Заключение. Теперь предположим, что во втором ряде (2) все ($\mu_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots$). Для нахождения условия существования периодических решений следующих приближений рассуждаем так же, как и в случае второго и третьего приближений. Начиная с четвертого приближения эти условия сводятся к разрешимости линейного уравнения

$$Pc_{j-2,2} + P_j = 0 \quad (j = 4, 5, \ldots)$$

где $C_{j-2,2}$ — постоянная интегрирования решения z_{j-2} соответственно $(j-2)$-го приближения. Коэффициент $P \neq 0$ и остается общим для всех j-х приближений.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Уравнение (1) имеет два семейства 4π-периодических решения, которые представляются первым рядом (2), причем первое приближение имеет вид

$$z_1 = \pm\gamma\left(-\alpha e^{-iE/2} + e^{iE/2}\right)$$

Аналогичные результаты можно получить и для второй треугольной точки либрации L_5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.
2. *Евтеев В. П.* Периодические орбиты ограниченной эллиптической задачи трех тел // Космич. исслед. 1987. Т. 25. Вып. 2. С. 321—324.

Душанбе

Поступила в редакцию 11.X.1987

УДК 532.5

Р. Н. Бахтизин

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ ТИКСОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

Проводится групповая классификация системы уравнений, описывающей одномерное течение тиксотропной жидкости. Анализируются некоторые инвариантные решения.

1. Под тиксотропной жидкостью понимается среда, в которой рост сдвиговых напряжений приводит к падению вязкости, происходящему за счет разрушения внутренней структуры среды. К таким жидкостям относятся асфальт- и парафинсодержащие нефти, ряд полимерных растворов, глинистые растворы и др.

Для описания течения тиксотропной жидкости с вязкостью μ, зависящей от одного безразмерного структурного параметра λ, предложены модели [1, 2], которые в одномерном случае могут быть записаны в виде

$$u_t = (\mu(\lambda)\,u_x)_x, \quad \lambda_t = \Phi(\lambda, u_x) \tag{1.1}$$

Модели такого типа используются также при описании фильтрации вязкоупругой жидкости [3].

Исследуем групповые свойства [4,5] системы (1.1).

При произвольном виде функций $\mu(\lambda)$ и $\Phi(\lambda, u_x)$ система (1.1) допускает трехмерную алгебру L_3 инфинитизимальных операторов с базисом $X_1 = \partial/\partial t$, $X_2 = \partial/\partial x$, $X_3 = \partial/\partial u$, отвечающим сдвигам по t, x, u.

Рассмотрим, при каких специализациях μ и Φ возможны расширения этой алгебры. Анализ системы определяющих уравнений [4] для (1.1) показывает, что имеет место следующее утверждение.

Если $\mu' \not\equiv 0$, $\partial\Phi/\partial u_x \not\equiv 0$, $\partial\Phi/\partial\lambda \not\equiv 0$, то алгебра расширяется только при одном из следующих наборов μ и Φ: 1) μ — произвольная функция, $\Phi = u_x{}^\alpha f(\lambda)$, где f — произвольная функция, $\alpha \neq 0$; дополнительный базисный оператор имеет вид

$$X_4 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 2)\,u\frac{\partial}{\partial u}$$

2) μ — произвольная функция, $\Phi = (\mu^{1+\gamma}/\mu')\,F(u_x\mu^\beta)$, где $\partial F/\partial u_x \not\equiv 0$, $\beta, \gamma \in R$; дополнительный оператор

$$X_5 = \frac{1-\gamma}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - \gamma t\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{1-\gamma}{2} - \beta\right)u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mu}{\mu'}\frac{\partial}{\partial\lambda}$$

3) μ — произвольная функция, $\Phi = (\mu/\mu')(1 + \mu u_x^{\varepsilon})$, где $\varepsilon \neq 0$; дополнительные операторы

$$X_6 = \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} + (\varepsilon - 2)\, u \frac{\partial}{\partial u} + 2\varepsilon \frac{\mu}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \lambda}\,, \quad X_7 = e^{-t} \frac{\partial}{\partial t} + e^{-t} \frac{\mu}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

2. Рассмотрим в указанных в п. 1 случаях инвариантные решения, связанные с возникновением дополнительных базисных операторов. Для этого в каждом из этих случаев выпишем инвариантные решения, соответствующие операторам, которые входят в оптимальную систему подалгебр [4] и содержат дополнительные операторы.

