

УДК 539.375

Ю. Н. Гордеев

**АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ
ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
РАСКЛИНИВАЮЩЕГО ПОТОКА ГАЗА**

Рассматривается задача о развитии из нуля с постоянной скоростью системы радиальных разрезов в условиях плоской деформации. Эта задача возникает, например, при описании разрушения пласта трещинами гидроразрыва. Расклинивание трещин может осуществляться газом, образующимся при взрыве цилиндрического заряда [1] или нагнетаемым в скважину специальными пороховыми генераторами давления [2].

Методом функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева [3, 4] получены автомодельные решения задач о развитии звезды трещин нормального отрыва. Приведено решение задачи о расклинивании звездообразной трещины потоком изотермического невязкого газа, мгновенно выделившегося в начальный момент времени.

Автомодельные задачи о развитии звездообразной трещины в условиях антиплоской деформации рассматривались в работах [5, 6]. Исследование расклинивающего действия потока вязкого изотермического газа на распространение прямолинейного изолированного разреза проведено в [7], где показано, что при некоторых определяющих параметрах задачи в потоке газа образуется ударная волна торможения.

1. Постановка задачи. Пусть в нагруженной плоскости xu в начальный момент времени начинает развиваться из начала координат с постоянной скоростью v система $2n$ радиальных разрезов, равномерно распределенных по углу. К берегам разрезов приложена нормальная нагрузка P .

Упругие смещения среды описываются уравнениями динамической теории упругости [3, 4]

$$\begin{aligned} w_i &= u_i + v_i, \quad \Delta u_i = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i, \quad \Delta v_i = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_i; \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial}{\partial y} u_1 &= \frac{\partial}{\partial x} u_2, \quad \frac{\partial}{\partial x} v_1 = -\frac{\partial}{\partial y} v_2 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $u_i(x, y; t)$, $v_i(x, y; t)$ — потенциальные и соленоидальные компоненты вектора смещения $w_i(x, y; t)$; c_1 , c_2 — скорости продольных и поперечных волн ($c_1 > c_2$).

Компоненты тензора напряжений связаны со смещениями законом Гука (μ — постоянная Ламе)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu \left[\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \operatorname{div} \mathbf{w} - 2 \frac{\partial}{\partial y} w_2 \right] \\ \sigma_{yy} &= \mu \left[\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \operatorname{div} \mathbf{w} - 2 \frac{\partial}{\partial x} w_1 \right], \quad \sigma_{xy} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} w_2 + \frac{\partial}{\partial y} w_1 \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия на берегах $2n$ разрезов для уравнений (1.1), (1.2) зададим в виде

