

УДК 539.374

О. Ю., Динариев А. Б. Мосолов

О ВИДЕ ФУНКЦИОНАЛА ПЛАСТИЧНОСТИ В ЭНДОХРОННЫХ ТЕОРИЯХ НЕУПРУГОСТИ

Рассматриваются различные варианты выбора функционала пластичности в теориях пластичности эндохронного типа, не использующих понятие поверхности текучести.

Классические теории пластичности (типа теории течения), основанные на понятии поверхности текучести, неудовлетворительно описывают эксперименты на сложное нагружение. Поэтому рядом авторов предпринимались попытки отказаться от использования понятия поверхности текучести и условия разгрузки при построении определяющих соотношений теории пластичности. По-видимому, наиболее известные представители этого класса теорий — эндохронная теория неупругости (Валанис) и тензорно-параметрическая теория пластичности (Ю. И. Кадашевич с сотр.). Однако интерес к теориям пластичности, по сути не использующим понятие поверхности текучести, появился значительно раньше. Еще в работах А. А. Ильюшина, предложившего общие принципы построения феноменологической теории пластичности в условиях сложного нагружения, содержалась формулировка теории, в которой фактически не было необходимости использовать при построении определяющих соотношений поверхность текучести [1—3].

Пусть связь между векторами напряжений σ и деформаций e для начально изотропных материалов задается в виде однозначного, $O(5)$ -инвариантного функционала, удовлетворяющего свойству запаздывания (затухающей памяти)

$$\sigma = F [s, e(\cdot)]_0^s, \quad ds = |de| \quad (1)$$

Был предложен [1] конкретный вид функционала (1) — истокообразное представление

$$\sigma = \int_0^s B(s, s', \{\beta\}) de(s') \quad (2)$$

где $\{\beta\}$ — совокупность параметров, отражающих влияние сложной геометрии процесса деформации. В качестве таких параметров предлагалось взять совокупность кривизн и кручений траектории деформации $\{\beta\} = \{\kappa(s), \kappa(s')\}$ и, если необходимо, то и их производных по длине дуги s . Конечно, при таком выборе параметров $\{\beta\}$ необходимо доопределить ядро B в точках сингулярности $\{\kappa\}$, т. е. в точках излома траектории деформации [1].

Как видно, ни в (1), ни в (2) фактически нет необходимости использовать понятие поверхности текучести.

Другой пример теории, где также можно не пользоваться поверхностью текучести, — теория пластичности, основанная на гипотезе локальной определенности [4, 5]. Действительно, если уравнения гипотезы локальной определенности дополнить уравнением, описывающим эволюцию интенсивности напряжений $\sigma_u = |\sigma|$ (отказавшись от условия $\sigma_u = \Phi(s)$ [5])

$$d\sigma_u/ds = f(s, \sigma_u, \{\theta_i\}) \quad (3)$$

где $\{\theta_i\}$ — углы ориентации вектора σ в сопровождающем репере Френе траектории деформации, то получим теорию пластичности, учитывающую сложность процесса деформации, но не использующую ни поверхность текучести, ни условие разгрузки.

Предложена теория пластичности, в которой функционал выбирался в виде [6]

$$\sigma = \int_0^z J(z - z') de(z') \quad (4)$$

формально аналогичном функционалу линейной вязкоупругости, только вместо линейного физического времени t в качестве параметра процесса предлагалось использовать особое «внутреннее» время z , являющееся, вообще говоря, функционалом процесса деформации (отсюда происходит и название теории — эндохронная, т. е. с внутренним временем).

Первоначально мера внутреннего времени z определялась соотношением

$$dz = f^{-1}(s) ds, \quad ds = |de| \quad (5)$$

Функция $f(s)$ отвечает за эффекты типа изотропного упрочнения, и поэтому была названа функцией упрочнения. Ядро J по аналогии со стандартными реологическими моделями линейной вязкоупругости выбиралось в виде, соответствующем обобщенной модели Максвелла

$$J(z) = \sum_{i=1}^N 2G_i e^{-\alpha_i z} \quad (6)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, эндохронная теория пластичности (ЭТП) позволила на качественном уровне, а иногда и на количественном с единых позиций описать ряд важных особенностей упругопластического деформирования материалов. Например, линейное и нелинейное упрочнение (и разупрочнение), явление запаздывания, нелинейную разгрузку, гистерезис, стабилизацию петли гистерезиса при циклическом нагружении, «нырок» σ_u при изломе траектории деформации и т. д. [6—8]. Вместе с тем выяснилось, что ЭТП обладает и некоторыми необычными свойствами, например нарушает постулаты Ильюшина — Драккера [9]. Это приводит к эффектам типа циклической ползучести и циклической релаксации. Кроме того, при сравнении предсказаний теории (4)—(6) с результатами экспериментов на сложное нагружение нередко наблюдается существенное количественное расхождение экспериментальных и теоретических данных. Указанные обстоятельства стали основанием для серьезной критики первоначального варианта ЭТП [9—14].

Причину расхождения предсказаний ЭТП с данными опытов нетрудно понять, рассмотрев более внимательно вид функционала (4)—(6).

