Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 521.1

В. П. Евтеев, Э. М. Мухамадиев

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Выявляются два класса периодических орбит периода плоской эллиптической задачи трех тел. Используется разновидность метода малого параметра, причем в качестве малого параметра берется эксцентриситет задачи.

Рассмотрим плоскую эллиптическую задачу трех тел [1]. Если принять постоянную тяготения, большую полуось и одну из притягивающих масс равными единице, а за независимую переменную взять эксцентрическую аномалию E, то уравнение движения задачи в комплексной форме запишется следующим образом [2]:

$$n^2 \{\rho z'' + [e \sin E + 2i (1 - e^2)^{1/2}] z' + z\} + 1 = 2\partial_{\bar{z}} W \tag{1}$$

$$\rho = 1 - e \cos E, \quad n^2 = 1 + \mu, \quad z = x + iy$$

$$W = 1/\,|z - 1| + \mu/\,|z|$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по E, μ — вторая притягивающая масса ($0 < \mu < 1$), e — эксцентриситет, который будем рассматривать как малый параметр.

Решение уравнения (1) будем строить в виде

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i e^i, \quad \mu = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i e^i \tag{2}$$

где в качестве z_0 берется точка либрации $L_4: z_0 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$

Подставляя ряды (2) в (1), получим равенство

$$\Big(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k e^k\Big)\Big\{(1 - e\cos E) \sum_{k=1}^{\infty} z_k'' e^k + [e \sin E + 2i (1 - e^2)^{1/2}] \sum_{k=1}^{\infty} z_k' e^k - \sum_{k=1}^{\infty} z_k e^k\Big\} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant m = i+j} b_{ij} \Big(\sum_{k_1 + \ldots + k_i + p_1 + \ldots + p_j = m} z_{k_1} z_{k_2} \ldots z_{k_i} \bar{z}_{p_1} \bar{z}_{p_2} \ldots \bar{z}_{p_j}\Big) e^m \tag{3}$$

$$b_{ij} = \frac{2}{i!\, j!} \frac{\partial^{i+(j+1)} W(z_0)}{\partial z_0^i \, \partial \bar{z}_0^{j+1}}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве (3), будем составлять уравнения соответствующих приближений.

Первое приближение. Из (3) получаем уравнение первого приближения

$$L_0(z_1) = (1 + \mu_0)(z_1'' + 2iz_1' - z_1) - b_{10} z_1 + b_{01} \bar{z}_1 = 0 \tag{4}$$

$$b_{01} = {}^1/_2\, (1 + \mu_0), \quad b_{01} = -{}^3/_4\, [1 - i\sqrt{3} + (1 + i\sqrt{3})\, \mu_0]$$

(L_0 — самосопряженный оператор).

Найдем, при каких условиях уравнение (4) будет иметь периодические решения

$$z_1 = c_{11} e^{-i\lambda E} + c_{12} e^{i\lambda E} \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27\mu_0}{4(1 + \mu_0)^2} = 0 \tag{6}$$

Таким образом, вопрос существования периодических решений вида (5) уравнения (4) свелся к вопросу о существовании вещественных корней характеристического уравнения (6).

Далее, будем изучать периодические решения уравнения (1) периода $T = 2\pi/\lambda$, т. е. положим $\lambda = 1/2$. При этом предположении находим из (6), что $\mu_0 \approx 0{,}029437$.

Теорема 1. Пусть μ_0 удовлетворяет равенству (6), тогда уравнение (4) имеет периодическое решение $z_1 = \alpha \bar{c}_{12} e^{-iE/2} + c_{12} e^{iE/2}$, $\quad \alpha = 1 - i1{,}632993$

где $\bar{c}_{12}$— величина, комплексно сопряженная постоянной интегрирования c_{12}.