1) В оптимальную систему подалгебр входит оператор $X_4 + cX_3$, $c \in R$, причем если $\alpha \neq 2$, то $c = 0$. Соответствующее инвариантное решение имеет вид

$$u = c \ln t + t^{-\nu} \varphi(\xi),\ \lambda = \psi(\xi),\ \xi = x t^{-1/2}$$

$\nu = (2 - \alpha)/(2\alpha)$, а φ и ψ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu\varphi + {}^1/_2\xi\varphi' + (\mu(\psi)\varphi')' = {}^1/_4 c,\ {}^1/_2\xi\psi' + f(\psi)\psi'^{\alpha} = 0$$

2) Если $\gamma \neq 0$ или $\gamma \neq 1$, то оператор, входящий в оптимальную систему, имеет вид $X_5 + cX_3$, $c \in R$, причем $c = 0$ при $\sigma = \beta - {}^1/_2(1 - \gamma) \neq 0$. Инвариантное решение: $u = (c/\gamma) \ln t + \varphi(\xi)$, $\mu(\lambda) = t^{-1/\gamma}\psi(\xi)$, $\xi = x t^{(1-\gamma)/(2\gamma)}$, а φ и ψ удовлетворяют системе

$$\frac{c}{\gamma} + \frac{\sigma}{\gamma} \varphi + \frac{1-\gamma}{2\gamma} \xi\varphi' = (\psi\varphi')', \quad (1-\gamma)\, \xi\psi' = 1 + \gamma\psi^{1+\gamma} F(\varphi'\psi^{\beta})$$

При $\gamma = 0$ в оптимальную систему входит $X_5 + aX_1 + cX_3$, $a, c \in R$, причем если $\beta \neq {}^1/_2$, то $c = 0$. Инвариантное решение:

$$u = x^{1-2\beta}\varphi(\xi) + 2c \ln x, \quad \mu(\lambda) = x^2 \varphi(\xi), \quad \xi = t - 2a \ln x$$

При $\gamma = 1$ требуемый оператор имеет вид $X_5 + bX_2 + cX_3$ (при $\beta \neq 0$ значение $c = 0$), а соответствующее решение

$$u = t^{\beta}\varphi(\xi) - c \ln t,\ \mu(\lambda) = t^{-1}\psi(\xi),\ \xi = x + b \ln t$$

Функции φ и ψ удовлетворяют в каждом из случаев соответствующей системе дифференциальных уравнений.

3) Операторы, входящие в оптимальную систему, удобно представить в виде: а) $aX_1 + cX_3 + X_6$, б) $bX_2 + dX_3 + X_7$, в) $cX_3 + X_6 + X_7$, где $a, b, c, d \in R$, причем $c = 0$ при $\varepsilon \neq 2$. Для каждого из этих операторов инвариантные решения выписываются в виде

а) $u = x^{(\varepsilon-2)/\varepsilon}\varphi(\xi) + 2c \ln x, \quad \mu(\lambda) = x^2\psi(\xi), \quad \xi = x^{-2a} e^{t}$

б) $u = de^{t} + \varphi(\xi), \quad \mu(\lambda) = e^{t}\psi(\xi), \quad \xi = x - be^{t}$

в) $u = e^{(\varepsilon-2)\tau}\varphi(\xi), \quad \mu(\lambda) = e^{2\varepsilon\tau}\tau\psi(\xi), \quad \xi = \ln x - \varepsilon\tau, \quad \tau = e^{t}$

Здесь, как и выше, функции φ и ψ удовлетворяют соответствующей системе дифференциальных уравнений.

3. Проанализируем некоторые из полученных в п. 2 инвариантных решений.

