6) не содержат  $\varphi$  и поэтому могут интегрироваться независимо от четвертого уравнения. После их интегрирования угол  $\varphi$  (циклическая координата) определяется квадратурой.

В системе (1.6) уже не содержится никаких параметров. Следовательно, ее решение зависит лишь от начальных значений (1.7). Радиус зоны покоя для системы (1.6) равен единице, т. е. если  $r_0 \leq 1$ ,  $v_0 = 0$  в (1.7), то  $r \equiv r_0$ ,  $v \equiv 0$ ,  $\alpha \equiv \alpha_0$ ,  $\varphi \equiv \varphi_0$  при всех  $t \geq t_0$ .

При  $v \rightarrow 0$  уравнения движения (1.6) имеют особенности. Ниже в п. 2 анализируется характер этих особенностей путем построения асимптотик движения вблизи моментов остановки, т. е. при  $v$ , близких к нулю. Заметим, что особенности уравнений (1.6) при  $r \rightarrow 0$  несущественны и связаны с переходом к полярной системе координат; для уравнений (1.1) в декартовой системе координат они отсутствуют.

В п. 3 приводятся результаты численного интегрирования системы (1.6) при различных характерных начальных условиях (1.7). В п. 4 описывается построение интегрального многообразия, отделяющего движения с остановкой, в которых  $v \equiv 0$  при достаточно больших  $t > t^*$ , от движений, уходящих на бесконечность, в которых  $r \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

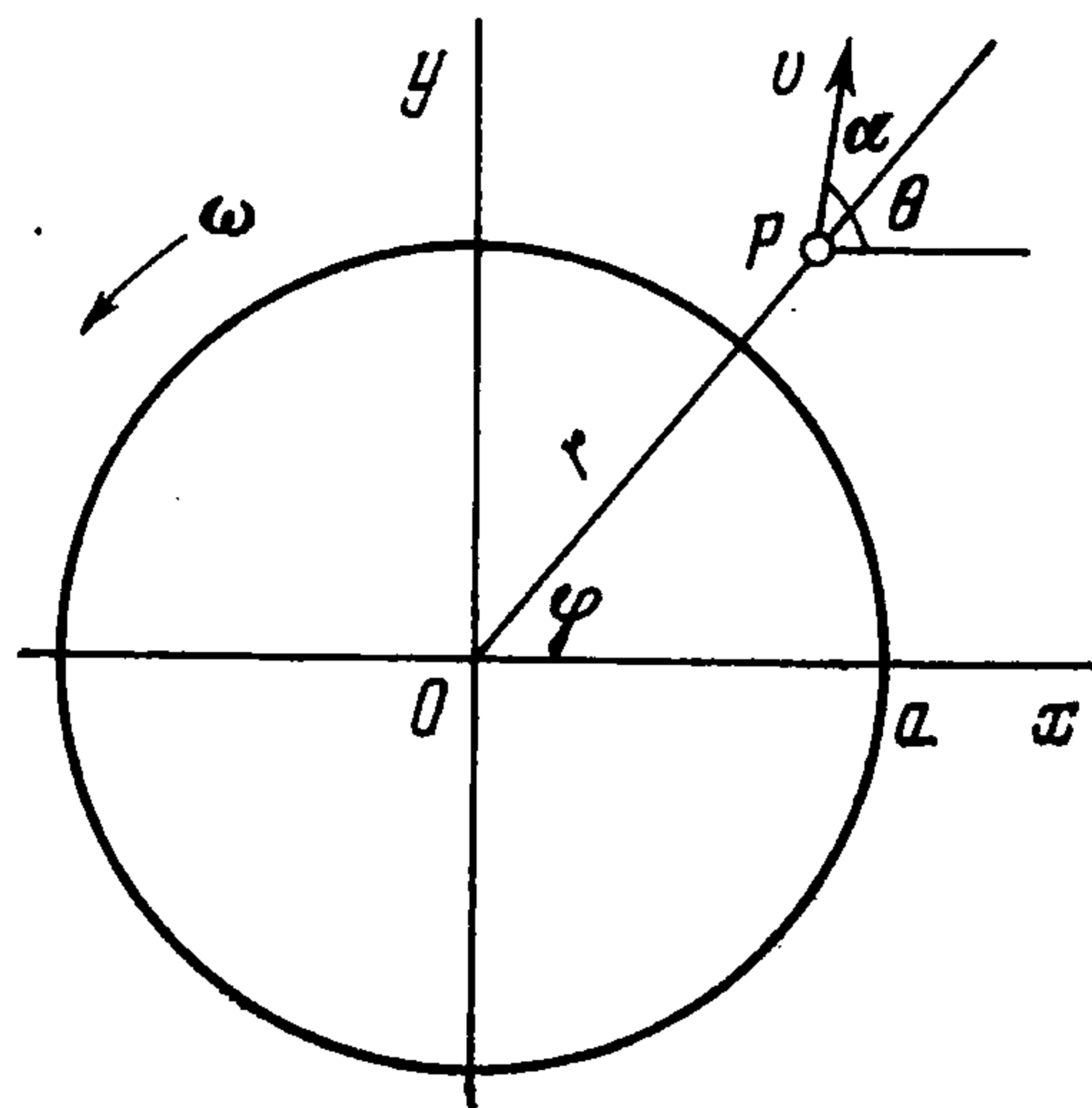
**2. Асимптотика движений с остановками.** Пусть в некоторый момент  $t = t^*$  имеет место остановка движения:  $v(t^*) = 0$ . Положим

$$r(t^*) = r^*, \quad v(t^*) = 0, \quad \alpha(t^*) = \alpha^*, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad t - t^* = \tau \quad (2.1)$$

Будем рассматривать как процесс остановки (торможения), при котором  $\tau \leq 0$  в (2.1), так и начало движения, при котором  $\tau \geq 0$ . В случае  $r^* \leq 1$  возможно только торможение; здесь при  $\tau \geq 0$  имеем  $r \equiv r^*$ ,  $v \equiv 0$ ,  $\alpha \equiv \alpha^*$ ,  $\varphi \equiv \varphi^*$ . В случае  $r^* > 1$  после остановки в момент  $t^*$  движение обязательно должно продолжаться:  $v > 0$  при  $\tau > 0$ .

Из второго уравнения (1.6) с учетом (2.1) получим

$$v = (r^* \cos \alpha^* - 1)\tau + \dots \quad (2.2)$$



Фиг. 1

где многоточием всюду обозначены малые высших порядков по  $\tau$  по сравнению с выписанными членами. Подставляя соотношения (2.1), (2.2) в третье уравнение (1.6), будем иметь

$$\alpha' = -2 - r^* (r^* \cos \alpha^* - 1)^{-1} \sin \alpha^* \tau^{-1} + \dots$$

Отсюда следует, что при  $r^* \sin \alpha^* \neq 0$  имеем  $\alpha' = O(\tau^{-1})$ ,  $\alpha = O(\ln |\tau|)$ , что противоречит условию  $\alpha \rightarrow \alpha^*$  при  $\tau \rightarrow 0$  из (2.1). Следовательно, условия остановки (2.1) могут иметь место либо при  $r^* = 0$ , либо при  $\sin \alpha^* = 0$ . Не нарушая общности, примем  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Тогда остановка может иметь место в случаях  $\alpha^* = 0$ ,  $\alpha^* = \pi$  и  $r^* = 0$ .