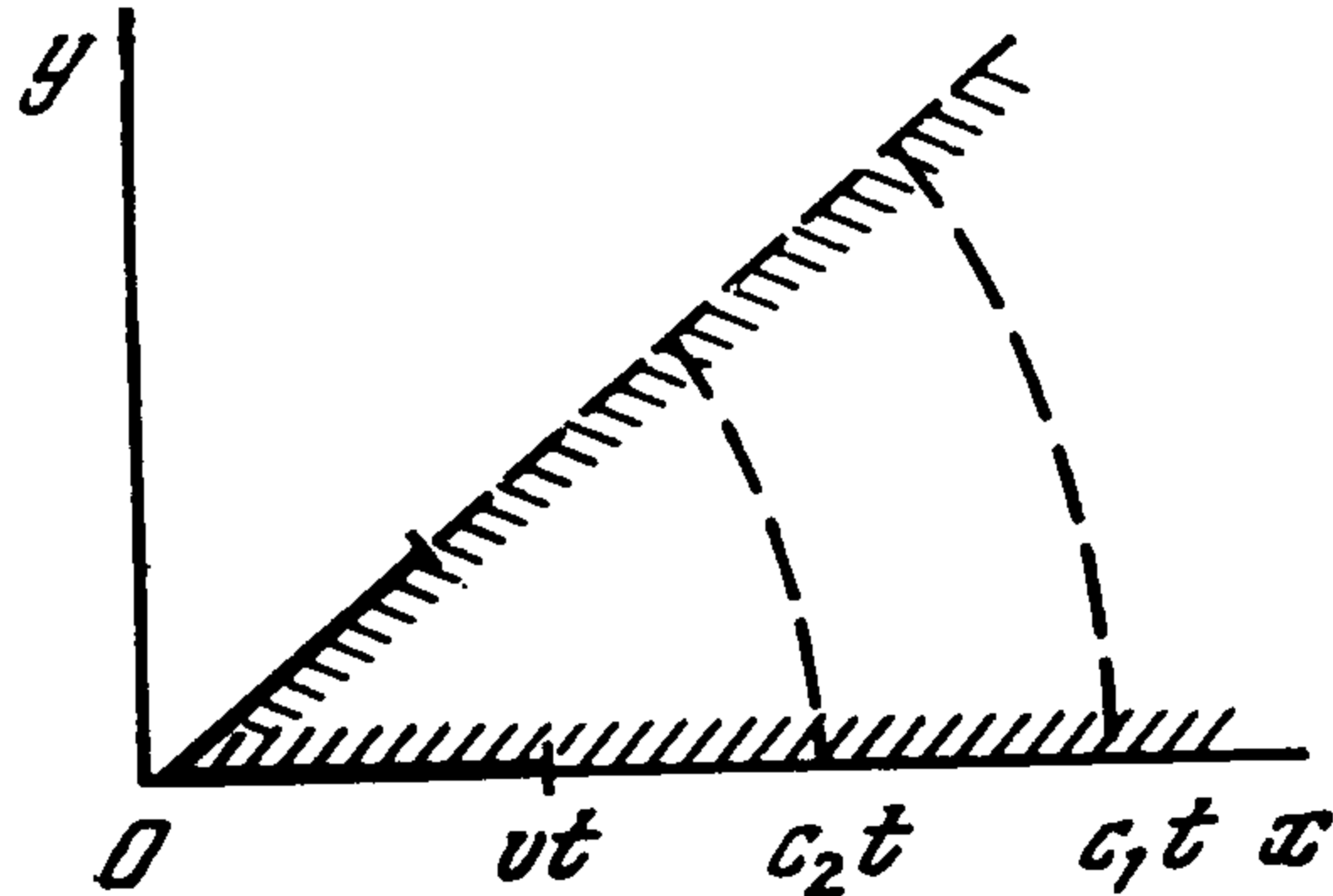
$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= -P(r, \varphi_0), \quad \sigma_{nr} = 0; \quad \varphi_0 = k\pi/n, \quad r < vt \\ w_n &= 0, \quad \sigma_{n\tau} = 0; \quad \varphi_0 = k\pi/n, \quad vt < r < c_1 t \\ r &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x); \quad k = 0, \dots, 2n - 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Предполагается, что на кончиках трещин нормальная компонента тензора напряжений имеет корневую особенность

$$\sigma_{nn}(r, \varphi_0; t) \xrightarrow{r \rightarrow vt} \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi}(r-vt)} \quad (1.4)$$

Здесь $K_I(t)$ — коэффициент интенсивности напряжений (КИН).

В силу симметрии задачи (1.1)—(1.4) достаточно рассмотреть область, ограниченную поверхностями $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/n$ (фиг. 1). Единичный вектор нормали к границе этой угловой области



имеет компоненты: $(n_x, n_y) = (-1)^{1-n\varphi_0/\pi} \times \times [-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0]$ ($\varphi_0 = 0, \pi/n$). Нормальная составляющая вектора смещений, нормальная и тангенциальная составляющие тензора напряжений на поверхности угловой области могут быть представлены в виде

$$w_n(r, \varphi_0, t) = (-1)^{n\varphi_0/\pi} \cdot (w_2 \cos \varphi_0 - w_1 \sin \varphi_0)$$

Фиг. 1

$$\sigma_{nn}(r, \varphi_0, t) = \sigma_{xx} \sin^2 \varphi_0 + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi_0 - \sigma_{xy} \sin 2\varphi_0$$

$$\sigma_{n\tau}(r, \varphi_0, t) = \sigma_{xy} \cos 2\varphi_0 - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi_0 \quad (1.5)$$

$$\varphi_0 = 0, \pi/n$$

2. Решение автомодельной задачи. Рассмотрим случай автомодельного нагружения

$$P(r, \varphi_0, t) = P_0 (t/t_0)^{l-1} P(\xi), \quad \xi = r/(vt), \quad \varphi_0 = 0, \pi/n \quad (2.1)$$

где P_0, t_0 — постоянные размерности давления и времени, l — целое неотрицательное число.