Прежде всего очевидно, что функционал ЭТП является «переупрощенным» вариантом истокообразного представления вектора σ (2), в котором опущена зависимость ядра от геометрии траектории деформации, а в качестве параметра процесса по-прежнему используется длина дуги s . Это приводит к тому, что приращение деформации de , соответствующее как активному ($\sigma de > 0$), так и пассивному ($\sigma de < 0$) нагружению дает по сути одинаковый вклад в (4) и (5), что, конечно, в общем случае не может быть справедливым в теории пластичности.

Отметим, что в истокообразном представлении такое противоречие не возникает, так как геометрия процесса деформации учитывается при выборе ядра B .

К сказанному можно добавить также и замечание, сделанное в работе [10] о том, что для выбора ядра J в виде (6) фактически нет достаточных оснований, тем более, что из экспериментов не удается независимым образом (и с достаточной точностью) определить вид функции упрочнения f и значения параметров G_i, α_i .

Насколько «переупрощен» функционал ЭТП по сравнению с точным функционалом (1), можно понять, рассмотрев разложение (аппроксимацию) функционала (1) в функционально-степенной ряд Фреше — Вольтерры [15]

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^s \dots \int_0^s J_{2k-1} de_1 (de_2 \cdot de_3) \dots (de_{2k-2} \cdot de_{2k-1}) \quad (7)$$

$$J_{2k-1} = J_{2k-1}(s, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2k-1}), \quad de_i = de(\xi_i)$$

Можно показать, что вплоть до процессов со средней кривизной включительно при разложении по малому параметру $\eta = |\kappa| \lambda$ (κ — кривизна процесса деформации, λ — след запаздывания) ряд (7) редуцируется к виду

$$\sigma = \int_0^s K(s, \xi) de(\xi) \quad (8)$$

Учет следующего порядка сложности (по параметру η) траектории деформации приводит к функционалу вида

$$\sigma = \int_0^s K_1(s, \xi) de(\xi) + \iiint_0^s K_3(s, \xi_1, \xi_2, \xi_3) de_1 (de_2 \cdot de_3) \quad (9)$$

и т. д. Следовательно, строго говоря, функционал первоначального варианта ЭТП точен только для траекторий деформации не сложнее, чем траектории со средней кривизной, для более сложных траекторий его нужно рассматривать как приближенный. Этим и объясняется наблюдаемое количественное расхождение предсказаний этого варианта ЭТП и опытных данных.

Недостатки функционала первоначального варианта ЭТП можно пытаться устранить различным образом. Записав функционал ЭТП в виде (8), можно отказаться от представления ядра J суммой (6), а вместо этого определять J из экспериментов на сложное нагружение по траекториям в виде двузвенной ломаной. Можно отказаться от простейшего функционала (4), (8) и использовать более сложный функционал (9). Область «точности» этого функционала существенно шире, но для его определения нужно построить по экспериментальным данным уже два ядра K_1 и K_3 , последнее из которых в общем случае зависит от четырех аргументов. Построение ядер K_1 и K_3 несколько упрощается, если материал тела не обладает старением относительно s , тогда можно считать, что

$$K_1(s, \xi) = K_1(s - \xi), \quad K_3(s, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = K_3(s - \xi_1, s - \xi_2, s - \xi_3)$$

Хотя ядра K_1 и K_3 в принципе могут быть построены по данным экспериментов на сложное нагружение с траекториями деформации в виде многозвенных ломаных, но это уже весьма сложная экспериментальная задача.

По-другому решен вопрос о выборе функционала пластичности в работах [16, 17], авторы которых предложили параметрическое представле-

ние функционала связи σ и ϵ

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_0^{\rho} L_1(\rho, \rho') dR(\rho') \\ \epsilon &= \int_0^{\rho} L_2(\rho, \rho') dR(\rho'), \quad d\rho = f^{-1}(R) dR, \quad dR = |d\mathbf{R}|\end{aligned}\quad (10)$$

Характерная особенность такой записи функционала пластичности состоит в том, что связь между векторами σ и ϵ ищется не непосредственно, а через вспомогательный вектор \mathbf{R} , вид которого заранее не оговаривается, но считается, что он отражает влияние микродеформаций и микронапряжений на процесс пластичности. Хотя аналитический вид тензорно-параметрической теории (10) значительно сложнее, чем ЭТП, наличие двух ядер L_1 и L_2 вместо одного J существенно расширяет возможности теории и позволяет описать более широкий класс свойств материалов.

Совершенно иной путь исправлений первоначального варианта ЭТП избрал Валанис. Вместо изменения вида функционала он предложил изменить определение меры внутреннего времени, введя «новую» меру [18—20]

$$dz = f^{-1}(\xi) d\xi, \quad d\xi = |de - \chi E^{-1} d\sigma| \quad (11)$$

Здесь E — модуль сдвига, $\chi \in [0, 1]$ — дополнительный параметр модели.

В неявной форме такая же мера была ранее использована в [21]¹.