Подставим разложение (2.2) в первое уравнение (1.6) и проинтегрируем его для малых  $\tau$  при начальном условии  $r(t^*) = r^*$  из (2.1). В случае  $\alpha^* = 0$  получим

$$r = r^* + 1/2 (r^* - 1)\tau^2 + \dots, \quad v = (r^* - 1)\tau + \dots \quad (2.3)$$

В случае  $\alpha^* = \pi$  найдем

$$r = r^* + 1/2 (r^* + 1)\tau^2 + \dots, \quad v = -(r^* + 1)\tau + \dots \quad (2.4)$$

Подставим разложения (2.3) для  $\alpha^* = 0$  в третье уравнение (1.6). При малых  $\tau$ , учитывая малость  $\alpha$ , получим с точностью до малых высшего порядка при  $r^* > 0$ ,  $r^* \neq 1$

$$\alpha' = -2 - r^* (r^* - 1)^{-1} \tau^{-1} \alpha + \dots \quad (2.5)$$

Аналогично подставим разложения (2.4) для  $\alpha^* = \pi$  в третье уравнение (1.6). Положим в этом уравнении

$$\alpha = \pi + \beta \quad (2.6)$$

и упростим его, учитывая малость  $\tau$  и  $\beta$  и предполагая, что  $r^* > 0$

$$\beta' = -2 - r^* (r^* + 1)^{-1} \tau^{-1} \beta + \dots \quad (2.7)$$

Заметим, что случай  $r^* = 0$  отвечает остановке в начале координат. При этом вектор скорости при  $\tau \leq 0$  должен быть направлен против радиуса-вектора, т. е.  $\alpha^* = \pi$  при  $r^* = 0$ . Соотношения (2.4) в случае  $r^* = 0$  запишутся в виде

$$r = 1/2 \tau^2 + \dots, \quad v = -\tau + \dots \quad (2.8)$$

а третье уравнение (1.6) вместо (2.7) примет вид

$$\beta' = -2 - 2\tau^{-1} \beta + \dots \quad (2.9)$$

Уравнения (2.5), (2.7), (2.9), полученные для случаев  $\alpha^* = 0$ ,  $\alpha^* = \pi$ ,  $r^* = 0$ , однотипны и имеют вид

$$q' = -2 + \gamma q \tau^{-1} \quad (2.10)$$

где  $q$  — переменная,  $\gamma$  — постоянная.

Запишем решение линейного уравнения (2.10)

$$q = C |\tau|^\gamma + 2(\gamma - 1)^{-1} \tau \quad (\gamma \neq 1) \quad (2.11)$$

Здесь и далее  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. В зависимости от величины  $\gamma$  главным членом выражения (2.11) для  $q$  при  $\tau \rightarrow 0$  может быть либо первое, либо второе слагаемое в (2.11). Поэтому ниже отдельно строятся асимптотики в различных случаях. При этом используются формулы (2.3)—(2.9) для  $r$ ,  $v$ ,  $\alpha$ , а угол  $\varphi$  определяется квадратурой при помощи последнего уравнения (1.6) и соответствующего начального условия (2.1).

$$1) \quad 0 < r^* < 1/2, \quad \alpha^* = 0$$

Сопоставляя (2.5) и (2.10), находим

$$\gamma = r^* (1 - r^*)^{-1} \quad (2.12)$$

Так как в данном случае  $0 < \gamma < 1$ , то главным в решении (2.11) является первый член. Из (2.3) следует, что условие  $v \geq 0$  при этом будет выполнено лишь при  $\tau \leq 0$ . Для  $r, v$  имеют место формулы (2.3), а  $\alpha, \varphi$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha &= C (-\tau)^\gamma + \dots \\ \varphi &= \varphi^* - (1 - r^*)^2 (r^*)^{-1} (2 - r^*)^{-1} C (-\tau)^{\gamma+2} + \dots \\ 0 < r^* < 1/2, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \tau \leq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$2) \quad r^* = 1/2, \quad \alpha^* = 0$$

Интегрирование уравнения при  $\gamma = 1$  дает вместо (2.11)  $\alpha = C\tau - 2\tau \ln |\tau|$ . Сохраняя главные члены разложений, получим (члены с постоянной  $C$  опускаем)

$$\begin{aligned} r &= 1/2 - 1/4\tau^2 + \dots, \quad v = -1/2\tau + \dots, \quad \alpha = -2\tau \ln |\tau| + \dots, \\ \varphi &= \varphi^* + 2/3\tau^3 \ln |\tau| + \dots \\ r^* &= 1/2, \quad \tau \leq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$3) \quad 1/2 < r^* < 1, \quad \alpha^* = 0$$

Согласно (2.12) в данном случае имеем  $\gamma > 1$ , поэтому в выражении (2.11) сохраняем второй член (член с  $C$  опущен). Получим

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(1 - r^*)(2r^* - 1)^{-1}\tau + \dots \\ \varphi &= \varphi^* - 2/3(1 - r^*)^2(r^*)^{-1}(2r^* - 1)^{-1}\tau^3 + \dots \\ 1/2 < r^* < 1, \quad \tau \leq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для  $r, v$  справедливы соотношения (2.3).

$$4) \quad r^* > 1, \quad \alpha^* = 0$$

Согласно (2.12) имеем  $\gamma < 0$ , поэтому первое слагаемое в (2.11) при  $C \neq 0$  стремится к бесконечности при  $\tau \rightarrow 0$ . Но это противоречит условию  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , которое должно выполняться в данном случае ( $\alpha^* = 0$ ). Поэтому решение, удовлетворяющее заданному условию, будет иметь место лишь при  $C = 0$ . Решение дается теми же формулами (2.3), (2.15), что и в предыдущем случае, однако, как следует из (2.3), здесь условие  $v \geq 0$  выполняется лишь при  $\tau \geq 0$ . Таким образом, если случаи 1) — 3) отвечали торможению движения, то случай 4) — разгону из состояния покоя. Кроме того, в случаях 1) — 3) имела место неединственность асимптотик (постоянная  $C$  была произвольной), а в этом случае решение единственно ( $C = 0$ ).

$$5) \quad r^* > 0, \quad \alpha^* = \pi$$

Уравнение (2.7) для  $\beta$  имеет вид (2.10), причем

$$\gamma = -r^* (r^* + 1)^{-1} < 0 \quad (2.16)$$

Поэтому так же, как и в случае 4), здесь решение вида (2.11) стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ , только если  $C = 0$ . Переменные  $r, v$  определяются соотношениями (2.4), причем  $v \geq 0$  лишь при  $\tau \leq 0$ . Для  $\alpha, \varphi$  получим, согласно (2.6), (2.11), (2.16),

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi - 2(r^* + 1)(2r^* + 1)^{-1}\tau + \dots \\ \varphi &= \varphi^* - 2/3(r^* + 1)^2(r^*)^{-1}(2r^* + 1)^{-1}\tau^3 + \dots; \quad \tau \leq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$6) \quad r^* = 0, \quad \alpha^* = \pi$$

Уравнение (2.9) для  $\beta$  имеет вид (2.10), причем  $\gamma = -2$ . Как и в случаях 4), 5), здесь в решении вида (2.11) следует положить  $C = 0$ . Переменные  $r, v$  определены равенствами (2.8), причем  $\tau \leq 0$ , а

$$\alpha = \pi - \frac{2}{3}\tau + \dots, \quad \varphi = \varphi^* - \frac{4}{3}\tau + \dots; \quad \tau \leq 0 \quad (2.18)$$

Здесь, как и в случаях 4), 5), решение единственно.

$$7) \quad r^* = 1, \quad \alpha^* = 0$$

Этот случай особый: здесь в уравнении (2.5) появляется бесконечно большое слагаемое. Следовательно, предположение (2.1) о том, что в некоторый конечный момент времени  $t^*$  происходит остановка, приводит к противоречию. Это наводит на мысль искать решение, при котором условия остановки достигаются асимптотически, т. е.

$$r \rightarrow 1, \quad v \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

Заменяя в первых двух уравнениях (1.6)  $\cos \alpha$  на 1, получим упрощенную систему

$$r' = v, \quad v' = r - 1$$

Ее решение при условиях (2.19) имеет вид

$$r = 1 - be^{-t}, \quad v = be^{-t}, \quad b > 0 \quad (2.20)$$

где  $b$  — постоянная. Подставляя соотношения (2.20) в третье уравнение (1.6), получим с точностью до малых высшего порядка

$$\alpha' + 2 + b^{-1}e^t \alpha + \dots = 0$$

Главные члены этого уравнения (второй и третий) взаимно уничтожаются, если принять

$$\alpha = -2be^{-t} + \dots \quad (2.21)$$

Теперь с учетом (2.21) можно убедиться, что замена  $\cos \alpha$  на 1 в первых двух уравнениях (1.6) внесла погрешность в величинах высшего порядка малости.

