УДК 532.528

А. В. Кононов

К ВОПРОСУ О СХЛОПЫВАНИИ КАВИТАЦИОННЫХ КАВЕРН

Исследуется роль капиллярных свойств среды в моделирующей стадию схлопывания кавитационных пузырьков задаче о замыкании пустой сферической полости в вязкой несжимаемой жидкости. Методами качественной теории изучается дифференциальное уравнение, описывающее динамику границы полости. Получена картина поведения интегральных кривых в фазовой плоскости, на основании которой дается полное описание всех возможных режимов схлопывания каверны.

Задача о заполнении пустой сферической полости в идеальной несжимаемой жидкости была рассмотрена Релеем [1], показавшим, что скорость жидкой границы каверны при уменьшении ее радиуса R до нуля неограниченно возрастает как $R^{-3/2}$. При этом время исчезновения полости всегда конечно.

Учет вязкости жидкости [2] приводит к выводу о существовании критического числа Рейнольдса Re*, разделяющего два принциниально различных режима заполнения каверн. При $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$ характер движения аналогичен случаю Релея. Главный член разложения скорости V границы полости при $R \to 0$ равен $CR^{-3/2}$, но с меньшим, чем в [1], значением постоянной C. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$ кумулятивный эффект отсутствует, жидкость вблизи фокуса замедляется по закону $V \sim R$, а замыкание каверны длится неограниченно долго. Промежуточному случаю $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}^*$ при $R \to 0$ отвечает возрастание модуля $V \sim R^{-1}$ и конечное время замыкания полости.

В действительности, граница каверны, будучи поверхностью раздела фаз, обладает еще и некоторым поверхностным натяжением σ. Рассмотрим задачу Релея с учетом этого фактора, а также вязкости жидкости, предполагая, как и в [1, 2], полость пустой. Интерес к задаче в такой постановке связан с использованием ее при моделировании процесса схлопывания кавитационных пузырьков [3]. Отметим, что численное исследование [3, 4] указало на существование нескольких режимов схлопывания. Однако оно не выявило общих закономерностей, присущих рассматриваемому классу движений. Полное выяснение этих закономерностей — цель данного исследования.

При сделанных выше предположениях динамика границы схлопывающегося пузырька может быть описана следующей задачей Коши в безразмерных переменных:

$$ux\frac{du}{dx} + \frac{3}{2}u^2 + 4\frac{u}{x} + 2\frac{\delta}{x} + 1 = 0, \quad u(\mathrm{Re}) = 0 \tag{1}$$

$$u = V\sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}}, \quad x = \frac{R}{R_0}\mathrm{Re}, \quad \mathrm{Re} = \frac{R_0}{\mu}\sqrt{\rho p_\infty}, \quad \delta = \frac{\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}}$$

Здесь R_0 — начальный радиус пузырька, p_∞ — давление в жидкости на бесконечности, ρ — плотность, μ — коэффициент динамической вязкости, Re — число Рейнольдса.

Число δ, равное произведению чисел Вебера и Рейнольдса задачи, характеризует баланс поверхностных и вязких сил на границе полости.

Заменой $y = u^{-1}$ уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\frac{3}{2} + 4\frac{y}{x} + 2\delta\frac{y^2}{x} + y^2\right] \tag{2}$$

причем для фазы схлопывания физический смысл имеет только область

$$y \leqslant 0, \ x \geqslant 0 \tag{3}$$

плоскости переменных x, y.

Считая число Рейнольдса конечным (вязкая жидкость), исследуем влияние числа δ (поверхностного натяжения) на замыкание сферической полости.

В случае $\delta = 0$ ($\sigma = 0$), рассмотренном в [2], уравнение (2) имеет единственную конечную особую точку O (0, 0) сложного (седлоузлового) характера, причем окрестность точки O, принадлежащая области (3), содержит по одному сектору каждого типа. Сепаратриса точки O, их разделяющая, отвечает критическому значению $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}^*$, а принадлежность интегральной кривой уравнения (2) узловому (седловому) сектору определяется условием $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$ ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$). О характере движения жидкости в каждом из трех указанных случаев уже говорилось выше.

При $\delta > 0$ ($\sigma \neq 0$) в уравнении (2) появляется вторая сложная особая точка A $(0, -2/\delta)$, а характер особенности в точке O, как легко показать, идентичен случаю $\delta = 0$.