Для того чтобы понять, к чему приводит замена меры (5) на (11), рассмотрим простейшую модель ЭТП, когда $J(z) = E \exp(-\alpha z)$. Уравнения (4), (11) в этом случае можно переписать в виде трехчленного соотношения теории пластичности

$$d\sigma = Ede - \alpha\sigma dz \quad (12)$$

На фиг. 1 приведены кривые зависимости σ от ϵ для нагружения и последующей разгрузки в одномерном случае, соответствующем модели (12). Параметры E и α оставались постоянными, $f(\xi) = 1 + \beta\xi$, параметр χ принимал значения 0; 0,5; 0,95 для кривых 1, 2, 3 соответственно. Как следует из приведенных графиков, рассматриваемая модель соответствует материалу с линейным упрочнением изотропного типа.

Величину dz можно представить в виде

$$dz = \varphi(\xi, \sigma_u, \theta) d\xi \quad (13)$$

где θ — угол между векторами σ и de . Далее для простоты будут рассматриваться только двумерные процессы нагружения и деформации.

Из (12) можно получить уравнения, описывающие эволюцию σ_u и θ

$$\begin{aligned}d\sigma_u/ds &= E \cos \theta - \alpha\sigma_u \varphi = \psi_1(\xi, \sigma_u, \theta) \\ d\theta/ds &= -\kappa - E\sigma_u^{-1} \sin \theta = -\kappa - \psi_2(\xi, \sigma_u, \theta).\end{aligned}$$

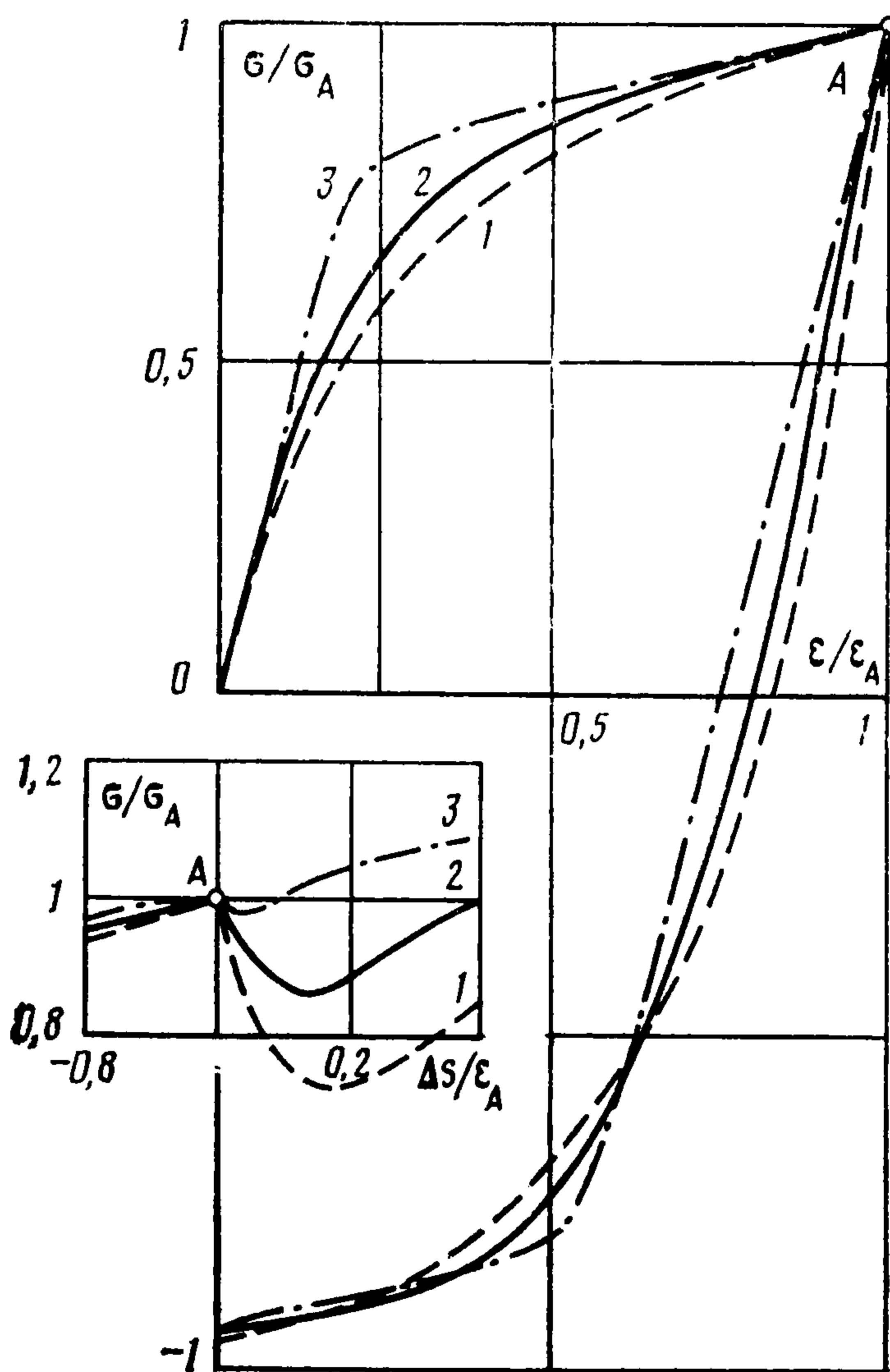
Эти уравнения фактически совпадают с уравнениями теории, основанной на гипотезе локальной определенности В. С. Ленского, с тем, однако, отличием, что σ_u уже не считается универсальной функцией s . В частности, при изломе траектории деформации возникает нырок σ_u . На врезке на

¹ Процессы сложного нагружения в ЭТП с новой мерой внутреннего времени были рассмотрены в работе: Мосолов А. Б. О соотношениях теории пластичности, учитывающих сложность процессов деформации. М.: МГУ, 1980, 23 с. — Деп. в ВИНТИ 14.07.80, № 2995, где предложен более общий вид новой меры, учитывающий зависимость χ от истории процесса деформации.