Формулы (2.20), (2.21) определяют главные члены асимптотических разложений. Отметим, что эти разложения можно построить регулярным образом, отыскивая функции  $r, v, \alpha$  формально в виде степенных рядов по аргументу  $e^{-t}$ , на чем здесь не останавливаемся. Приведем еще главные члены разложения для угла  $\varphi$ , получаемые из последнего уравнения (1.6) и соотношений (2.20), (2.21),

$$\varphi = \varphi^* + b^2 e^{-2t} + \dots \quad (2.22)$$

Рассмотренные случаи 1) — 7) исчерпывают все возможные случаи движений с остановками, т. е. движения, при которых скорость  $v$  обращается в нуль в конечный момент времени  $t^*$  или при  $t \rightarrow \infty$ . Выше построены лишь главные члены асимптотических разложений; эти построения можно продолжить и получить последующие члены. Данные о построенных асимптотических решениях сведены в таблицу, где для каждого случая указаны: значения  $\tau$ , при которых имеет место данный случай (в случае 7)  $t \rightarrow \infty$ ); соответствующие интервалы значений  $r^*$ ; предельные значения  $\alpha$ ; знаки величин  $r - r^*$ ; знаки величин  $\varphi - \varphi^*$ ; число  $N$  решений данного типа при фиксированных  $\alpha^*, r^*, \varphi^*$ ; номера формул, определяющие решение в данном случае; номера фигур, иллюстрирующих рассматриваемый случай и описанный в п. 3. Отметим, что знаки выражений  $r - r^*, \alpha - \alpha^*, \varphi - \varphi^*$  во всех случаях, кроме знаков  $\alpha - \alpha^*$

№	$\tau$	$r^*$	$\alpha$	$r - r^*$	$\varphi - \varphi^*$	$N$	Формулы	Фиг.
1	—	$(0, 1/2)$	$\pm 0$	—	$\pm$	$\infty$	(2.3), (2.13)	4, а, б
2	—	$1/2$	$-0$	—	$+$	$\infty$	(2.14)	4, в
3	—	$(1/2, 1)$	$-0$	—	$+$	$\infty$	(2.3), (2.15)	4, г
4	$+$	$(1, \infty)$	$-0$	$+$	$-$	1	(2.3), (2.15)	6, а
5	—	$(0, \infty)$	$\pi + 0$	$+$	$+$	1	(2.4), (2.17)	5, а, б, а
6	—	0	$\pi + 0$	$+$	$+$	1	(2.8), (2.18)	3, б
7	$-\infty$	1	$-0$	—	$+$	$\infty$	(2.20)—(2.22)	3, а, в

и  $\varphi - \varphi^*$  в случае 1), определяются однозначно из приведенных формул. В случае 1) имеется произвол ввиду свободы выбора постоянной  $C$ .

Характер построенных решений иллюстрируется на фиг. 2, где принято для определенности  $\varphi^* = 0$ .

Численное моделирование с высокой точностью подтвердило справедливость построенных асимптотических разложений. Отметим, что приведенные разложения можно использовать при численном интегрировании уравнений вблизи моментов остановки.

**3. Численное моделирование.** Для численного интегрирования системы (1.6) при начальных условиях (1.7) был создан пакет подпрограмм на языке PL/1 (0), позволяющий проводить моделирование движения в широком диапазоне изменения начальных данных из интервалов  $r_0 \in [0, \infty)$ ,  $v_0 \in [0, \infty)$ ,  $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ . Численное интегрирование осуществлялось как в прямом, так и в обратном времени с переменным шагом по времени по стандартной схеме Рунге — Кутты. Без нарушения общности принималось  $t_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ . При этом особое внимание уделялось траекториям с остановками. Результаты численного моделирования получались в виде графиков зависимостей  $r(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\varphi(t)$ , а также в виде траекторий движения точки во вращающейся и неподвижной декартовых системах координат.

Так, на приведенных ниже фиг. 3—7 сплошными кривыми показаны траектории точки  $P$  в неподвижной, а штриховыми — во вращающейся системах координат. Штрихпунктирной окружностью для наглядности изображена также граница зоны покоя  $r \leq 1$ .

На фиг. 3 представлены движения с остановками, траектории которых начинаются и оканчиваются либо на границе зоны покоя, либо в начале координат.

На фиг. 3, а показана траектория, начинающаяся в начале координат и оканчивающаяся на окружности единичного радиуса (границе зоны покоя). Соответствующие начальные данные таковы:

$$r_0 = 0, v_0 = v_{01} = 1,165, \alpha_0 = 0 \quad (3.1)$$

Значение  $v_{01}$  в (3.1) было подобрано так, чтобы точка  $P$  останавливалась при  $r \rightarrow 1$ , причем при  $t \rightarrow \infty$  здесь имеет место асимптотика для случая 7), см. формулы (2.20)—(2.22). При  $v_0 > v_{01}$ ,  $r_0 = 0$  точка уходит на бесконечность, а при  $v_0 < v_{01}$  она останавливается внутри круга  $r \leq 1$ .

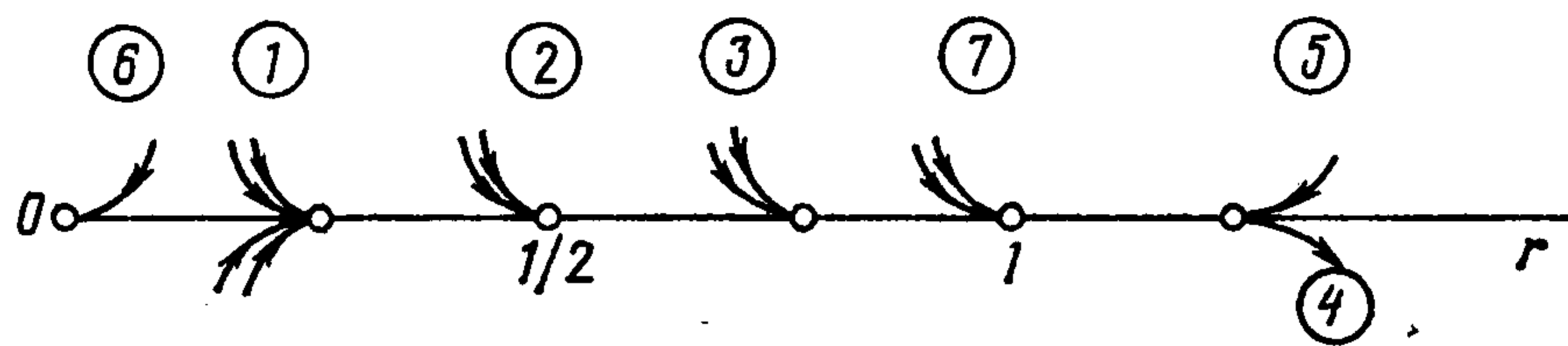
На фиг. 3, б показана траектория, начинающаяся на единичном круге и оканчивающаяся в начале координат. Соответствующие начальные данные, найденные путем интегрирования в обратном времени, таковы:

$$r_0 = 1, v_0 = v_{02} = 1,845, \alpha_0 = -135,80^\circ \quad (3.2)$$

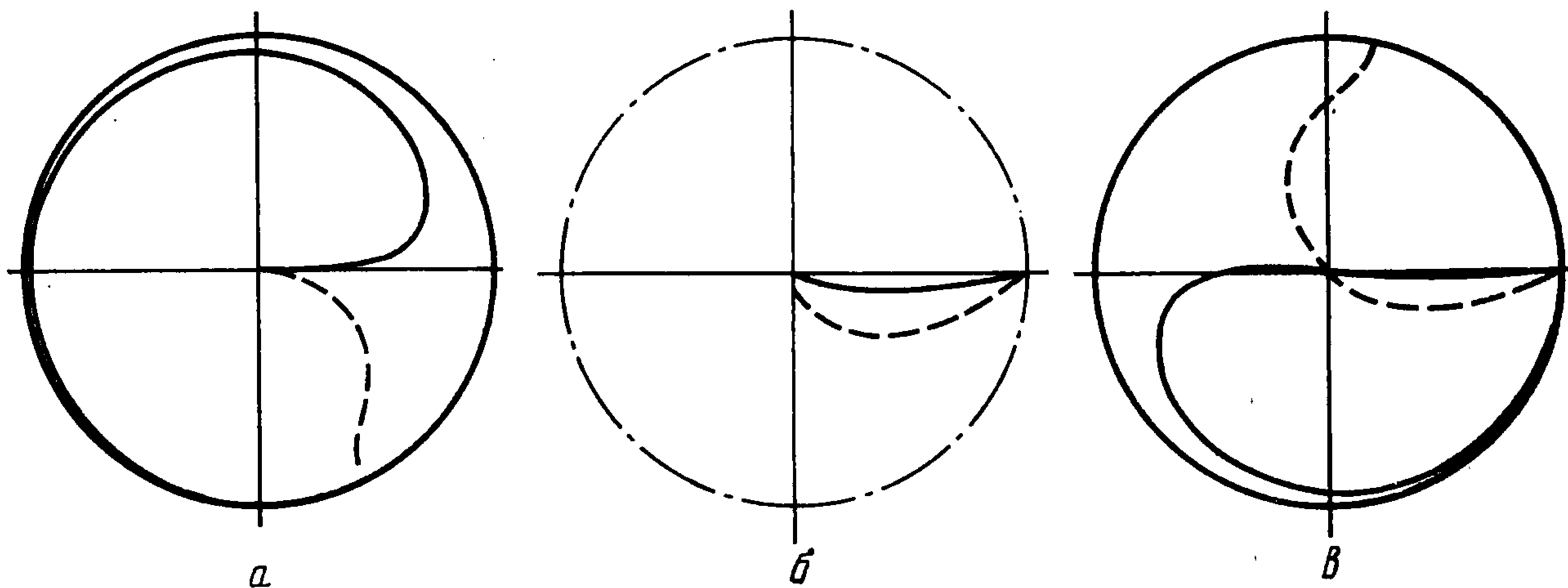
Остановка происходит в момент  $t^* = 1,4$ , причем при  $t \rightarrow t^*$  имеет место асимптотика для случая 6), см. (2.18).

На фиг. 3, в представлена траектория, начинающаяся на единичном круге, проходящая через начало координат с ненулевой скоростью, равной  $v_{01}$ , и оканчивающаяся на единичном круге согласно асимптотике для случая 7). Найденные путем интегрирования в обратном времени начальные данные здесь таковы:  $r_0 = 1$ ;  $v_0 = 2,12$ ;  $\alpha_0 = -148,08^\circ$ .

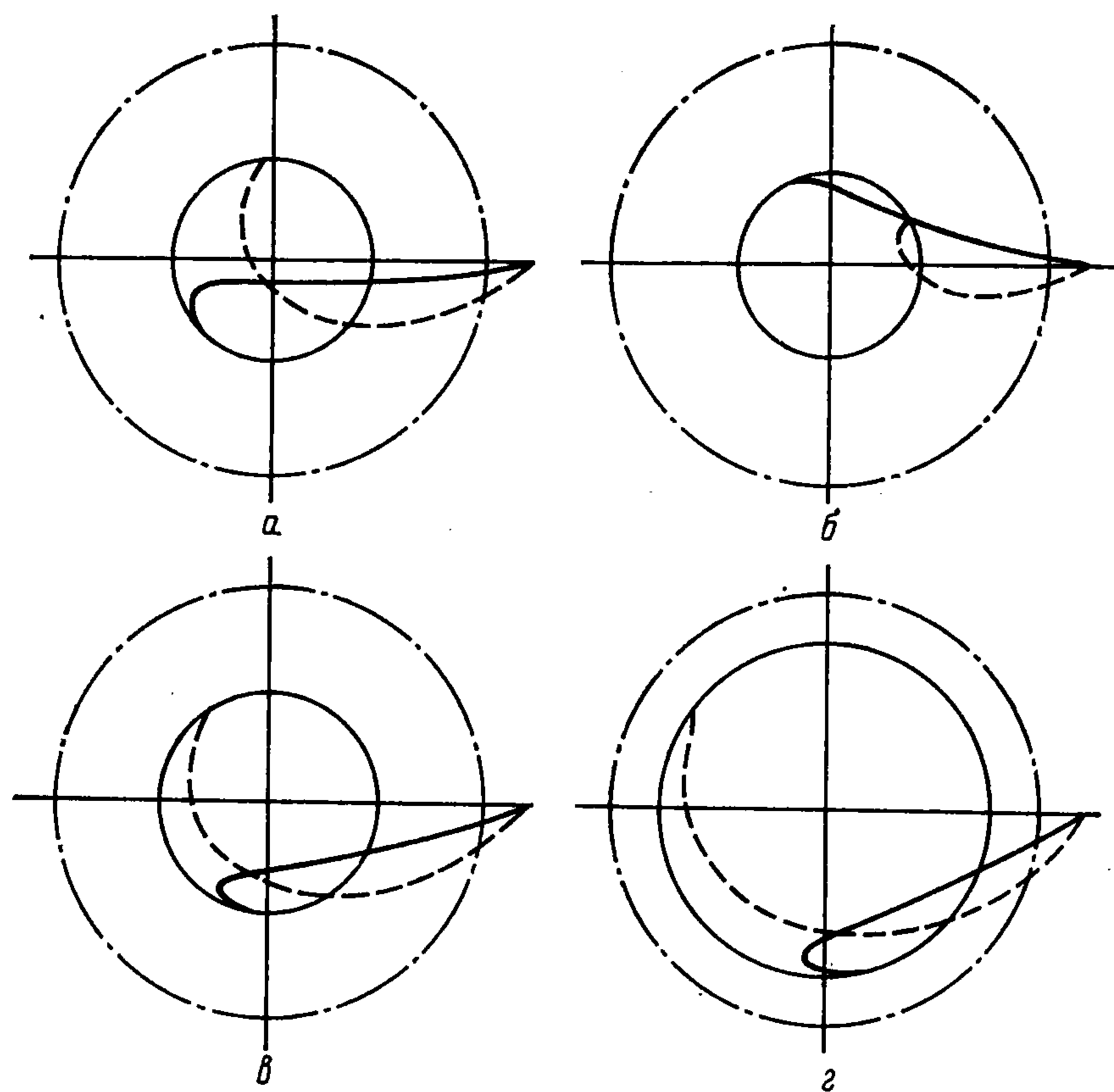
На фиг. 4 изображены движения с остановками внутри зоны покоя. На фиг. 4, а, б представлены траектории движения с остановками при  $r^* \in (0, 1/2)$ . Здесь для фиг. 4, а имеем  $\alpha(t^* - 0) < 0$ , а для фиг. 4, б  $\alpha(t^* - 0) > 0$  в соответствии с асимпто-