Для решения задачи (1.1)—(1.4) при нагружении (2.1) используем метод функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева. Введем функции, однородные относительно переменных x, y, t [3, 4]

$$U_i = \partial^l u_i / \partial t^l; \quad V_i = \partial^l v_i / \partial t^l; \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

Функции U_i удовлетворяют волновому уравнению для продольных волн, V_i — для поперечных волн.

Представим U_i и V_i как вещественные части аналитических функций от комплексных переменных z_1 и z_2

$$U_i(x/(c_1 t), y/(c_1 t)) = \operatorname{Re} U_i^l(z_1), \quad V_i(x/(c_1 t), y/(c_1 t)) = \operatorname{Re} V_i^l(z_2); \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

$$z_k^{-1} = c_k^{-1} \operatorname{ch} \{n(\beta_k - i\varphi)\}, \quad \beta_k = \operatorname{arch} \xi_k^{-1}, \quad \xi_k = r/(c_k t) \quad (2.4)$$

Преобразование (2.4) отображает угловую область, приведенную на фиг. 1, в верхнюю полуплоскость ($z_k = x_k + iy_k, y_k \geq 0; k = 1, 2$).

Подставляя (2.3) в (1.2) с учетом (1.1), получим для напряжений

$$\sigma_{xy}^\circ = \mu \operatorname{Re} \left\{ 2(U_2^l)' \frac{\partial z_1}{\partial x} + (1 - \omega_2^2)(V_2^l)' \frac{\partial z_2}{\partial x} \right\} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{xx}^\circ = \mu \operatorname{Re} \left\{ \left[\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 (1 + \omega_1^{-2}) - 2 \right] (U_2^l)' \frac{\partial z_1}{\partial y} - 2(V_2^l)' \frac{\partial z_2}{\partial y} \right\}$$

$$\sigma_{yy}^\circ = \mu \operatorname{Re} \left\{ \left[\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 (1 + \omega_1^{-2}) - 2\omega_1^{-2} \right] (U_2^l)' \frac{\partial z_1}{\partial y} + 2(V_2^l)' \frac{\partial z_2}{\partial y} \right\}$$

$$(U_1^l)' = \omega_1^{-1} (U_2^l)', \quad (V_1^l)' = -\omega_2 (V_2^l)'; \quad \omega_k = \frac{\partial z_k}{\partial y} / \frac{\partial z_k}{\partial x}, \quad k = 1, 2$$

Дифференцируя (2.4), найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} z_k = \Omega_k (x - iy \sqrt{1 - \xi_k^2}), \quad \frac{\partial}{\partial y} z_k = \Omega_k (y + ix \sqrt{1 - \xi_k^2}) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} z_k = -\Omega_k r^2/t$$

$$\Omega_k = \frac{n}{r^2} z_k \frac{1 - \theta_k^{2n}}{1 + \theta_k^{2n}} (1 - \xi_k^2)^{-1/2}, \quad \theta_k = \rho_k e^{i\varphi}, \quad \rho_k = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi_k^2}}{\xi_k}$$

