Количественная оценка критического размера пузырька в воде и глицерине по данным, использовавшимся в [2], дает в рассматриваемом случае в силу слабой зависимости Re* от δ значения, близкие к найденным в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh Lord.* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // Phil. Mag. 1917. Ser. 6. V. 34. № 200. P. 94—98.
2. *Забабахин Е. И.* Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1129—1131.
3. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. Л.: Судпромгиз, 1963. 335 с.
4. *Левковский Ю. Л., Ильин В. П.* Влияние поверхностного натяжения и вязкости жидкости на замыкание кавитационной каверны // Инж.-физ. журн., 1968. Т. 14. № 5. С. 903—908.
5. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

Одесса

Поступила в редакцию 21.VII.1988

УДК 539.3 : 534.1

Т. Г. Румянцева, М. Г. Селезнев, М. В. Чепиль

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЬЮ

Рассматривается динамическая контактная задача для двуслойного упругого полупространства с заглубленной цилиндрической полостью. При построении решения используется принцип суперпозиции, позволяющий свести краевую задачу к системе интегральных уравнений, для решения которой в случае относительно сильного заглубления полости в подстилающее полупространство используется метод последовательных приближений. На каждом этапе применения метода строится решение интегрального уравнения первого рода, оператор которого соответствует решению контактной задачи для двуслойного полупространства без полости. Свободный член интегрального уравнения представляет собой ряд по степеням малого параметра, определяющего отношение длины волны к величине заглубления центра полости. При реализации изложенного алгоритма решение сингулярного интегрального уравнения строится с использованием приближенной факторизации функций. Проводится исследование степени влияния полости на закон распределения и величину контактных напряжений под штампом.

Рассмотрим задачу о возбуждении антиплоских установившихся гармонических колебаний в упругом двуслойном полупространстве с горизонтальной цилиндрической полостью относительно малого радиуса. Предполагается, что полость полностью расположена в подстилающем полупространстве. Сформулируем соответствующую краевую задачу. Пусть упругая среда занимает в декартовой безразмерной системе координат xyz область

$$x \geqslant -H \cup R = \sqrt{(\varepsilon^{-1} - x)^2 + y^2} \geqslant 1, \quad \varepsilon = a/h$$

характеризуемую значениями плотности и коэффициентов Ламе ρ_1, λ_1, μ_1 при $x \geqslant 0$ и ρ, λ, μ при $-H \leqslant x \leqslant 0$. Размерные координаты получаем умножением безразмерных на радиус полости a; h — величина заглубления центра полости в полупространство.

На границе упругой среды заданы условия

$$x = -H, \quad u_z = f(y)\, e^{-i\omega t}, \quad y \in I; \ \tau_{xz} = 0, \ y \overline{\in} I, \quad I = [c - b, \ c + b] \qquad (1)$$
$$R = 1, \quad \tau_{Rz} = \tau(\varphi)\, e^{-i\omega t}$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии упругих волн. Движение среды описывается уравнениями Ламе [1].

Решение контактных задач теории упругости в существенной степени опирается на исследование соответствующих задач с однородными граничными условиями. Решение однородной задачи для двуслойного полупространства с полостью, относительно заглубленной в полупространство, строится с использованием принципа суперпозиции [2] и позволяет провести анализ соответствующей краевой задачи со смешанными граничными условиями на плоской поверхности.

Обозначим неизвестные контактные напряжения

$$\tau_{xz} = \begin{cases} t(y)\, e^{-i\omega t}, & y \in I \\ 0, & y \overline{\in} I \end{cases} \qquad (2)$$

Задача с однородными граничными условиями на плоской и цилиндрической границах сводится к системе двух интегральных уравнений, через решение которой описывается поле смещений во всей упругой области.

$$\bar{X}(\alpha) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m L_m(\alpha) = \bar{T}(\alpha), Y(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \bar{X}(\alpha) K(\varphi, \alpha)\, d\alpha = \tau(\varphi) \qquad (3)$$

$$\bar{X}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} X(y)\, e^{i\alpha y}\, dy, \qquad Y_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\varphi)\, e^{-im\varphi}\, d\varphi$$

$$K(\varphi, \alpha) = [\cos\varphi + i\alpha\sigma_1^{-1} \sin\varphi] \exp[-\sigma_1(\varepsilon^{-1} - \cos\varphi) + i\alpha \sin\varphi]$$

$$L_m(\alpha) = \frac{\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma H}{\Delta_m \delta(\alpha)} K_m(\alpha), \qquad \sigma = \sqrt{\alpha^2 - \theta^2}, \qquad \sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 - \theta_1^2}$$

$$K_m(\alpha) = \bar{K}_{1m}(\alpha) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma\sigma H_m^{(1)}\left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}\right) \operatorname{th}\sigma H \times$$