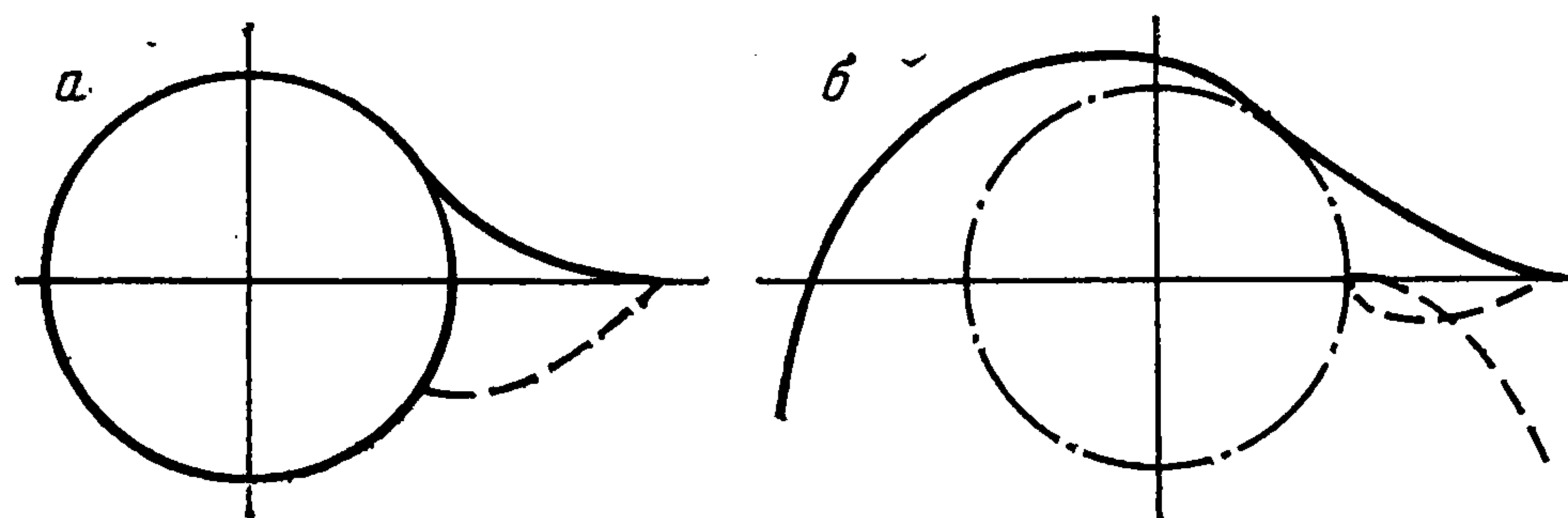
Фиг. 2



Фиг. 3

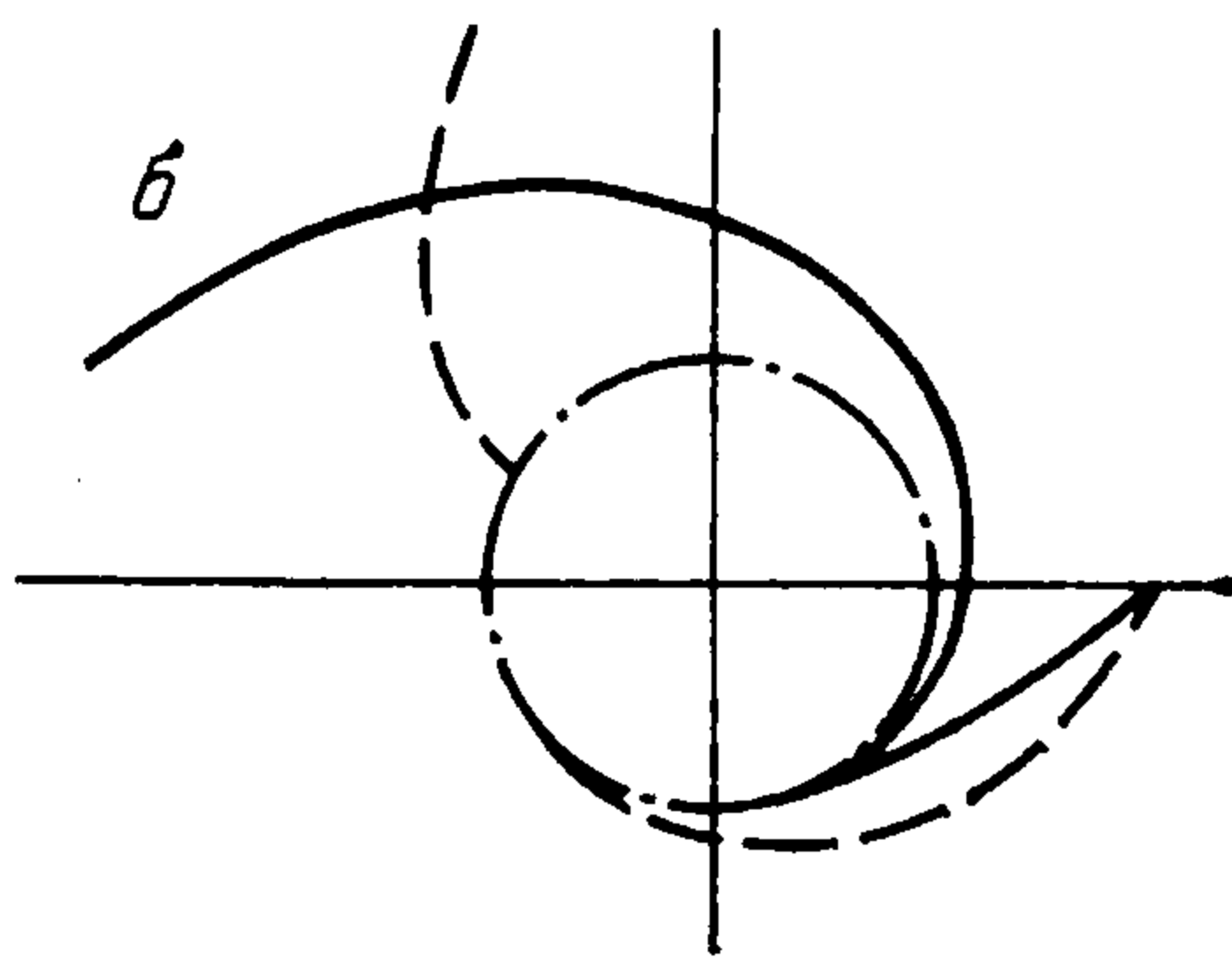
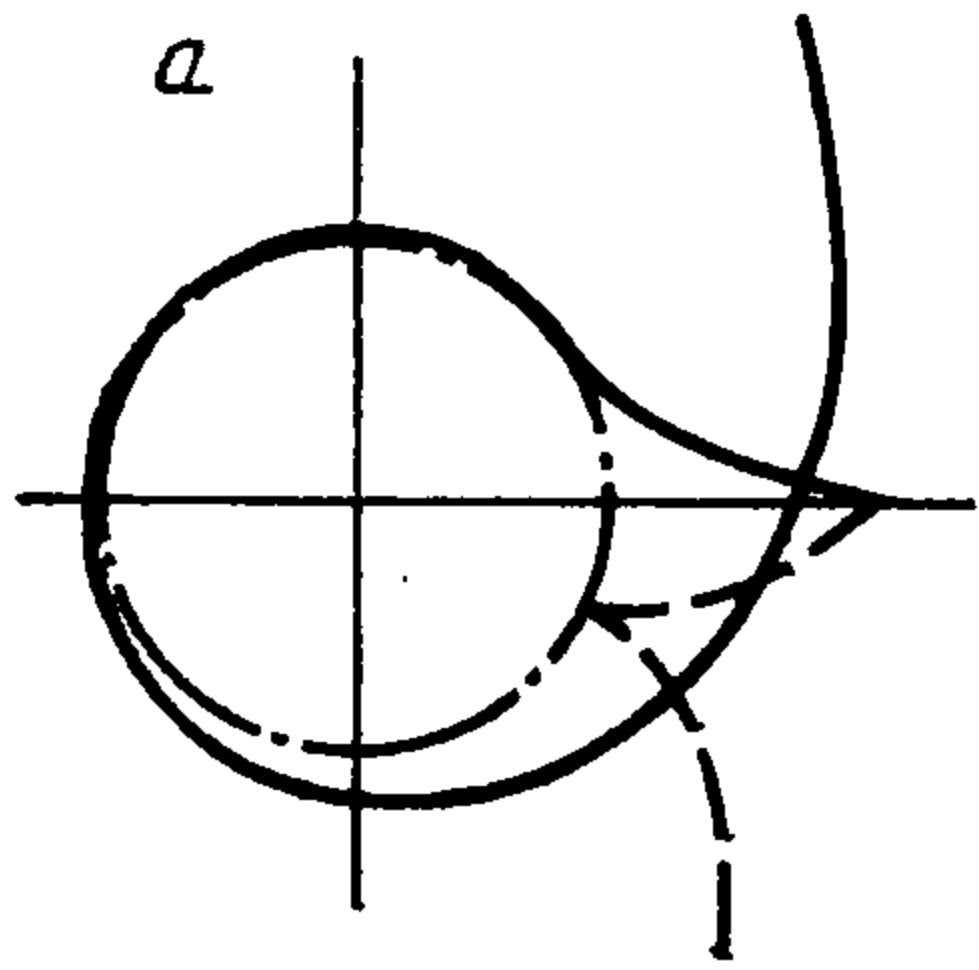