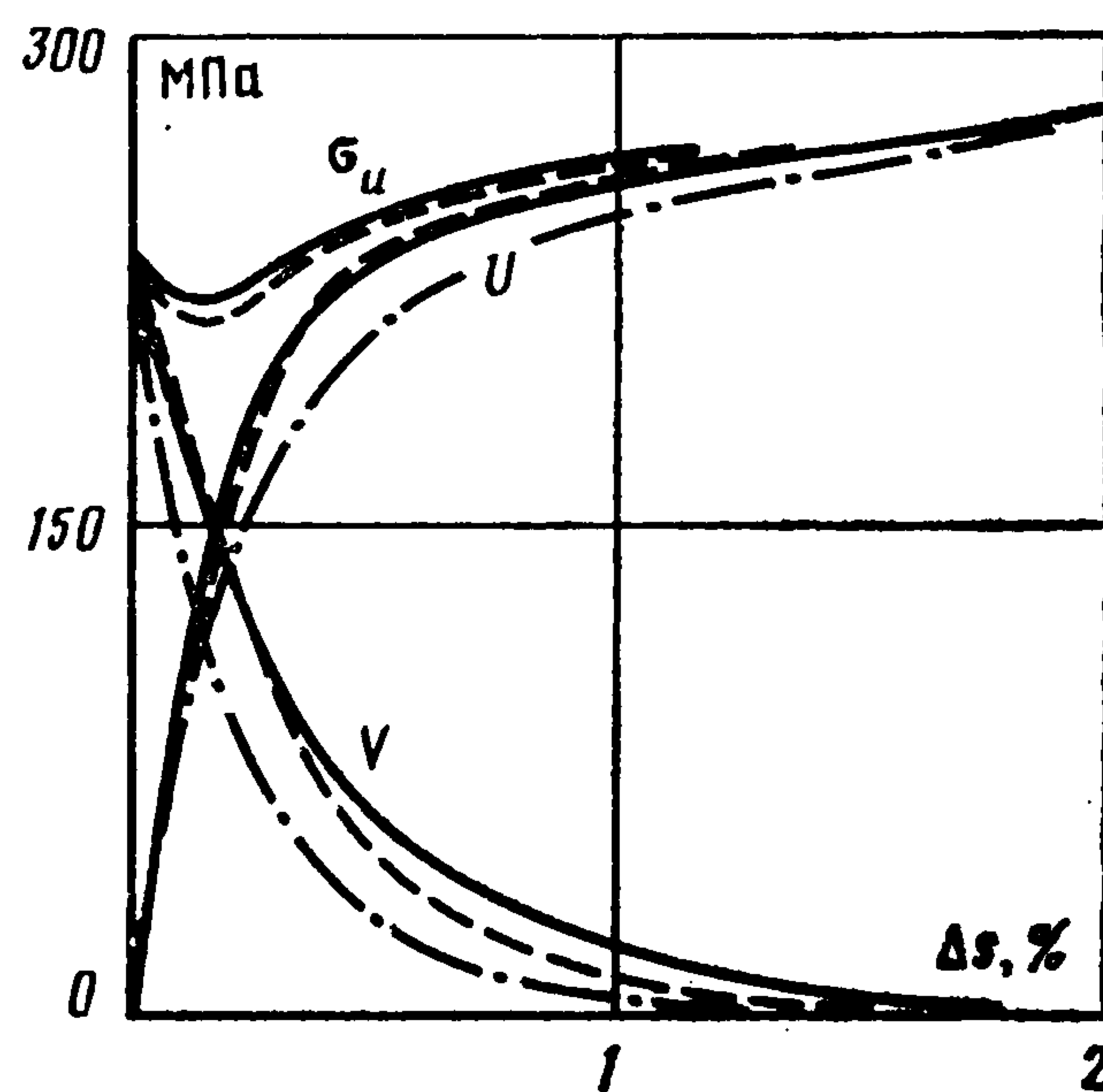
фиг. 1 показаны профили нырков при деформации по двузвенной ломаной с углом излома 90° , параметры материала прежние, излом траектории происходит в точке A , отмеченной светлой точкой, $\Delta s = s - s_A$, где s_A — значение s в момент излома. Хорошо видно, что глубина нырков зависит от величины параметра χ , причем при $\chi \rightarrow 1$ нырок исчезает.