$$\times \exp[-im \operatorname{arctg}(\varepsilon y) + i\alpha y]\, dy$$

$$\bar{K}_{1m}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\left[\frac{m\varepsilon}{\theta_1\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}} H_m^{(1)}\left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \theta_1 H_{m+1}^{(1)}\left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}} +$$

$$\left. + \frac{im\varepsilon^2 y}{1 + \varepsilon^2 y^2} H_m^{(1)}\left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}\right)\right\} - \exp[-im \operatorname{arctg}(\varepsilon y) + i\alpha y]\, dy$$

$$\bar{T}(\alpha) = \frac{\sigma_1 \bar{t}(\alpha)}{\delta(\alpha) \operatorname{ch}\sigma H}, \quad \theta = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad \theta_1 = \omega a \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}}, \quad \gamma = \frac{\mu}{\mu_1}$$

$$\Delta_m = m H_m^{(1)}(\theta_1) - \theta_1 H_{m+1}^{(1)}(\theta_1), \quad \delta(\alpha) = \sigma_1 \operatorname{ch}\sigma H + \gamma\sigma \operatorname{sh}\sigma H$$

Поле перемещений в упругой среде описывается через решение системы (3) соотношениями вида

$$u_z = u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, \quad x \geqslant 0 \cup R \geqslant 1 \qquad (4)$$

$$u_z = u_z^{(3)}, \quad -H \leqslant x \leqslant 0$$

$$u_z^{(1)}(x, y) = -\frac{a}{2\pi\mu_1} \int_{\Gamma} \bar{X}(\alpha)\, \sigma_1^{-1} \exp[-\sigma_1 x - i\alpha y]\, d\alpha$$

$$u_z^{(2)}(R, \varphi) = \frac{a}{\mu_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m \Delta_m^{-1} H_m^{(1)}(\theta_1 R) \exp(im\varphi)$$

$$u_z^{(3)}(x, y) = -\frac{a}{2\pi\mu_1} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha y}}{\sigma \operatorname{sh}\sigma H} [\bar{t}(\alpha) \operatorname{ch}\sigma x - \bar{Z}(\alpha) \operatorname{ch}(\sigma[x + H])]\, d\alpha$$

$$\bar{Z}(\alpha) = \frac{\sigma_1 \bar{t}(\alpha)}{\delta(\alpha)} - \frac{\gamma\sigma \operatorname{sh}\sigma H}{\delta(\alpha)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m \left\{\bar{K}_{1m}(\alpha) - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_m^{-1} \sigma_1 H_m^{(1)}\left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}\right) \exp[i(m \operatorname{arctg}(-\varepsilon y) + \alpha y)]\, dy\right\}$$

Вид контура Г определяется применением принципа предельного поглощения и описан в [2, 3].

Возвращаясь к исходной краевой задаче со смешанными граничными условиями (1), имеем в системе (3) неизвестную функцию $t(y)$, характеризующую закон распределения контактных напряжений, т. е. получили систему двух интегральных уравнений с тремя неизвестными $t(y)$, $X(y)$, $Y(\varphi)$. Для замыкания системы используем первое граничное условие (1). В результате, с учетом (4), получаем третье интегральное уравнение, замыкающее систему (3) $u_z^{(3)} = u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, \quad x = 0.$ (5)

Разрешая первое уравнение (3) относительно $\overline{X}(\alpha)$ и подставляя полученное значение в (5), запишем последнее уравнение в виде

$$\int_\Gamma \bar{t}(\alpha) M(\alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha = \frac{2\pi}{a} f(y) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m \int_\Gamma M_m(\alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha \tag{6}$$

$$M(\alpha) = -[\gamma\sigma \operatorname{ch} \sigma H + \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma H]/[\mu\sigma\delta(\alpha)] \tag{7}$$

$$M_m(\alpha) = -\frac{\gamma}{\mu\delta(\alpha)} \left[K_m(\alpha) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_1}{\Delta_m} H_m^{(1)}\left(\frac{\theta_1}{\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon^2\eta^2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\{-i[m \operatorname{arctg}(\varepsilon\eta) - \alpha\eta]\} d\eta\right], \quad y \in I$$

Остановимся на свойствах системы (3), (6) при $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon/\theta \ll 1$. В этом случае оператор системы (3) будет вполне непрерывен и мал при достаточно малом ε. Уравнение (6) в левой части содержит интегральный оператор, в точности соответствующий оператору интегрального уравнения контактной задачи для упругого двуслойного полупространства без полости [4]. Операторы правой части (6) вполне непрерывны и малы в рамках введенных ограничений.