Фиг. 4

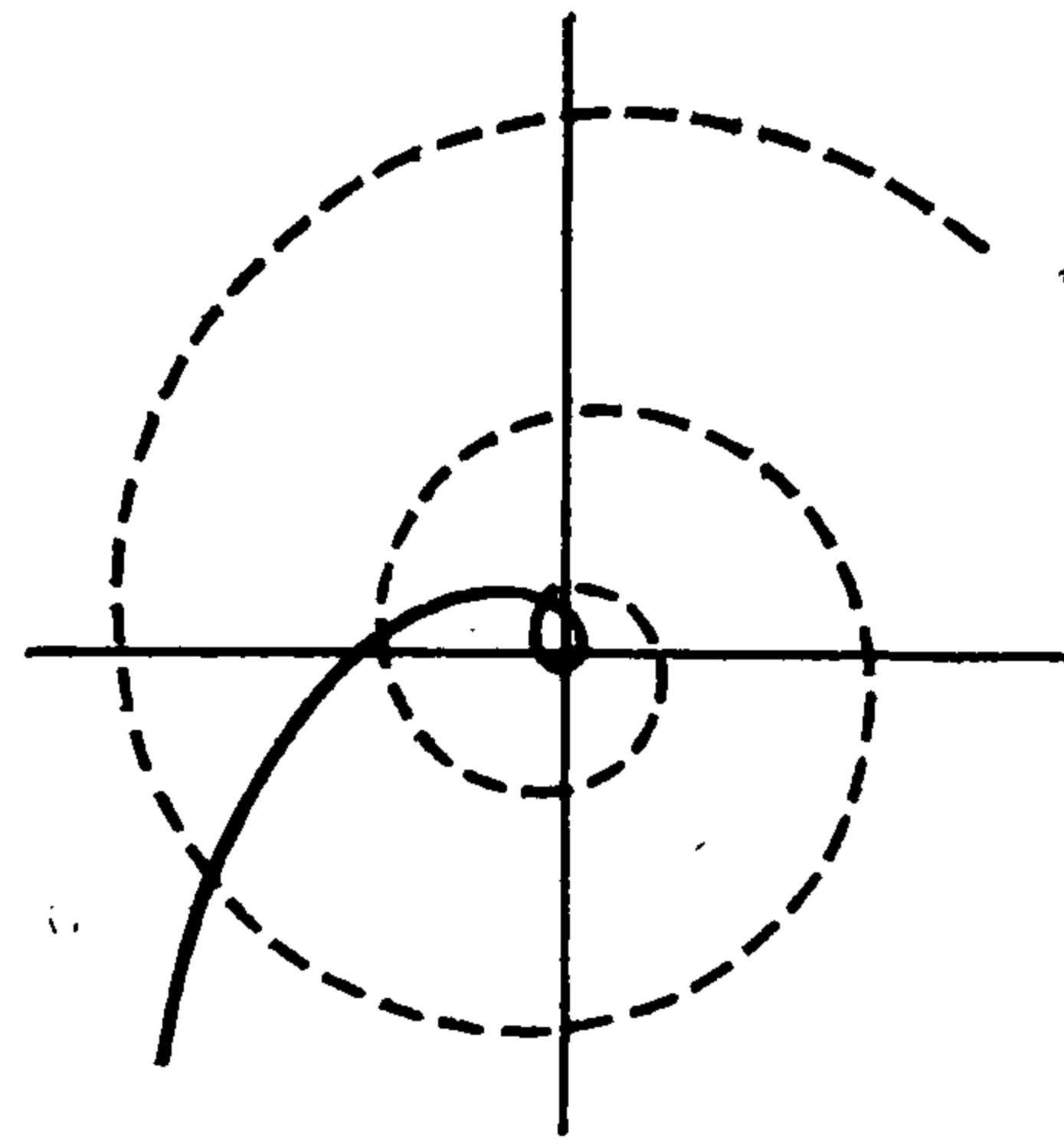


Фиг. 5

тикой для случая 1). Найденные путем интегрирования в обратном времени начальные данные для фиг. 4, а таковы:  $r_0 = 1,2$ ;  $v_0 = 2,21$ ;  $\alpha_0 = -140,11^\circ$ , а для фиг. 4, б имеем:  $r_0 = 1,2$ ;  $v_0 = 1,89$ ;  $\alpha_0 = -147^\circ$ . Фиг. 4, в иллюстрирует движение с остановкой при  $r^* = 1/2$  согласно асимптотике для случая 2). При этом начальные данные таковы:  $r_0 = 1,2$ ;  $v_0 = 2,40$ ;  $\alpha_0 = -131,17^\circ$ . На фиг. 4, г показана траектория с остановкой при  $r^* \in (1/2, 1)$  (асимптотика для случая 3)) при следующих начальных данных:  $r_0 = 1,2$ ;  $v_0 = 2,52$ ;  $\alpha_0 = -125^\circ$ .



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 5 представлены траектории, приближающиеся к зоне покоя снаружи. Фиг. 5, *a* представляет движение с остановкой на окружности единичного радиуса. Однако в отличие от фиг. 3, *a*, *в* здесь остановка происходит снаружи зоны покоя согласно асимптотике для случая 5). Соответствующие начальные данные таковы:  $r_0 = 2$ ;  $v_0 = 2,38$ ;  $\alpha_0 = -127^\circ$ . Следует отметить, что такое движение (с остановкой при  $\alpha^* = \pi + 0$ ) неустойчиво и незначительное изменение указанных выше начальных данных приводит к тому, что точка не достигает зоны покоя и уходит на бесконечность, как видно на фиг. 5, *б*, полученной при  $r_0 = 2$ ;  $v_0 = 2,3$ ;  $\alpha_0 = -145^\circ$ .

Фиг. 6 иллюстрирует движения с остановкой вне зоны покоя, после которой точка  $P$  продолжает двигаться и уходит на бесконечность. Фиг. 6, *a* отвечает случаю, когда остановка происходит во вращающейся системе координат ( $v = 0$  в некоторый момент  $t^*$ ), а фиг. 6, *б* — случаю обращения в нуль абсолютной скорости точки  $P$  (здесь  $v \neq 0$ ). Начальные данные для фиг. 6, *a* таковы:  $r_0 = 2$ ;  $v_0 = 2,4$ ;  $\alpha_0 = -125^\circ$ , а для фиг. 6, *б* имеем  $r_0 = 2$ ;  $v_0 = 3,5$ ;  $\alpha_0 = -115^\circ$ .

На фиг. 7 представлена траектория движения точки, при котором радиус и скорость стремятся к бесконечности при  $t \rightarrow \infty$ . Начальные условия для фиг. 7 выбраны в виде  $r_0 = 1$ ,  $v_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = 90^\circ$ . В работе [1] построено точное решение, уходящее на бесконечность, траекторией которого в неподвижной системе координат является логарифмическая спираль; показано также, что это решение является предельным для всех движений, уходящих на бесконечность. В подвижной системе координат асимптотика движений, уходящих на бесконечность, имеет вид

$$\begin{aligned} r &= (3\sqrt{2})^{-1}t^2 + \dots, & v &= (3\sqrt{2})^{-1}t^2 + \dots, & \alpha &= -\pi/2 + 2t^{-1} + \dots, \\ & & \varphi &= C - t + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