Введем аналитические функции $W_1'(z_1)$ и $W_2'(z_2)$, такие, что на границе угловой области ($\varphi = \varphi_0$; $\varphi_0 = 0, \pi/n$)

$$dU_2^l/dz_1 = J_1 (2 - \xi_2^2) \omega_0 (\cos \varphi_0 \sqrt{1 - \xi_1^2} - i \sin \varphi_0) W_1'(z_1) \quad (2.7)$$

$$dV_2^l/dz_2 = -2J_2 \sqrt{1 - \xi_2^2} (\cos \varphi_0 - i \sin \varphi_0 \sqrt{1 - \xi_2^2}) W_2'(z_2)$$

$$J_k^{-1} = \sqrt{1 - \xi_k^2} \left[(2 - \xi_2^2) \omega_0 - 2 \frac{dz_2(\varphi_0)}{dz_1(\varphi_0)} \right], \quad \omega_0 = \frac{\partial z_2}{\partial t} / \frac{\partial z_1}{\partial t}$$

Из (1.5), (2.5), (2.7) следует, что граничное условие $\sigma_{n\tau}(\varphi = \varphi_0) = 0$ выполняется, если при $\varphi = \varphi_0$

$$W_1'(z_1) = W_2'(z_2) \quad (2.8)$$

Из определения комплексных переменных z_1 и z_2 (2.4) найдем, что при $\varphi = \varphi_0$

$$\frac{dz_2(\varphi = \varphi_0)}{dz_1(\varphi = \varphi_0)} = \frac{c_1}{c_2} \frac{z_2}{z_1} \sqrt{\frac{c_2^2 - z_2^2}{c_1^2 - z_1^2}} \sqrt{\frac{1 - \xi_1^2}{1 - \xi_2^2}}$$

На границе угловой области $\varphi = \varphi_0$ из (1.5), (2.5), (2.7), (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial t^l} \sigma_{nn} &= \mu \operatorname{Im} \left\{ \frac{(2 - \xi_2^2)^2 - 4 \sqrt{1 - \xi_1^2} \sqrt{1 - \xi_2^2}}{c_2 \xi_2 \sqrt{1 - \xi_1^2} [(2 - \xi_2^2) \omega_0 - 2 dz_2(\varphi_0)/dz_1(\varphi_0)]} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial z_2}{\partial t} W_1'(z_1) \right\} \\ \partial^l w_n / \partial t^l &= \operatorname{Re} W_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поставим граничную задачу для функции W_1' в верхней полуплоскости $z = z_1/c_1$. Из (1.3), (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z = 0, \quad z_* < |\operatorname{Re} z| < 1, \quad \operatorname{Re} W_1' &= 0 \\ \operatorname{Im} z = 0, \quad z_v < |\operatorname{Re} z| < z_*, \quad \operatorname{Re} W_1' &= 0 \\ \operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| < z_v, \quad \operatorname{Im} W_1' &= \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$= -\frac{tv}{n\mu z_1} \frac{(1 - m_1^2 \xi^2) \xi}{\sqrt{1 - (z_1/c_1)^2}} \frac{[2\Lambda_2 - (2 - m_2^2 \xi^2) \Lambda_1]}{[(2 - m_2^2 \xi^2)^2 - 4 \sqrt{1 - m_1^2 \xi^2} \sqrt{1 - m_2^2 \xi^2}]} \frac{\partial^l}{\partial t^l} P$$

$$z_*^{-1} = \operatorname{ch} \{n \operatorname{arch}(c_1/c_2)\}, \quad z_v^{-1} = \operatorname{ch} \{n \operatorname{arch}(c_1/v)\}, \quad m_k = v/c_k$$

$$\Lambda_k = \frac{(m_k \xi)^{2n} + [1 - \sqrt{1 - m_k^2 \xi^2}]^{2n}}{(m_k \xi)^{2n} - [1 - \sqrt{1 - m_k^2 \xi^2}]^{2n}} \operatorname{th} \{n \operatorname{arch}(m_k^{-1} \xi^{-1})\}, \quad k = 1, 2$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.4) сводится к смешанной задаче Келдыша — Седова для функции W_1' , решение которой может быть представлено в виде [3]

$$\begin{aligned} W_1' \left(\frac{z_1}{c_1} \right) &= \frac{1}{(z^2 - z_v^2)^{l+1/2}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-z_v}^{z_v} \frac{(s^2 - z_v^2)^{l+1/2} \operatorname{Im} W_1' ds}{s - z} + \right. \\ &+ \left. iz \sum_{j=0}^{l-1} A_j z^{2j} \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решение (2.12) содержит l постоянных A_j ($j = 0, \dots, l-1$), значения которых определяются из системы

