Для тиксотропной среды величина m должна быть положительной. Тогда из (3.1) видно, что если в начальный момент времени имелась зона с разрушенной структурой $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$, то и в последующие моменты времени возмущение при заданном режиме на границе $x = 0$ не будет распространяться за границу $x = x_0$.

Разрешимость в квадратурах системы уравнений для φ и ψ в случае оператора $bX_2 + dX_3 + X_7$ позволяет в явном виде выписать соответствующее инвариантное решение

$$u = de^t + b\psi^{-1}(\xi) + c_3, \quad \mu(\lambda) = e^t\psi(\xi)$$

$$\psi = \exp\left[-{}^1/_2\, db^{-1}(\xi + c_1)^2\right]\left(b\int \exp\left[{}^1/_2\, db^{-1}(\xi + c_1)^2\right]d\xi + c_2\right)$$

$$\xi = x - be^t$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

В случаях, когда система дифференциальных уравнений относительно φ и ψ неразрешима в квадратурах, для анализа соответствующих инвариантных решений могут быть использованы численные методы и методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор благодарит Н. Х. Ибрагимова за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шадрина Н. Х.* О сдвиговых течениях тиксотропной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 3—12.
2. *Столин А. М., Худяев С. И.* Образование пространственно неоднородных состояний структурированной жидкости при сверханомалии вязкости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 5. С. 1180—1184.
3. *Баренблатт Г. И., Мамедов Ю. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Швецов И. А.* Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 5. С. 76—83.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

Уфа

Поступила в редакцию 22.V.1987

УДК 532.516

Г. И. Бурдэ

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ РАСТЯГИВАЮЩЕГОСЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Получены новые точные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие стационарные осесимметричные движения несжимаемой жидкости вблизи бесконечного кругового цилиндра, поверхность которого растягивается в осевом направлении так, что осевая составляющая скорости на границе линейна по соответствующей координате.

Решения для случая растягивающейся плоскости рассматривались в [1—3]. В [4] решение [1] интерпретировалось как движение жидкости со свободной поверхностью, вызываемое приложенной к поверхности тангенциальной силой.

1. Рассмотрим стационарное осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости около бесконечного кругового цилиндра радиуса R, растягиваемого вдоль оси. В цилиндрических координатах x, r (ось x направлена по оси цилиндра) осевая и радиальная компоненты скорости u и v на поверхности цилиндра задаются выражениями

$$r = R, \quad u = kx, \quad v = 0 \tag{1.1}$$

Отыскивая решения уравнений Навье — Стокса в виде

$$u = \sqrt{\nu k}\left[g(\xi) + \sqrt{\frac{k}{\nu}}\,\varphi'(\xi)\,x\right], \qquad v = -\sqrt{\nu k}\,\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{2\xi}} \tag{1.2}$$

$$p = -\rho\nu k\left[\frac{kc^2}{2\nu}x^2 + \sqrt{\frac{k}{\nu}}\,ax + F(\xi)\right]; \qquad \xi = \frac{kr^2}{2\nu}$$

где a и c — постоянные, придем к системе уравнений для функций φ, g, F:

$$2(\xi\varphi'')' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + c^2 = 0 \qquad (1.3)$$
$$2(\xi g')' + g'\varphi - g\varphi' + a = 0$$
$$4\xi^2 F' = 4\xi^2\varphi'' + 2\xi\varphi\varphi' - \varphi^2$$

Граничные условия на поверхности цилиндра следуют из (1.1)

$$\xi = \xi_w, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 1, \quad g = 0; \quad \xi_w = kR^2/(2\nu) \qquad (1.4)$$

Вид граничных условий на бесконечности определяется наличием внешнего потока и его структурой.

2. Рассмотрение решений системы (1.3) начнем со случая, когда движение жидкости возникает только за счет растяжения цилиндра (внешний поток отсутствует). Этому случаю соответствует $c = 0$, $g = 0$, $a = 0$ и граничное условие вида $\xi \to \infty$, $\varphi' = 0$.