В приложениях часто используется линейное по λ и некоторой степени u_x кинетическое уравнение, т. е. уравнение вида $\lambda_t + \lambda = u_x^{m}$. В уравнениях (1.1) принимается степенная зависимость $\mu = \lambda^n$. Для этого случая инвариантное решение может быть записано так:

$$u = (x_0 - x)^p \varphi(t),\ \lambda = (x_0 - x)^{2/n}\psi(t),\ p = (2/(mn)) + 1,\ x_0 > 0$$

В случае $n = -1$ система дифференциальных уравнений относительно φ и ψ интегрируется в квадратурах и ее решение записывается в виде

$$t = t_0 + \ln\left(1 + l \int_{\varphi_0}^{\varphi} \exp\left[q\left(\varphi^m - \varphi_0{}^m\right)\right] d\varphi\right) \tag{3.1}$$

$$\psi = \psi_0 \exp\left[q\left(\varphi^m - \varphi_0{}^m\right)\right] \left(1 + l \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\exp(q\varphi^m)}{\varphi}\, d\varphi\right)^{-1}$$

$$q = \frac{(m-2)^{m-1}}{2(m-1)\, m^{m-1}}\,, \quad l = \frac{\psi_0 m^2}{(m-1)(m-2)}$$

Для тиксотропной среды величина m должна быть положительной. Тогда из (3.1) видно, что если в начальный момент времени имелась зона с разрушенной структурой ($0 \leqslant x \leqslant x_0$), то и в последующие моменты времени возмущение при заданном режиме на границе $x = 0$ не будет распространяться за границу $x = x_0$.

Разрешимость в квадратурах системы уравнений для φ и ψ в случае оператора $bX_2 + dX_3 + X_7$ позволяет в явном виде выписать соответствующее инвариантное решение

$$u = de^t + b\psi^{-1}(\xi) + c_3, \quad \mu(\lambda) = e^t\psi(\xi)$$

$$\psi = \exp\left[-{}^1/_2\, db^{-1}(\xi + c_1)^2\right]\left(b\int \exp\left[{}^1/_2\, db^{-1}(\xi + c_1)^2\right] d\xi + c_2\right)$$

$$\xi = x - be^t$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

В случаях, когда система дифференциальных уравнений относительно φ и ψ неразрешима в квадратурах, для анализа соответствующих инвариантных решений могут быть использованы численные методы и методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор благодарит Н. Х. Ибрагимова за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шадрина Н. Х.* О сдвиговых течениях тиксотропной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 3—12.
2. *Столин А. М., Худяев С. И.* Образование пространственно неоднородных состояний структурированной жидкости при сверханомалии вязкости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 5. С. 1180—1184.
3. *Баренблатт Г. И., Мамедов Ю. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Швецов И. А.* Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 5. С. 76—83.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

Уфа

Поступила в редакцию
22.V.1987

УДК 532.516

Г. И. Бурдэ

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ РАСТЯГИВАЮЩЕГОСЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Получены новые точные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие стационарные осесимметричные движения несжимаемой жидкости вблизи бесконечного кругового цилиндра, поверхность которого растягивается в осевом направлении так, что осевая составляющая скорости на границе линейна по соответствующей координате.

Решения для случая растягивающейся плоскости рассматривались в [1—3]. В [4] решение [1] интерпретировалось как движение жидкости со свободной поверхностью, вызываемое приложенной к поверхности тангенциальной силой.

1. Рассмотрим стационарное осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости около бесконечного кругового цилиндра радиуса R, растягиваемого вдоль оси. В цилиндрических координатах x, r (ось x направлена по оси цилиндра) осевая и радиальная компоненты скорости u и v на поверхности цилиндра задаются выражениями

$$r = R, \quad u = kx, \quad v = 0 \tag{1.1}$$

Отыскивая решения уравнений Навье — Стокса в виде

$$u = \sqrt{\nu k}\left[g(\xi) + \sqrt{\frac{k}{\nu}}\,\varphi'(\xi)\,x\right], \qquad v = -\sqrt{\nu k}\,\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{2\xi}} \tag{1.2}$$

$$p = -\rho\nu k\left[\frac{kc^2}{2\nu}x^2 + \sqrt{\frac{k}{\nu}}\,ax + F(\xi)\right]; \qquad \xi = \frac{kr^2}{2\nu}$$