На фиг. 2 представлено сравнение предсказаний модели (12) (штриховая линия) и экспериментальных данных (сплошная линия) для стали S10C [22]. Траектория деформации имела вид двузвенной ломаной с углом излома 90° , $U = \sigma_u \cos \theta$, $V = \sigma_u \sin \theta$, $\chi = 0,65$. Расчеты по первоначальному варианту ЭТП ($\chi = 0$) показаны штрихпунктиром.

Введение новой меры (12) оказалось полезным и позволило значительно расширить предсказательные возможности ЭТП. Следует, однако, заметить, что параметр χ никакой физической интерпретации не получил и по суще-



Фиг. 1



Фиг. 2

ству остался формальным (подгоночным) параметром теории. Более того, в дальнейших публикациях Валанис и его последователи [23—25] приняли строгое равенство $\chi = 1$, т. е. $d\xi = ds_p$, где s_p — пластическая длина дуги (параметр Одквиста). При таком определении параметра внутреннего времени z естественным образом возникает понятие поверхности текучести и функционал пластичности записывается в виде [23]

$$\sigma = \sigma_0 de_p/dz + \int_0^z J_0(z - z') de_p(z')$$

$$de_p = de - E^{-1}d\sigma, dz = f^{-1}(\xi) d\xi, d\xi = |de_p|$$

где σ_0 — предел текучести, а J_0 — несингулярное ядро, или в виде [24]

$$\sigma = \int_0^z J(z - z') de_p(z'), \quad J(z) = z^{-\alpha} J_0(z), \quad \alpha < 1$$

Следовательно, предложенная Валанисом современная реализация ЭТП возвращает ее в класс теорий пластичности с поверхностью текучести,

хотя, возможно, и с неассоциированным законом течения [26, 27]. Вряд ли это можно считать последовательным развитием теории, которая первоначально была интересна как раз тем, что в ней поверхность текучести отсутствовала. Последнее утверждение обычно особо подчеркивается в работах, посвященных ЭТП и поэтому нуждается в некотором уточнении.

Действительно, при построении определяющих соотношений в ЭТП нет необходимости использовать условие разгрузки и понятие поверхности текучести (при $\chi \neq 1$ такой поверхности в строгом смысле просто нет), а функционал пластичности задается формулами (4), (11) (или 10)) сразу для всех возможных траекторий деформации (в том числе и для траекторий, отвечающих разгрузке). Однако для интерпретации экспериментальных данных и сравнения с другими вариантами теории пластичности (например, с теорией течения) часто бывает удобно ввести в ЭТП понятие условной поверхности текучести (УПТ). Здесь уместно вспомнить, что в экспериментальных исследованиях поверхность текучести определяется по некоторому допуску, от величины которого могут существенно зависеть размеры, форма и положение поверхности текучести в пространстве напряжений. Чаще всего выбирается допуск (обычно 0,01—0,2%) на величину остаточных деформаций.

Аналогично можно поступить в ЭТП, только допуск будем задавать на величину относительного приращения пластических деформаций. В рассматриваемом варианте теории пластичности это значительно упрощает выкладки и больше отвечает существу дела. Для наглядности ограничимся сначала простейшей моделью ЭТП (12).

Введем следующее определение. Пусть $0 < \delta \leq 1$ — некоторое малое число (допуск). Квазиупругим деформированием по допуску δ будем называть такой процесс деформации, что

$$|de_p/ds| < \delta, de_p = de - E^{-1}d\sigma, ds = |de| \quad (14)$$

Область пространства напряжений, в каждой точке которой условие (14) имеет место для любого процесса деформации, назовем областью квазиупругого деформирования Ω_δ . УПТ по допуску δ назовем S_δ — границу замыкания Ω_δ .

Построим S_δ для модели, заданной уравнением (2), из которого следует, что

$$de_p = \alpha E^{-1} [f(\xi)]^{-1} | \chi de_p + (1 - \chi) de | \sigma \quad (15)$$

Обозначим

$$y = \left| \frac{de_p}{ds} \right|, \quad \sigma_u = |\sigma|, \quad \cos \theta = \frac{\sigma de}{\sigma_u ds}, \quad \varphi = \alpha (Ef(\xi))^{-1}$$

Возводя обе части равенства (15) в квадрат, получим относительно y квадратное уравнение, корень которого

$$y(\theta) = (1 - \chi) \varphi \sigma_u \frac{\chi \varphi \sigma_u \cos \theta + \sqrt{1 - \chi^2 \varphi^2 \sigma_u^2 \sin^2 \theta}}{1 - \chi^2 \varphi^2 \sigma_u^2}$$

(второй корень отброшен как посторонний). Неравенство (14) приобретает вид $y(\theta) < \delta$. По определению Ω_δ , это неравенство должно быть справедливо в любой точке Ω_δ независимо от величины θ , поэтому Ω_δ фактически определяется неравенством $\max_\theta y(\theta) = y(0) < \delta$ или

$$y(0) = (1 - \chi) \varphi \sigma_u / (1 - \chi \varphi \sigma_u) < \delta$$

Отсюда находим

$$\sigma_u < \sigma_\delta(\xi) = \delta(1 - \chi + \delta\chi)^{-1} E\alpha^{-1}f(\xi) \quad (16)$$

Неравенство (16) означает, что в пространстве напряжений Ω_δ совпадает с открытым шаром радиуса $\sigma_\delta(\xi)$ с центром в начале координат, УПТ в этом случае — сфера радиуса $\sigma_\delta(\xi)$.