Решение уравнения для φ, удовлетворяющее этому условию и первому условию (1.4), имеет вид

$$\varphi = 8(\xi - \xi_w)/(2\xi + \xi_w) \qquad (2.1)$$

Второе условие (1.4) будет удовлетворено лишь при наличии определенной связи между параметрами k, ν, R:

$$k = 16\nu/(3R^2) \qquad (2.2)$$

Определяя функцию F из последнего уравнения (1.3), придем с использованием (1.2) к выражениям для компонент скорости и давления, дающим решение задачи при условии (2.2)

$$u = \frac{9kx}{\alpha^2}, \qquad v = -\sqrt{12\nu k}\,\frac{\eta - 1}{\sqrt{\eta}\,\alpha} \qquad (2.3)$$
$$p = -3\rho\nu k\,\frac{2\eta^2 - \eta + 2}{\eta\alpha^2}; \qquad \eta = \frac{r^2}{R^2}, \qquad \alpha = 2\eta + 1$$

В случае, когда растягиваемый цилиндр обтекается параллельным оси x однородным потоком ($r \to \infty$, $u = U_\infty$), определяя функцию g из второго уравнения (1.3) при $a = 0$, получим с учетом (1.4), (2.1), (2.2)

$$u = 9k\alpha^{-2}x + 2\alpha^{-2}U_\infty\,[2\eta^2 - 4\eta + \alpha^{-1} + 3\ln\alpha + A]; \quad A = {}^5/_3 - 3\ln 3 \qquad (2.4)$$

В случае, когда внешний поток имеет сдвиговый характер ($r \to \infty$, $u = A_1\xi + A_2\ln\xi + A_3$), распределение скорости получается из решения уравнений (1.3) при $a \neq 0$. Соответствующие формулы для краткости не приводим.

Решения (2.1)—(2.4) аналогичны решениям, полученным в [1, 2] для случая растягивающейся плоскости. Решение [1], как и (2.2), (2.3), описывает течение, возникающее только за счет растяжения поверхности; единственность решения [1] доказывалась в [3]. Решение [2], как и (2.2), (2.4), описывает обтекание растягивающейся поверхности однородным потоком.

Сопоставим (2.2), (2.3) с решением [1] в области течения, близкой к поверхности ($r - R \ll R$). Решение [1] имеет вид

$$v_x = kxe^{-\beta}, \quad v_y = -\sqrt{k\nu}\,(1 - e^{-\beta}), \quad \beta = \sqrt{k/\nu}\,y$$

(ось y перпендикулярна плоскости) и при малых β представляется выражениями

$$v_x = kx(1 - \beta), \quad v_y = -\sqrt{k\nu}\,\beta \qquad (2.5)$$

Положим в (2.3) $r = R + y$ и с использованием (2.2) при $y \ll R$ получим

$$\eta = (1 + \sqrt{3}\beta/4)^2, \quad \beta = \sqrt{k/\nu}\,y$$
$$u = kx(1 - 2\beta/\sqrt{3}), \quad v = -\sqrt{k\nu}\,\beta$$

Сравнение этих выражений с (2.5) показывает, что влияние кривизны поверхности на форму решения проявляется даже на расстояниях, малых по сравнению с радиусом цилиндра.

Рассмотрим теперь движение жидкости вблизи растягивающегося цилиндра в условиях, когда жидкость набегает из бесконечности на цилиндр в радиальном направлении и растекается в противоположные стороны от окружности $x = 0$:

$$r \to \infty, \quad u = kcx, \quad v = -{}^1/_2 kcr$$

Первое уравнение (1.3) тогда следует решать при $c \neq 0$ и граничном условии на бесконечности вида

$$\xi \to \infty, \quad \varphi' = c$$

В этом случае также удается найти точное решение уравнения для φ, удовлетворяющее условию на бесконечности и одному из условий (1.4)

$$\varphi = c\xi - 6 - (c\xi_w - 6)\, e^{c(\xi_w - \xi)/2} \tag{2.6}$$

Второе условие (1.4) будет удовлетворено, если выполняется соотношение

$$k = 4\nu\lambda R^{-2}c^{-1}, \quad \lambda = 2 + c^{-1} \tag{2.7}$$

Выпишем соответствующие (2.6), (2.7) выражения для u и v и выражение для давления, получающееся путем определения функции F из последнего уравнения (1.3):

$$u = kcx\,(1 + f), \quad f = (\lambda - 3)\, e^{\lambda(1-\eta)} \tag{2.8}$$

$$v = -{}^1/_2 kcr\,(\lambda\eta)^{-1}\,(\lambda\eta - 3 - f)$$

$$p = -{}^1/_2 \rho\nu kc\,[kc\nu^{-1}x^2 + \lambda\eta + (3 + f)^2\lambda^{-1}\eta^{-1}]$$