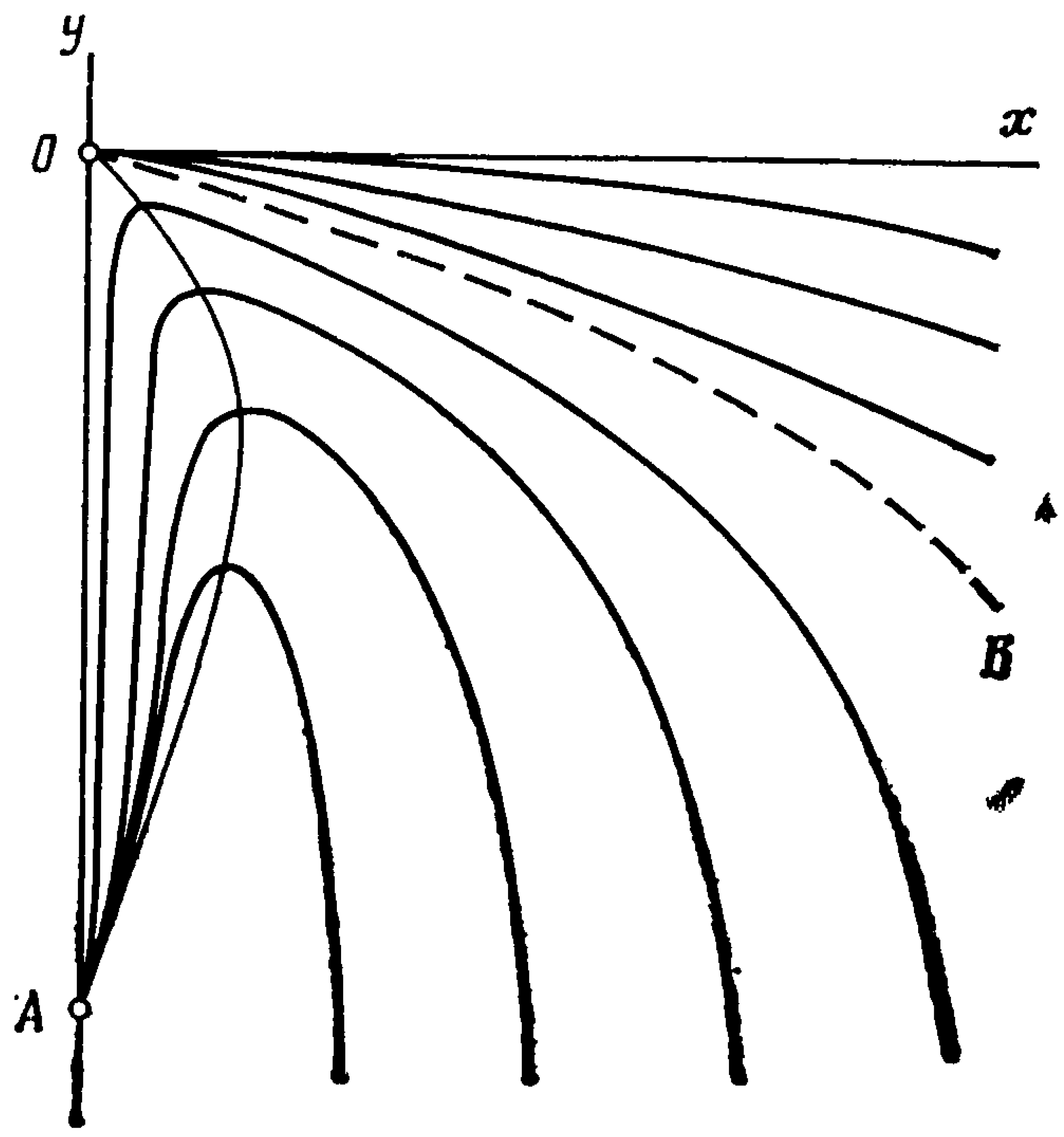
Исследуем тип особой точки A. Заменой переменной

$$\zeta = a\,(y - y_A) + bx,\ y_A = -2/\delta$$
$$a = -4y_A,\ b = y_A\,({}^3/_2 + y_A{}^2)$$

уравнение (2) приводится к канонической форме [5]

$$d\zeta/dx = (a\zeta + \varphi\,(x, \zeta))/x^2 \qquad (4)$$

где разложение φ в окрестности нуля начинается с членов не ниже второго порядка. Из вида уравнения (4) следует, что рассматриваемая особенность является простейшим седло-узлом [5], содержащим два седловых и один узловой сектор. В силу условия $a > 0$, гиперболические области расположены в полуплоскости $x < 0$ и, следовательно, лишены в рассматриваемом случае физического смысла. В параболической области ($x > 0$) все интегральные кривые входят в особую точку с нулевым наклоном (касаются оси $\zeta = 0$).



Фазовый портрет исходного уравнения (2) при $\delta > 0$ в представляющей физический интерес части плоскости x, y изображен на фигуре. Характер особенности в точке O, как уже отмечалось, не зависит от величины δ. Поэтому наклон сепаратрисы OB в нуле всегда равен $-{}^1/_8$, как это имело место в [2]. Движение по сепаратрисе до $u = 0$ приводит к некоторому критическому числу Рейнольдса Re*, зависящему в данном случае от δ. Зависимость Re* (δ) в типичном для практики интервале $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, построенная по результатам численного решения уравнений (2), (1) методом Рунге — Кутта четвертого порядка, близка к линейной: $\mathrm{Re}^* = 8{,}7 - 1{,}55\,\delta$ (с погрешностью менее 1%).