Из (16) следует, что в процессе деформации УПТ может меняться, изотропно расширяясь или сжимаясь в соответствии с поведением функции $f(\xi)$. Этим и объясняется название функции f — как функции упрочнения (разупрочнения). Таким образом, модель (13) соответствует материалу с изотропным упрочнением ($df/d\xi > 0$) или разупрочнением ($df/d\xi < 0$). В простейшем случае $f(\xi) \equiv 1$ соотношение (14) описывает материал без упрочнения с предельным значением напряжения $\sigma_0 = E\alpha^{-1}$.

Из (16) следует, что если $\chi \neq 1$, то $\sigma_\delta < \sigma_0$. Шаровой слой $\sigma_\delta(\xi) < \sigma_u < \sigma_0(\xi) = \sigma_0 f(\xi)$ можно назвать слоем пластичности, поскольку в нем, вообще говоря, нарушается условие (14), а значит, приращение пластических деформаций может стать «заметным», т. е. превысить допуск δ .

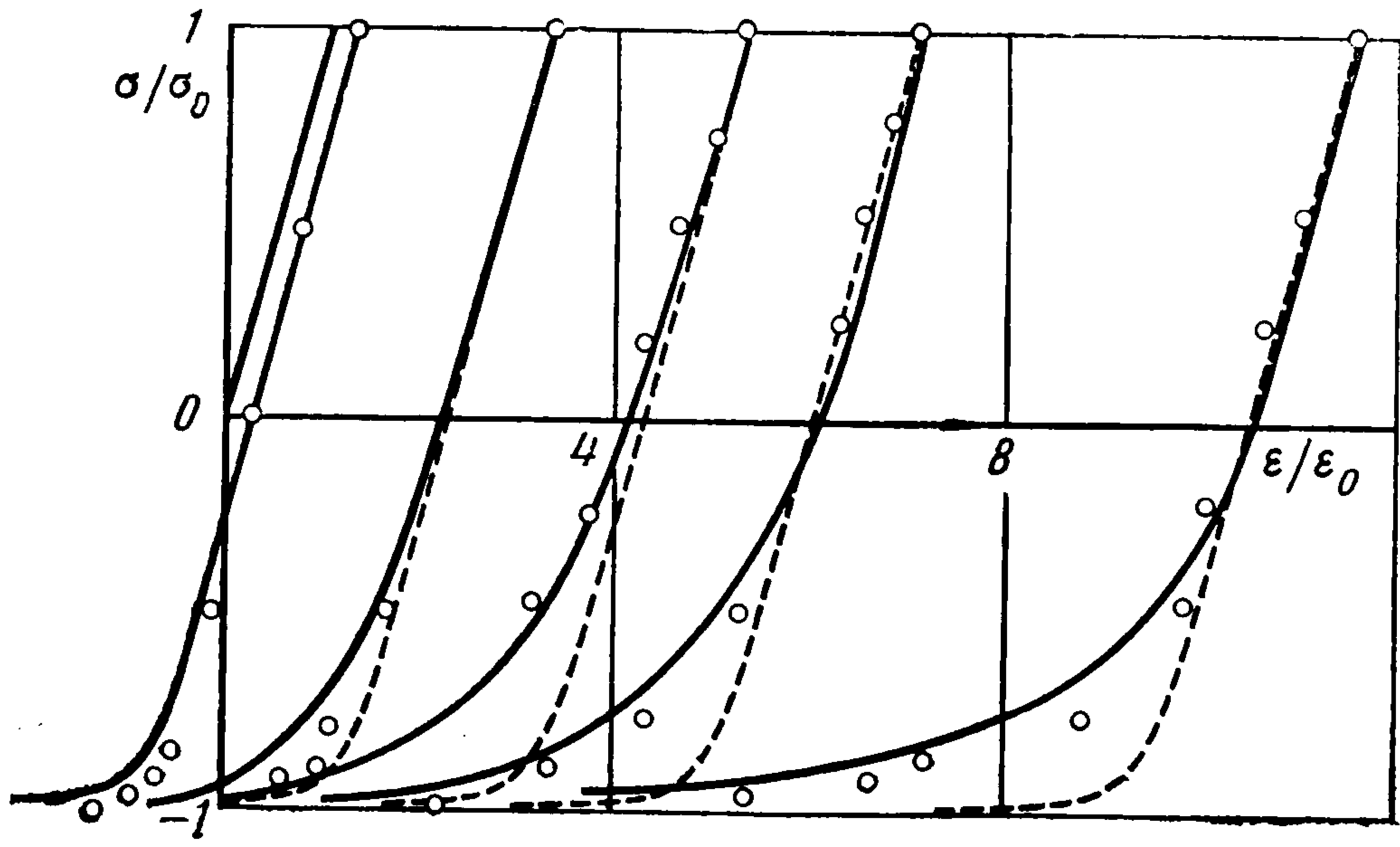
В отличие от классических теорий пластичности (типа теории течения) в ЭТП точка нагружения может лежать в слое пластичности вне УПТ. Это сближает ЭТП с классом двухповерхностных теорий пластичности [28, 29], причем внешняя граница слоя пластичности — поверхность $\sigma_u = \sigma_0(\xi)$ — в ЭТП аналогична предельной поверхности (поверхности нагружения) в двухповерхностных теориях пластичности, поверхность $\sigma_u = \sigma_\delta(\xi)$ (УПТ) соответствует поверхности текучести.