Второе приближение. Уравнение второго приближения имеет вид

$$
\begin{gathered}
L_0 z_2 = L_1 z_1, \quad L_1 z_1 = a_0 + a_{-1/2} e^{-iE/2} + a_{1/2} e^{iE/2} + \\
+ a_{-1} e^{-iE} + a_1 e^{iE} + a_{-3/2} e^{-i3E/2} + a_{3/2} e^{i3E/2} \\
a_0 = [\alpha k_1 + {}^{15}/_4 \bar{\alpha} (\mu_0 - 1) + 2k_2] c_{12} \bar{c}_{12} \\
a_{-1/2} = {}^3/_4 [b_{10} c_{12} + (\alpha - 1 - i\sqrt{3}) \mu_1 \bar{c}_{12}] \\
a_{1/2} = {}^3/_4 \alpha b_{10} \bar{c}_{12} + {}^1/_4 [11 - 3\bar{\alpha} (1 + i\sqrt{3})] \mu_1 c_{12} \\
a_1 = [{}^1/_2 k_1 + \bar{\alpha} k_2 - {}^{15}/_8 (1 - \mu_0) \alpha^2] c_{12}^2 \\
a_{-1} = [{}^1/_2 \alpha^2 k_1 + k_2 \alpha - {}^{15}/_8 (1 - \mu_0)] \bar{c}_{12}^2 \\
a_{-3/2} = - {}^5/_4 b_{10} \alpha \bar{c}_{12}, \quad a_{3/2} = - {}^5/_4 b_{10} c_{12} \\
k_1 = {}^3/_8 [1 - i\sqrt{3} - (1 - i\sqrt{3}) \mu_0] \\
k_2 = {}^3/_8 (1 + i\sqrt{3})(1 + \mu_0)
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного операторного уравнения (7) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна по всем решениям сопряженного однородного уравнения.

Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Для разрешимости уравнения (7) необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$
\begin{gathered}
d_1 \mu_1^2 - {}^3/_2 b_{10} = 0 \\
d_1 = {}^3/_4 |\alpha|^2 + 11 + {}^3/_4 [(1 + i\sqrt{3}) \alpha + (1 - i\sqrt{3}) \bar{\alpha}]
\end{gathered}
\tag{8}
$$

имело ненулевые вещественные корни.

Уравнение (8) имеет два вещественных корня

$$\mu_1 = \pm 3 (1 + \mu_0)^2 / (10 + 46\mu_0)$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить, предполагая, что $\mu_1 > 0$. В этом случае получаем равенство $\bar{c}_{12} = -c_{12}$. Поэтому решение уравнения первого приближения примет вид

$$z_1 = c_{12} (-\alpha e^{-iE/2} + e^{iE/2})$$

Третье приближение. Имеем

$$
\begin{gathered}
L_0 z_3 = L_1 (z_1, z_2), \quad L_1 (z_1, z_2) = b_0 + b_{-1/2} e^{-iE/2} + b_{1/2} e^{iE/2} + \\
+ b_{-1} e^{-iE} + b_1 e^{iE} + b_{-3/2} e^{-i3E/2} + b_{3/2} e^{i3E/2} + \\
+ b_{-2} e^{-i2E} + b_2 e^{i2E} + b_{-5/2} e^{-i5E/2} + b_{5/2} e^{i5E/2} \\
b_{-1/2} = c_{12} \{{}^3/_4 \mu_1 A_{-1/2} + {}^3/_4 b_{10} A_{-3/2} + [- {}^1/_2 (\alpha A_0 + A_{-1}) k_1 + \\
+ {}^4/_3 (\alpha \bar{A}_0 - \bar{A}_1 + A_0 + \bar{\alpha} A_{-1}) k_3 + 20 (\bar{A}_0 + \bar{\alpha} A_1) b_{10} + 5 (\alpha^2 + 14\bar{\alpha}) k_4 + \\
+ {}^3/_2 \alpha^2 (|\alpha|^2 + 1) b_{10} - 15 (2 |\alpha|^2 + 1) b_{01}] c_{12}^2 + {}^1/_4 (1 + i\sqrt{3} - \alpha) \mu_2 - b_{10} \alpha\} \\
b_{1/2} = c_{12} \{{}^3/_4 \mu_1 A_{-1/2} - {}^3/_4 b_{10} A_{-3/2} + [(A_0 - \alpha A_1) k_1 + \\
+ (A_0 + \bar{\alpha} A_0 - \alpha \bar{A}_{-1} - A_1) k_3 - {}^{15}/_2 (1 - \mu_0)(\bar{\alpha} \bar{A}_0 + \bar{A}_{-1}) - \\
- {}^9/_8 (2 |\alpha|^2 + 1) b_{10} - {}^5/_4 (|\alpha|^2 + 2) \bar{\alpha} b_{01} + {}^{15}/_4 (\alpha + \bar{\alpha}^2) k_4] c_{12}^2 + \\
+ {}^1/_4 [11 - 3 (1 + i\sqrt{3}) \bar{\alpha}] \mu_2 + {}^5/_6 \mu_1 \alpha - b_{10}\}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Коэффициенты k_3, k_4, A_i ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm {}^3/_2, \pm {}^1/_2$) — комплексные числа вида k_1 и k_2. Остальные коэффициенты равенства (9) не влияют на условия существования периодических решений третьего приближения.