Числам $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$ соответствуют интегральные кривые, лежащие выше кривой OB. Все они входят в точку O, касаясь нулевой изоклины уравнения (2) — оси x. Вторая нулевая изоклина (кривая OA на фигуре) описывается уравнением

$$x = -2y\,(2 + \delta y)/({}^3/_2 + y^2)$$

Все интегральные кривые, расположенные ниже сепаратрисы OB (им отвечают $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$), а также линия OA входят в точку A с одинаковым наклоном $k = -b/a$.

Характер поведения решений уравнения (2) свидетельствует о существовании трех различных режимов схлопывания пузырьков.

Случаям $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}^*$ и $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}^*$ отвечает неограниченное возрастание модуля скорости $|V|$ при $R \to 0$, равное по порядку величины $R^{-3/2}$ и R^{-1} соответственно. Оба этих случая качественно эквивалентны таковым из [2].

Роль σ оказывается существенной для движений, соответствующих числам $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$. Принадлежность в этих случаях всех решений узловой области точки A означает конечность (и вместе с тем отличие от нуля) скорости V в момент замыкания пузырька и равенство ее одному и тому же значению $V_A = -\sigma/\mu$ для всех траекторий данного семейства. (Например, для воды $\sigma \approx 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\mu = 10^{-3}$ Н·с/м² и $|V_A| \approx 73$ м/с.) Время схлопывания пузырька поэтому всегда оказывается конечным. Отметим также немонотонный характер изменения скорости границы пузырька при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^*$. В этом случае всегда существует некоторое максимальное значение $|V|$, определяющееся точкой пересечения соответствующей интегральной кривой с изоклиной OA.

Итак, для фиксированных σ и μ величина скорости V в момент $R = 0$ не зависит от начального радиуса пузырька (а также от p_∞ и ρ), если только он меньше некоторого критического радиуса $R_0{}^*$, вычисляемого по значению Re*. Значения p_∞ и ρ влияют лишь на величину $R_0{}^*$, т. е. на верхнюю границу размера пузырьков, обладающих указанным свойством.

Количественная оценка критического размера пузырька в воде и глицерине по данным, использовавшимся в [2], дает в рассматриваемом случае в силу слабой зависимости Re* от δ значения, близкие к найденным в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh Lord.* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // Phil. Mag. 1917. Ser. 6. V. 34. № 200. P. 94—98.
2. *Забабахин Е. И.* Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1129—1131.
3. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. Л.: Судпромгиз, 1963. 335 с.
4. *Левковский Ю. Л., Ильин В. П.* Влияние поверхностного натяжения и вязкости жидкости на замыкание кавитационной каверны // Инж.-физ. журн., 1968. Т. 14. № 5. С. 903—908.
5. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

Одесса

Поступила в редакцию 21.VII.1988

УДК 539.3 : 534.1

Т. Г. Румянцева, М. Г. Селезнев, М. В. Чепиль

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЬЮ

Рассматривается динамическая контактная задача для двуслойного упругого полупространства с заглубленной цилиндрической полостью. При построении решения используется принцип суперпозиции, позволяющий свести краевую задачу к системе интегральных уравнений, для решения которой в случае относительно сильного заглубления полости в подстилающее полупространство используется метод последовательных приближений. На каждом этапе применения метода строится решение интегрального уравнения первого рода, оператор которого соответствует решению контактной задачи для двуслойного полупространства без полости. Свободный член интегрального уравнения представляет собой ряд по степеням малого параметра, определяющего отношение длины волны к величине заглубления центра полости. При реализации изложенного алгоритма решение сингулярного интегрального уравнения строится с использованием приближенной факторизации функций. Проводится исследование степени влияния полости на закон распределения и величину контактных напряжений под штампом.

Рассмотрим задачу о возбуждении антиплоских установившихся гармонических колебаний в упругом двуслойном полупространстве с горизонтальной цилиндрической полостью относительно малого радиуса. Предполагается, что полость полностью расположена в подстилающем полупространстве. Сформулируем соответствующую краевую задачу. Пусть упругая среда занимает в декартовой безразмерной системе координат xyz область

$$x \geqslant -H \cup R = \sqrt{(\varepsilon^{-1} - x)^2 + y^2} \geqslant 1, \quad \varepsilon = a/h$$

характеризуемую значениями плотности и коэффициентов Ламе ρ_1, λ_1, μ_1 при $x \geqslant 0$ и ρ, λ, μ при $-H \leqslant x \leqslant 0$. Размерные координаты получаем умножением безразмерных на радиус полости a; h — величина заглубления центра полости в полупространство.

На границе упругой среды заданы условия

$$x = -H, \quad u_z = f(y)\, e^{-i\omega t}, \quad y \in I; \ \tau_{xz} = 0, \ y \overline{\in} I, \quad I = [c - b, \ c + b] \qquad (1)$$
$$R = 1, \quad \tau_{Rz} = \tau(\varphi)\, e^{-i\omega t}$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии упругих волн. Движение среды описывается уравнениями Ламе [1].

Решение контактных задач теории упругости в существенной степени опирается на исследование соответствующих задач с однородными граничными условиями. Ре-