В частном случае $c = 1$ решение первого уравнения (1.3) имеет вид $\varphi = \xi - \xi_w$ (это решение удовлетворяет условиям (1.4) без ограничения (2.7)); соответствующее распределение скорости отличается от потенциального течения только слагаемым $\sim 1/r$ в выражении для v. Решение при $c = 1$ допускает достаточно простое обобщение на случай, когда плоскость радиального натекания жидкости из бесконечности на цилиндр сдвинута относительно неподвижной окружности $x = 0$:

$$r \to \infty, \quad u = k\,(x + b), \quad v = -{}^1/_2 kr$$

Определяя g из второго уравнения (1.3) при $a = \sqrt{k/\nu}\,b$, с учетом (1.2) получим

$$u = k\,(x + b) + A\,(\xi + m) \int \frac{\xi^{-m/2}e^{-\xi/2}}{(\xi + m)^2}\, d\xi \tag{2.9}$$

$$v = -{}^1/_2 kr\,(\xi - \xi_w)/\xi, \quad m = 2 - \xi_w$$

Постоянная A определяется из условия (1.1), постоянную интегрирования полагаем равной нулю. При дискретных значениях $m = -2n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) в (2.9) можно произвести интегрирование. Приведем выражения, получающиеся для первых трех значений m

$$u = k\,\{x + b\,[1 - H\,(m, \eta)]\}$$

$$H\,(0, \eta) = [\eta\,\mathrm{Ei}\,(-\eta) + e^{-\eta}]/[\mathrm{Ei}\,(-1) + e^{-1}]$$

$$H\,(-2, \eta) = e^{2(1-\eta)}, \quad H\,(-4, \eta) = {}^1/_5\,(3\eta + 2)\, e^{3(1-\eta)}$$

где $\mathrm{Ei}\,(z)$ — интегральная показательная функция.

Рассмотренные выше решения можно применить и в ситуации, когда поверхность цилиндра не только растягивается, но и движется с постоянной скоростью в направлении оси x. В качестве граничных условий тогда вместо (1.1) используются соотношения

$$r = R, \quad u = kx + U_w, \quad v = 0 \tag{2.10}$$

Решение (2.4) удовлетворяет этому условию при другом значении постоянной A:

$$A = {}^5/_3 - 3\ln 3 - {}^9/_2 U_w/U_\infty$$

Решение (2.6)—(2.8) может быть обобщено на случай (2.10), если в (2.8) добавить к p слагаемое $-\rho kU_w c^2 x$, а к u — слагаемое $\sqrt{\nu k}\,g$, где

$$g = U_w c\,(\nu k)^{-1/2}\,[1 + (\lambda - 3)\, e^{\lambda(1-\eta)}]$$

Решение (2.9) обобщается на случай (2.10) переопределением постоянной A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Crane L. J.* Flow past a stretching plate // ZAMP. 1970. V. 21. No. 4. P. 645—647.
2. *Danberg J. E.*, *Fansler K. S.* A nonsimilar moving-wall boundary-layer problem // Quart. Appl. Math. 1976. V. 34. No. 3. P. 305—309.
3. *McLeod J. B.*, *Rajagopal K. R.* On the uniqueness of flow of a Navier-Stokes fluid due to a stretching boundary // Arch. Rat. Mech. Anal. 1987. V. 98. No. 4. P. 385—393.
4. *Саночкин Ю. В.* О движении жидкости под воздействием поверхностной силы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 187—190.

Пермь

Поступила в редакцию 1.III.1988