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \sigma_{nn}(vt-0, \varphi_0, t) = -\frac{\partial^j}{\partial t^j} P(vt, t); \quad j = 0, \dots, l-1$$

Конкретный вид нагрузки (2.1) обусловлен физической постановкой задачи. В частном случае сосредоточенного в начале координат нагружения КИН и постоянные A_j могут быть определены по алгоритму, предложенному в [3].

Ниже рассмотрим задачу о развитии звезды трещин под действием расклинивающего потока газа.

3. Задача о точечном источнике. Пусть в начальный момент времени при детонации цилиндрического заряда выделилась масса газа M и образовалась звездообразная трещина, которая распространяется в упругом массиве под действием расклинивающего потока газа. Ограничимся рассмотрением начальной фазы разрушения среды, когда влиянием вязкости газа можно пренебречь. Экспериментально установлено, что при высоких давлениях продуктов детонации на берегах трещины распространение ее от скважины в течение относительно длительного промежутка времени происходит с постоянной скоростью [8].

Движение изотермического невязкого газа в трещине описывается уравнениями сохранения массы газа и количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_n) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u w_n) = 0, \quad \rho \frac{d}{dt}u + \frac{\partial}{\partial r}P = 0, \quad P = c^2 \rho \quad (3.1)$$

где P , ρ , u — давление, плотность и скорость движения газа в трещине, c — изотермическая скорость звука.

Будем рассматривать развитие трещины в слабопроницаемом массиве, когда утечкой газа через стенки можно пренебречь. При этом полная масса газа M в трещине должна сохраняться

$$M = 2n \int_0^{L(t)} dr w_n \rho, \quad L(t) = vt \quad (3.2)$$

В силу симметрии задачи и отсутствия источника газа в начале координат имеем

$$u(r=0, t) = 0 \quad (3.3)$$

Пренебрегая противодавлением фонового газа, получим, что задача (3.1)—(3.3) является автомодельной с переменной $\xi = r/(vt)$. Интегрируя (3.1) с учетом (3.2) и (3.3), получим

$$u = v\xi\delta_0(\xi_0 - \xi), \quad P = P_0 \left(\frac{t}{t_0}\right) \delta_0(\xi_0 - \xi) \quad (3.4)$$

$$(\varphi = k\pi/n, \quad k = 0, \dots, 2n-1)$$

где $\delta_0(x)$ — функция Хевисайда, $\xi_0 = c/v$ — координата фронта разлетающегося газа.