Указанные свойства системы (3), (6) позволяют при ее решении применять метод последовательных приближений. В первом приближении из уравнений (3) следует

$$\overline{X}(\alpha) = \bar{t}(\alpha) - O(\sqrt{\varepsilon}), \quad Y(\varphi) = \tau(\varphi) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

Подставляя полученные значения в правую часть (6) и удерживая главные члены разложения, получаем для определения $t(y)$ в первом приближении интегральное уравнение первого рода

$$\int_\Gamma \bar{t}(\alpha) M(\alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha = \frac{2\pi}{a} f(y), \quad y \in I \tag{8}$$

к которому сводится решение контактной задачи для двуслойного полупространства без полости [4].

Существуют эффективные методы построения решения уравнений указанного типа [3, 5, 6]. Воспользуемся для построения решения методом [4]. По результатам расчетов аппроксимируем в первом приближении $t_0(y)$ с заданной степенью точности выражением вида

$$t_0(y) = t_0 \frac{p(y_*)}{\sqrt{b^2 - y_*^2}}; \quad p(y_*) = \sum_{j=0}^{N} p_j y_*^{\,j}, \quad y_* = y - c, \quad t_0 = \text{const}$$

Тогда

$$\bar{t}_0(\alpha) = \pi t_0 e^{i\alpha c} \sum_{k=0}^{N} p_k (-1)^k \frac{d^k}{d\alpha^k} [J_0(\alpha b)]$$

Подставляя полученное значение $\bar{t}_0(\alpha)$ в правую часть (3), во втором приближении имеем

$$Y_m \cong \tau_m + \sqrt{\frac{\varepsilon\theta_1}{2\pi}} \left\{ \overline{T}(\alpha_0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k(\alpha_0) \tau_k \right\} e^{-i\pi/4} \times$$
$$\times \left[\left(1 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\theta_1^2 - \alpha_0^2}}\right) J_{m-1}(\theta) - \left(1 - \frac{\alpha_0}{\sqrt{\theta_1^2 - \alpha_0^2}}\right) J_{m+1}(\theta)\right] \frac{(-i)^{m-1}}{2} + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$\overline{X}(\alpha) = \overline{T}(\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m L_m(\alpha), \quad \alpha_0 = -\frac{\theta_1 \varepsilon y}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}}$$

Подставляя последнее выражение для $\bar{t}_0(\alpha)$ в правую часть (6), приходим к необходимости решения уравнения (8) с измененной правой частью, равной

$$f_1(y) = \frac{2\pi}{a}(f - y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m M_m^*(y)$$

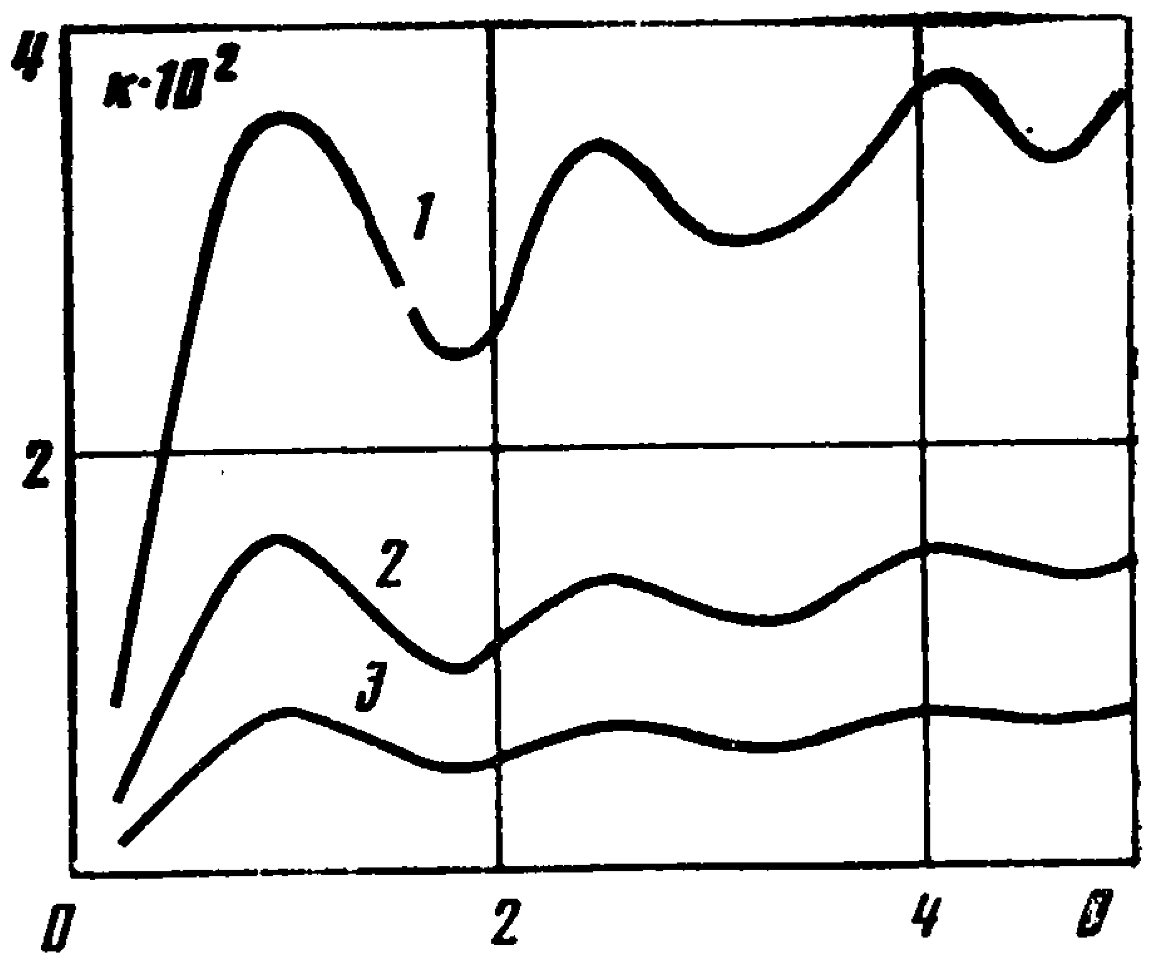
$$M_m^*(y) = -\frac{2i\sqrt{2\varepsilon\theta_1/\pi}}{\mu_1\Delta_m\delta(\alpha_0)}(1+\varepsilon^2y^2)^{-1/4}\exp\left\{i\left[m\,\mathrm{arctg}(-\varepsilon y) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \theta_1\varepsilon^{-1}\sqrt{1+\varepsilon^2y^2} - \left(\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi\right]\right\} + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$L_m(\alpha) = -2i\,\frac{-\sigma_1\,\mathrm{ch}\,\sigma H + \gamma\sigma\,\mathrm{sh}\,\sigma H}{\Delta_m\delta(\alpha)} \times$$