Как следует из (16) и определения $\sigma_0(\xi)$, изменение размеров предельной поверхности определяется функцией упрочнения, размеры же УПТ зависят существенно и от величины параметра χ . В большинстве работ по ЭТП считается, что χ — постоянный параметр, однако можно показать, что учет зависимости χ от истории процесса деформации (нагружения), например в форме $\chi = \chi(\xi)$, позволяет более правильно учесть закономерности упругопластического деформирования и достичь лучшего согласия с экспериментальными результатами.

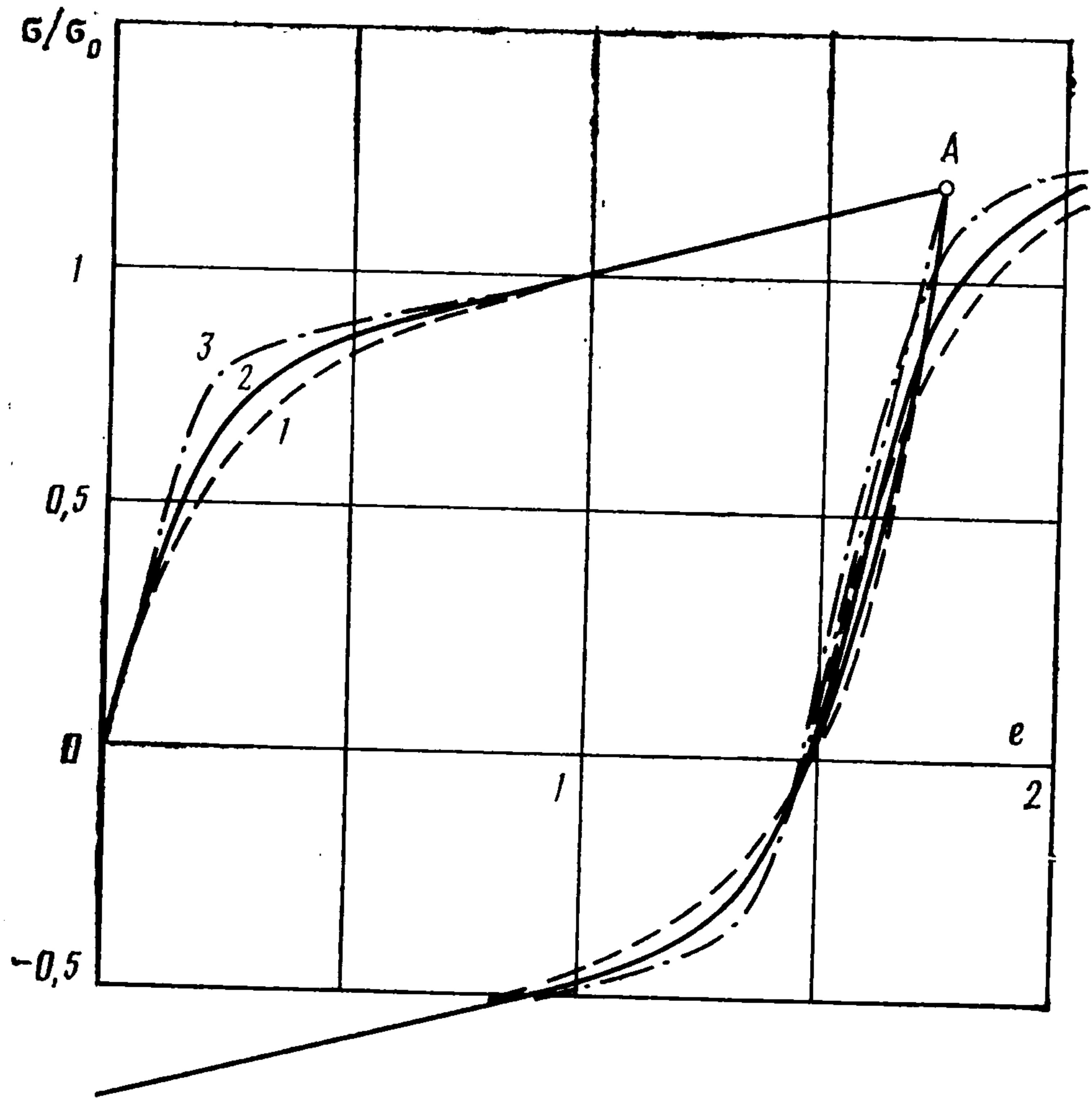
На фиг. 3 в координатах σ/σ_0 , $\varepsilon/\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = \sigma_0/E$) представлены кривые зависимости σ от ε при разгрузке (для одномерного процесса), рассчитанные по уравнению (12) при $f = 1$. Штриховые кривые соответствуют постоянному значению $\chi = 0,9$, сплошные линии — результаты расчета при простейшем предположении $\chi = 1 - \beta\varepsilon_0^{-1}\xi$, $\beta\varepsilon_0^{-1} \simeq 0,16$; точки соответствуют экспериментальным данным для стали S15C [30].