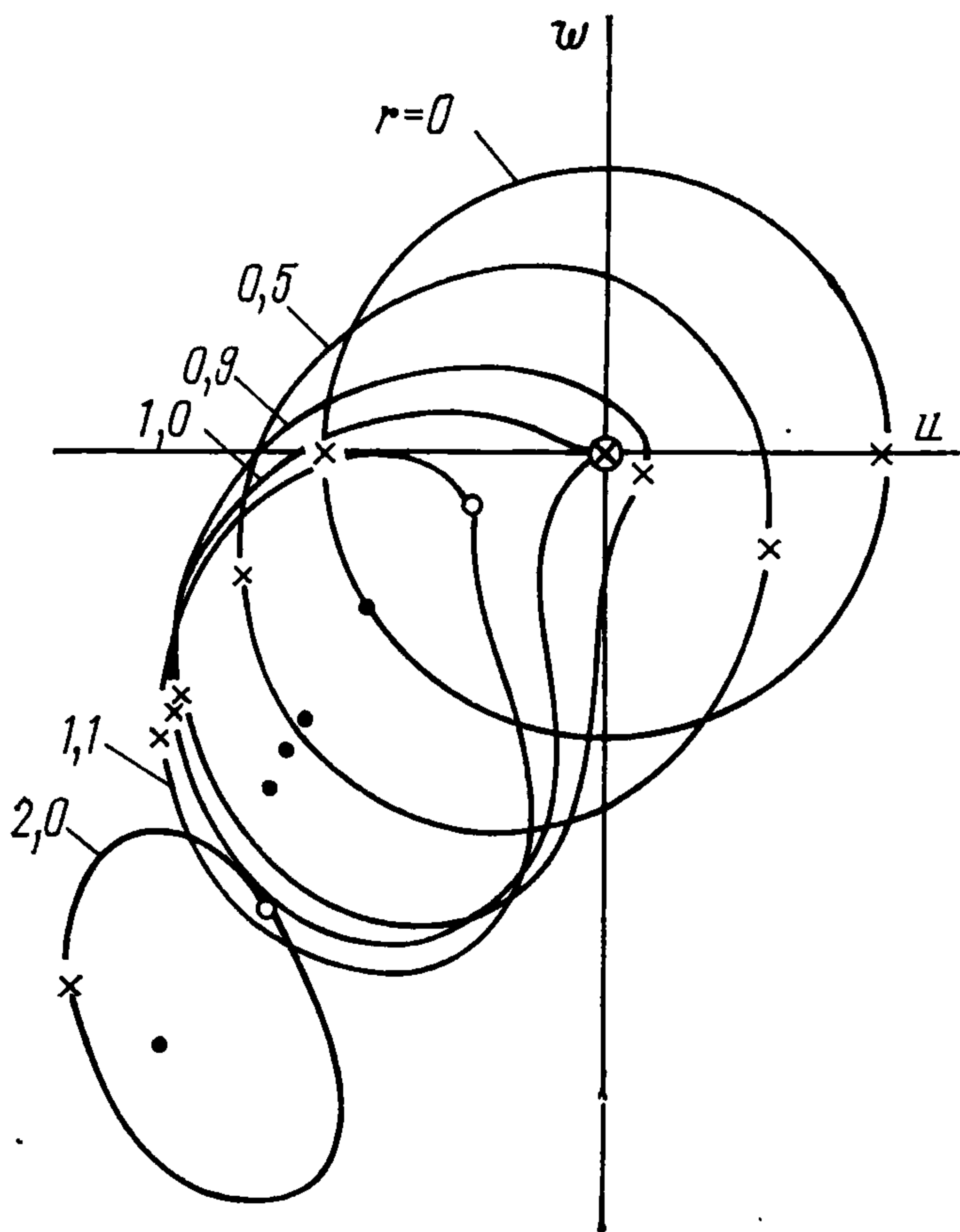
Построенное численное решение отвечает приведенной асимптотике.

**4. Разделяющее интегральное многообразие.** При любых начальных условиях движение точки  $P$  может быть отнесено к одному из двух типов: либо точка уходит на бесконечность согласно асимптотике (3.3), либо скорость точки  $P$  стремится к нулю, и она останавливается в круге  $r \leq 1$ . Для движений с остановками в круге  $r \leq 1$  имеет место одна из асимптотик, соответствующих случаям 1) — 3), 5) — 7).

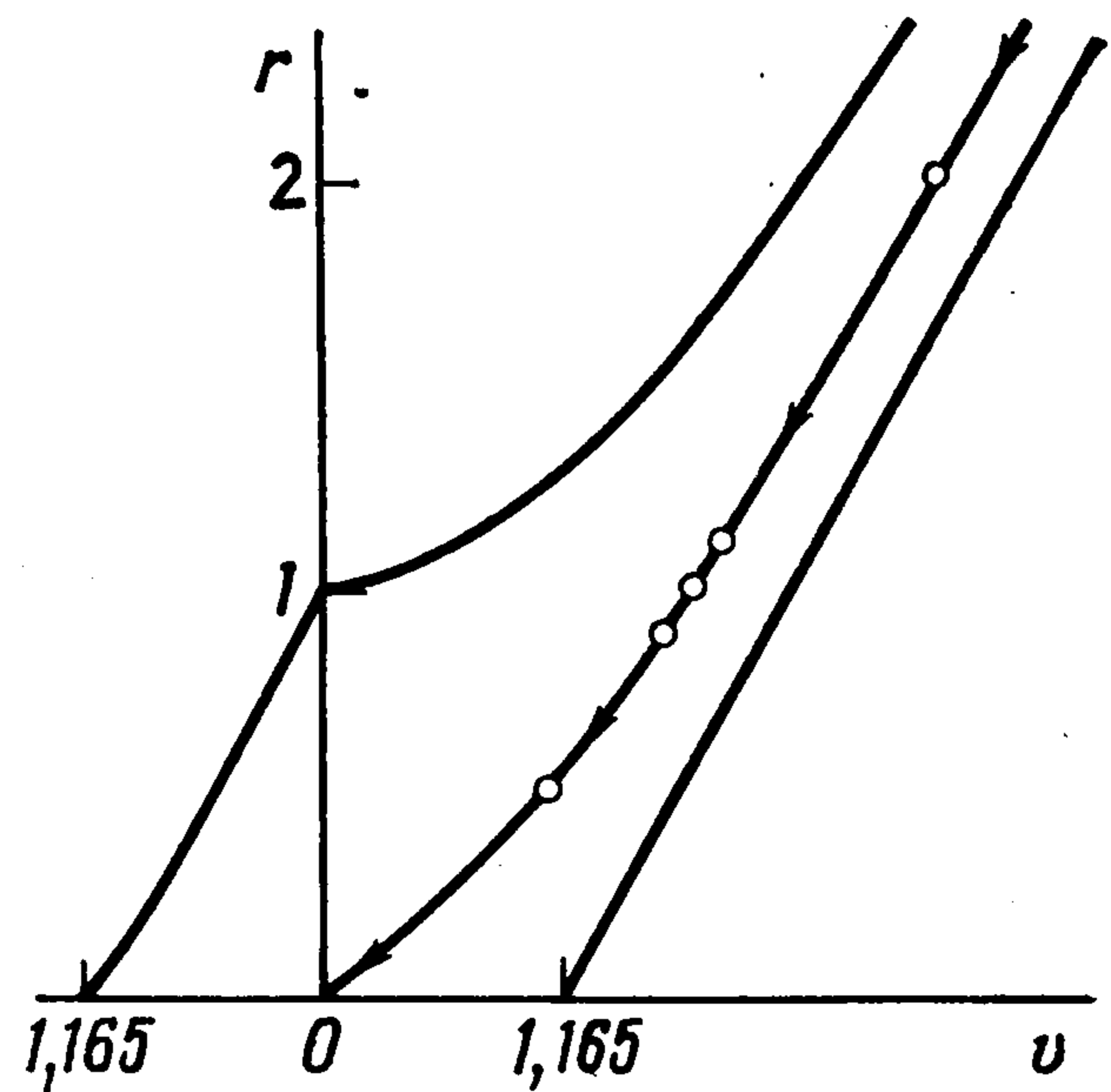
«Границей» между уходящими на бесконечность движениями и движениями с остановкой в круге  $r \leq 1$  являются движения, которые оканчиваются на окружности  $r = 1$ . Эти движения, как видно из таблицы, могут относиться к типам 5) или 7). В случае 5) точка приближается к окружности  $r = 1$  снаружи за конечное время, и для каждой точки этой окружности имеется лишь одна такая траектория. В случае 7) точка  $P$  приближается к окружности  $r = 1$  изнутри за бесконечное время, причем в каждую точку окружности входит бесконечное число траекторий.