$$\times \exp\left\{i\left[\varepsilon^{-1}\sqrt{\theta_1^2-\alpha^2} - \frac{m\pi}{2} + m\,\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{\theta_1^2-\alpha^2}}\right]\right\} + O(\varepsilon)$$

Таким образом, применение метода последовательных приближений приводит к необходимости на каждом этапе процесса строить решение сингулярного интегрального уравнения первого рода, к которому сводится соответствующая краевая задача для двуслойного упругого полупространства без полости, операторная часть которого не изменяется от приближения к приближению, а меняется только свободный член. Поправочные члены имеют возрастающий от приближения к приближению порядок малости, определяющийся практически из решения однородной задачи для соответствующей области.



Следует отметить, что при $H = 0$ все приведенные выше выражения вырождаются в соответствующие выражения задачи для однородного полупространства. Последнее позволяет проводить расчеты поправочных слагаемых в правой части уравнения (8) для обеих задач по единой программе. Существенное отличие свойств подынтегральной функции ядра этого уравнения определяет применение единого подхода к построению решения (например, 3). Однако при его практической реализации, особенно на стадии построения приближенной факторизации, требуется учет конкретных особенностей ядра, определяющих основные физические свойства решения (наличие особенностей на вещественной оси, области комплексности подынтегральной функции и др.).

Изложенная схема решения краевой задачи реализована на ЭВМ прикладными программами, позволившими провести анализ степени влияния полостей относительно малого радиуса на распределение контактных напряжений под штампом. На фигуре дана относительная погрешность решения k, обусловленная наличием полости, в зависимости от безразмерной частоты колебаний при заглублениях полости $h = 20, 50, 100$ (кривые *1*, *2*, *3* соответственно).

Следует отметить, что при достаточном удалении полости от границы раздела слоя и полупространства ($\varepsilon/\theta_1 < 0{,}1$) и относительно малой зоне контакта ($\varepsilon^{-1}\theta_1 \gg h\theta$) поправочное слагаемое правой части уравнения (8) практически не приводит к искажению закона изменения свободного члена от координаты y. Изменяется только величина множителя при $f(y)$, что определяет возмущение величины контактных напряжений при незначительном искажении закона их распределения в области контакта от приближения к приближению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Воробьева С. О., Ляпин А. А., Селезнев М. Г.* Задача об установившихся гармонических антиплоских колебаниях двуслойного упругого полупространства с цилиндрической полостью // ПМТФ. 1986. № 4. С. 123—127.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. *Селезнев М. Г.* Возбуждение волн в двуслойной среде колеблющимся штампом // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 381—384.
5. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка. 1976. 283 с.
6. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
14.IV.1988