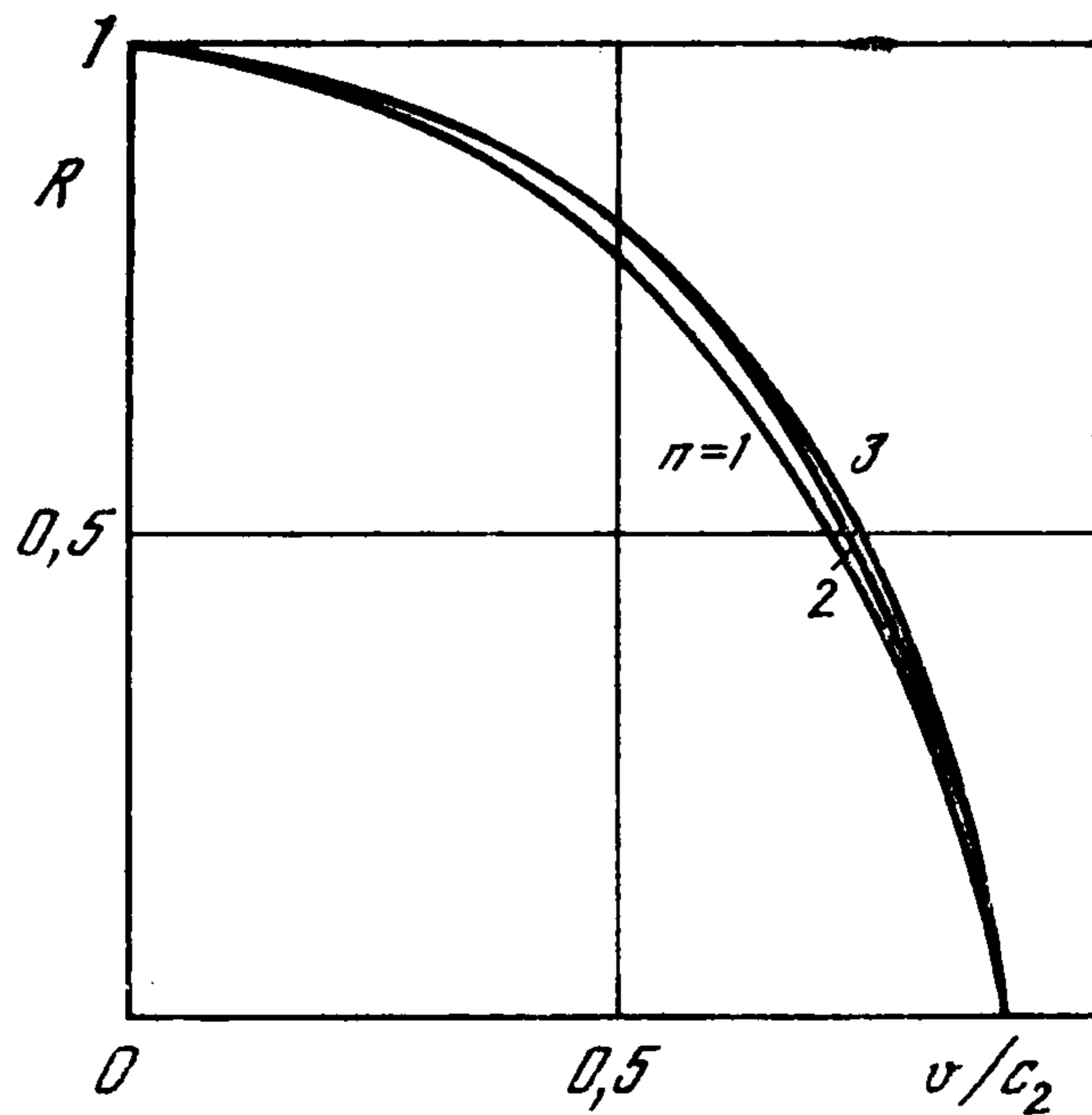
Поскольку трещина распространяется в непроницаемой породе, то $\xi_0 = 1$ при $c \geq v$.

Сравнивая (3.4) и (2.1), получим

$$l = 0, \quad w_n = w_0 w(\xi) \quad (3.5)$$

где w_0 — характерная ширина трещины, которая будет определена ниже.

Задача о развитии трещины линейна относительно прикладываемого к ее берегам давления газа (3.4), поэтому раскрытие трещины $w_n(\xi)$ и



Фиг. 2

КИН можно представить в виде

$$w_n(\xi) = \int_0^{\xi_0} d\zeta w_*(\xi, \zeta), \quad K_I(t) = \int_0^{\xi_0} d\zeta K_I^*(t, \zeta) \quad (3.6)$$

где $w_*(\xi, \zeta)$ и $K_I^*(t, \zeta)$ — раскрытие трещины и КИН, которые соответствуют нагрузке $(\delta_1(x) — \text{дельта-функция})$

$$P(\xi, t) = P_0(t/t_0) \delta_1(\xi - \zeta); \quad \varphi = k\pi/n, \quad k = 0, \dots, 2n - 1 \quad (3.7)$$