Для нахождения этих условий рассуждаем точно так же, как и для второго приближения. Используя теорему 2 и предполагая $\mu_2 = 0$, приходим к следующему выводу.

Теорема 4. Для существования периодического решения уравнения третьего приближения (9) необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо уравнение

$$P_0 c_{12}^2 + P_1 = 0 \tag{10}$$

где P_0 и P_1— комплексные числа, c_{12}— постоянная интегрирования первого приближения.

Так как P_0 и P_1 в данном случае отличны от нуля, то уравнение (10) всегда имеет два корня. Подставляя численные значения в (10), получим

$$c_{12} = \pm\gamma = \pm(0{,}075421 + i0{,}187614)$$

Заключение. Теперь предположим, что во втором ряде (2) все ($\mu_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots$). Для нахождения условия существования периодических решений следующих приближений рассуждаем так же, как и в случае второго и третьего приближений. Начиная с четвертого приближения эти условия сводятся к разрешимости линейного уравнения

$$Pc_{j-2,2} + P_j = 0 \quad (j = 4, 5, \ldots)$$

где $C_{j-2,2}$ — постоянная интегрирования решения z_{j-2} соответственно $(j-2)$-го приближения. Коэффициент $P \neq 0$ и остается общим для всех j-х приближений.

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Уравнение (1) имеет два семейства 4π-периодических решения, которые представляются первым рядом (2), причем первое приближение имеет вид

$$z_1 = \pm\gamma\left(-\alpha e^{-iE/2} + e^{iE/2}\right)$$

Аналогичные результаты можно получить и для второй треугольной точки либрации L_5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.
2. *Евтеев В. П.* Периодические орбиты ограниченной эллиптической задачи трех тел // Космич. исслед. 1987. Т. 25. Вып. 2. С. 321—324.

Душанбе

Поступила в редакцию 11.X.1987

УДК 532.5

Р. Н. Бахтизин

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ ТИКСОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

Проводится групповая классификация системы уравнений, описывающей одномерное течение тиксотропной жидкости. Анализируются некоторые инвариантные решения.

1. Под тиксотропной жидкостью понимается среда, в которой рост сдвиговых напряжений приводит к падению вязкости, происходящему за счет разрушения внутренней структуры среды. К таким жидкостям относятся асфальт- и парафинсодержащие нефти, ряд полимерных растворов, глинистые растворы и др.

Для описания течения тиксотропной жидкости с вязкостью μ, зависящей от одного безразмерного структурного параметра λ, предложены модели [1, 2], которые в одномерном случае могут быть записаны в виде

$$u_t = (\mu(\lambda)\, u_x)_x, \quad \lambda_t = \Phi(\lambda, u_x) \tag{1.1}$$

Модели такого типа используются также при описании фильтрации вязкоупругой жидкости [3].

Исследуем групповые свойства [4,5] системы (1.1).

При произвольном виде функций $\mu(\lambda)$ и $\Phi(\lambda, u_x)$ система (1.1) допускает трехмерную алгебру L_3 инфинитизимальных операторов с базисом $X_1 = \partial/\partial t$, $X_2 = \partial/\partial x$, $X_3 = \partial/\partial u$, отвечающим сдвигам по t, x, u.

Рассмотрим, при каких специализациях μ и Φ возможны расширения этой алгебры. Анализ системы определяющих уравнений [4] для (1.1) показывает, что имеет место следующее утверждение.

Если $\mu' \not\equiv 0$, $\partial\Phi/\partial u_x \not\equiv 0$, $\partial\Phi/\partial\lambda \not\equiv 0$, то алгебра расширяется только при одном из следующих наборов μ и Φ: 1) μ — произвольная функция, $\Phi = u_x{}^{\alpha} f(\lambda)$, где f — произвольная функция, $\alpha \neq 0$; дополнительный базисный оператор имеет вид

$$X_4 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha t\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 2)\, u\frac{\partial}{\partial u}$$

2) μ — произвольная функция, $\Phi = (\mu^{1+\gamma}/\mu')\, F(u_x\mu^{\beta})$, где $\partial F/\partial u_x \not\equiv 0$, $\beta, \gamma \in R$; дополнительный оператор

$$X_5 = \frac{1-\gamma}{2}x\frac{\partial}{\partial x} - \gamma t\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{1-\gamma}{2} - \beta\right)u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mu}{\mu'}\frac{\partial}{\partial\lambda}$$