Будем рассматривать движение точки  $P$  в трехмерном фазовом пространстве  $u, w, r$ , игнорируя циклическую переменную  $\varphi$  и обозначая

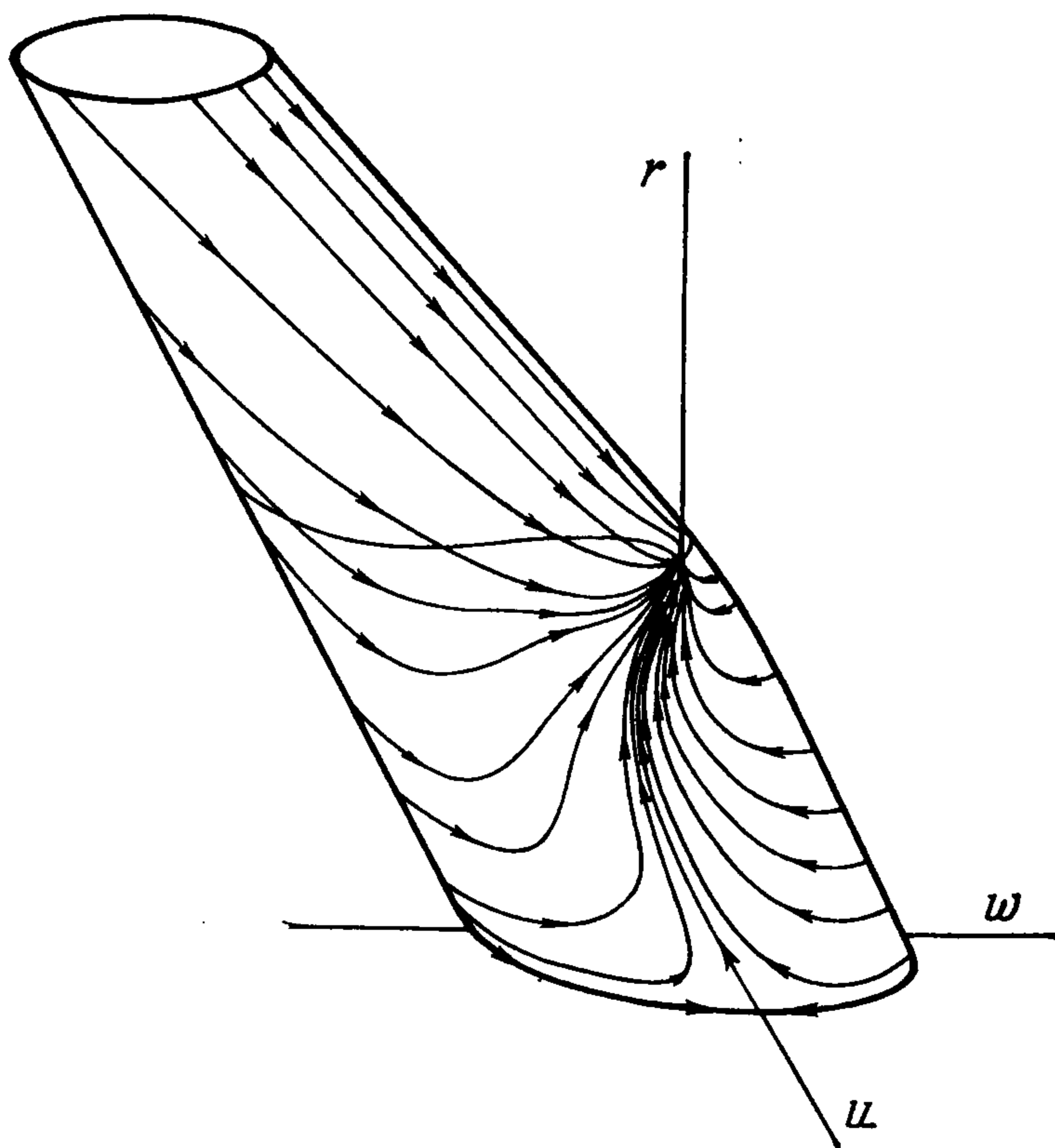
$$u = v \cos \alpha, \quad w = v \sin \alpha \quad (4.1)$$



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Переменные (4.1) равны проекциям относительной скорости точки  $P$  на радиус-вектор и перпендикуляр к нему соответственно. Область возможных движений в переменных  $u, w, r$  является полупространством  $r \geq 0$ .

Зафиксируем  $r$  и путем численного подбора найдем такие пары значений  $u, w$ , что начинающиеся при этих  $u, w, r$  движения завершаются на окружности  $r = 1$ . Таким образом получим сечения плоскостью  $r = \text{const}$  поверхности  $S$ , которая отделяет уходящие на бесконечность движения от движений с остановкой в круге  $r \leq 1$ . В результате многочисленных расчетов найдены сечения поверхности  $S$ ; они изображены на фиг. 8. Цифры у кривых указывают соответствующие значения  $r \geq 0$ . Области внутренние по отношению к этим кривым отвечают точкам, лежащим на траекториях с остановкой, внешние области — неограниченным движениям.

Особо на сечениях выделены точки, лежащие на траекториях, изо-

браженных на фиг. 3, б, в, 5, а. Точки, лежащие на траектории фиг. 3, в (с остановкой на границе зоны покоя и с проходом через начало координат), помечены крестиком. Точки траектории фиг. 5, а (остановка снаружи зоны покоя) помечены светлым кружком, а точки траектории фиг. 3, б — темным кружком. На фиг. 8 точки, отмеченные темным кружком, могут быть соединены кривой  $l$ , проходящей через начало координат. Эта кривая  $l$  — проекция траектории фиг. 3, б на плоскость  $uw$ .

На фиг. 9 жирными линиями изображено сечение поверхности  $S$  цилиндрической поверхностью с направляющей  $l$  и с образующими, параллельными оси  $r$ .

Сечение поверхности  $S$  плоскостью  $r = 0$  является, очевидно, кругом радиуса  $v_{01}$ , см. (3.1). С ростом  $r$  сечения перемещаются, деформируются и уменьшаются. Отметим, что при  $r \leq 1$  эти сечения содержат точку  $u = w = 0$ , так как при начальных данных  $v = 0$ ,  $r \leq 1$  точка  $P$  останется в покое. При  $r > 1$  сечения уже не содержат начала координат плоскости  $uw$ .

Вся поверхность  $S$  состоит из фазовых траекторий: если начальная точка лежит на  $S$ , то и вся траектория лежит на  $S$ . Картина этих фазовых траекторий, полученная в результате расчетов, изображена на фиг. 10 в пространстве  $(u, w, r)$ . Стрелками на траекториях указано направление изменения времени.

Сама поверхность  $S$ , т. е. множество ее сечений, была получена следующим образом. Сначала методом подбора  $v_0$  и  $\alpha_0$  при  $r = 1,2$  в диалоговом режиме было построено сечение  $K_0$  путем графической интерполяции и сглаживания более чем 100 точек. Затем из 50 точек этой кривой численным интегрированием были выпущены траектории в прямом и в обратном времени. Первые из них позволили построить сечения (с шагом  $\Delta r = 0,1$ ) при  $r \leq 1,2$  и, таким образом, сформировать нижнюю часть поверхности  $S$ . Траектории, выпущенные из точек сечения  $K_0$  в обратном времени, позволили получить сечение при  $r > 1,2$  и тем самым полностью построить вид интегрального многообразия. Затем были изображены и сами траектории, образующие поверхность  $S$ .

Как видно из фиг. 10, все траектории, начинающиеся на  $S$ , оканчиваются в особой точке с координатами  $u = w = 0$ ,  $r = 1$ , отвечающей остановке на границе зоны покоя. Только одна траектория, входит в особую точку сверху. Она соответствует асимптотике случая 5) — остановке снаружи зоны покоя. Все остальные траектории пересекают сечение  $r = 1$  и подходят к особой точке снизу. При этом траектории, лежащие по одну сторону от штриховой, соответствуют входу в зону покоя с  $0 < \alpha < \pi$ , а по другую — с  $\pi < \alpha < 2\pi$ .

Существует еще одна особая траектория на поверхности  $S$  — сепаратриса, отвечающая движению фиг. 3, в. Она попадает на сечение  $r = 0$  и затем мгновенно (за  $\Delta t = 0$ ) перескакивает из точки  $(-1,165; 0; 0)$  в точку  $(1,165; 0; 0)$ , что соответствует проходу точки  $P$  через начало координат, при котором  $|\Delta\alpha| = \pi$ . Затем сепаратриса, как видно из фиг. 10, входит в особую точку  $(0, 0, 1)$ . Все остальные траектории разделяются этой сепаратрисой на две группы.

Таким образом, дано описание всех траекторий движений с остановками, образующих интегральное многообразие.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В. Ф., Ишлинский А. Ю. Метод подобия в задачах динамики точки. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 6—12.  
Москва

Поступила в редакцию  
16.VI.1988