Найдя потенциал W_1' для нагрузки (3.7) из (2.12), получим профиль трещины по второй формуле (2.9)

$$w_*(\xi, \zeta) = w_0 Q(\zeta) \ln \frac{\sqrt{z_v^2 - z_\zeta^2} + \sqrt{z_v^2 - z^2}}{\sqrt{|z^2 - z_\zeta^2|}} \quad (3.8)$$

$$Q(\zeta) = \frac{\sqrt{1 - m_1^2 \zeta^2} [(2 - m_2^2 \zeta^2) \Lambda_1 - 2\Lambda_2]}{(2 - m_2^2 \zeta^2)^2 - 4\sqrt{1 - m_1^2 \zeta^2} \sqrt{1 - m_2^2 \zeta^2}}$$

$$z^{-1} = \text{ch} \{n \text{ arch} (m_1^{-1} \xi^{-1})\}, \quad z_\zeta^{-1} = \text{ch} \{n \text{ arch} (m_1^{-1} \zeta^{-1})\}$$

$$w_0 = 2P_0 v (\pi\mu)^{-1}$$

Из первой формулы (2.9) и (2.11) определим, используя формулу (1.4)

$$K_I^*(t, \zeta) = 2P_0 t_0 \sqrt{v/(\pi t n)} R(n, m_1, m_2; \zeta) \quad (3.9)$$

$$R(n, m_1, m_2; \zeta) = \frac{z_v}{\sqrt{z_v^2 - z_\zeta^2}} \frac{Q(\zeta)}{Q(1)} \left(\frac{1 - z_v^2}{1 - m_1^2} \right)^{1/4}$$

В частном случае сосредоточенного в начале координат нагружения ($\zeta \rightarrow 0$) КИН (3.9) имеет вид

$$R(n, m_1, m_2; 0) = \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{(m_2^2 - m_1^2) Q(1)} \left(\frac{1 - z_v^2}{1 - m_1^2} \right)^{1/4} \quad (3.10)$$

Для прямолинейного разреза ($n = 1$) величина $K_I(t)$ вычислена в работах [3, 4]. Из (3.10) при $n = 1$ имеем

$$R(1, m_1, m_2; 0) = \frac{(2 - m_2^2)^2 - 4\sqrt{1 - m_1^2} \sqrt{1 - m_2^2}}{2m_1^2 [1 - (m_2/m_1)^2] \sqrt{1 - m_1^2}}$$

Зависимость КИН $R(n, m_1, m_2; 0)$ от скорости распространения трещины приведена на фиг. 2 при $c_2/c_1 = 0,6$.

Постоянную $P_0 t_0$ определим из закона сохранения массы газа M (3.2)

$$P_0 t_0 = \frac{c}{2v} \left[\frac{\pi\mu M w_0}{n} \left(\int_0^{\xi_0} d\xi w_n(\xi) \right)^{-1} \right]^{1/2} \quad (3.11)$$

Формулы (3.4), (3.6), (3.8), (3.9), (3.11) дают полное решение задачи о распространении звездообразной трещины под действием мгновенно выделившейся в начальный момент времени массы газа M .

ЛИТЕРАТУРА

1. Михалюк А. В. Торпедирование и импульсный гидроразрыв пластов. Киев: Наук. думка, 1986. 208 с.
2. Беляев Б. М., Васильев С. А., Николаев С. И. Разрыв пласта давлением пороховых газов. М.: ВНИИОЭНГ, 1967. 63с.
3. Шер Е. Н. О напряженном состоянии растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза, нагружаемого изнутри сосредоточенными силами // ПМТФ. 1980. № 1. С. 154—163.
4. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 618—639.
5. Мартынюк П. А., Шер Е. Н. Некоторые автомодельные задачи о развитии звездообразной трещины в условиях антиплоской деформации // ПМТФ. 1976. № 5. С. 168—174.
6. Быковцев А. С., Тавбаев Ж. С. О «звездообразной» системе распространяющихся дислокационных разрывов // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 163—166.
7. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А. Динамика роста трещины нормального отрыва при расклинивании ее потоком газа // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 311—317.
8. Адушкин Е. Ф., Сухотин А. П. О разрушении твердой среды взрывом // ПМТФ. 1961. № 4. С. 94—101.

Москва

Поступила в редакцию
22.VII.1988