Учитывая зависимость χ от истории процесса нагружения, можно деформацию УПТ и предельной поверхности рассматривать независимо.

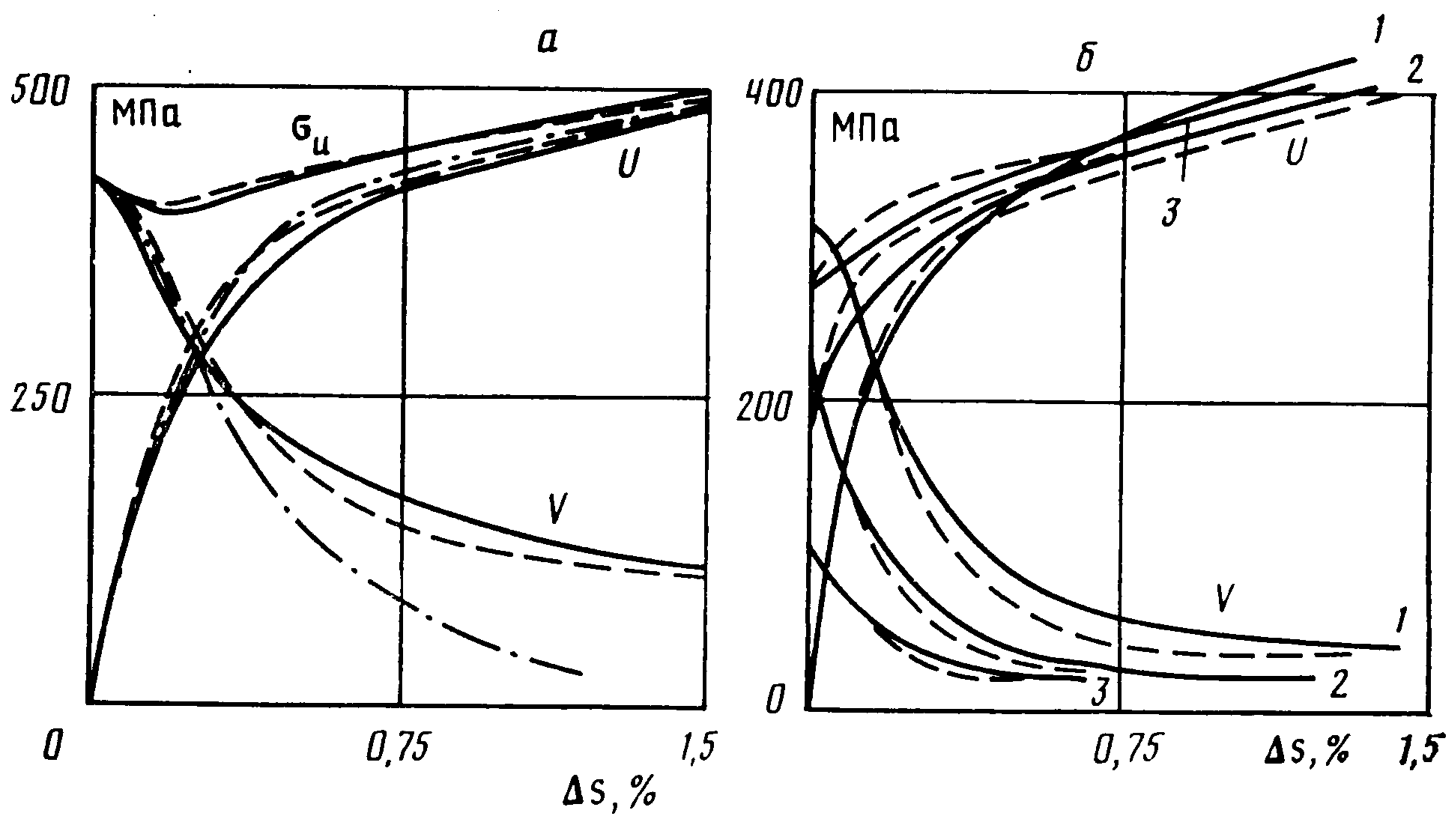
От модели (13) с изотропным упрочнением можно перейти в рамках ЭТП к моделям с трансляционным (в смысле УПТ) упрочнением. Это достигается заменой ядра: $J \rightarrow \mu + J$, где μ — модуль упрочнения, или заменой в (2): $\sigma \rightarrow \sigma - \mu\varepsilon$ (аналогично $\sigma \rightarrow \sigma - \mu\varepsilon_p$). Можно проверить, что в этом случае неравенство (15) примет вид $|\sigma - \mu\varepsilon| < \sigma_\delta(\xi)$. Значит, УПТ по-прежнему будет сферой радиуса $\sigma_\delta(\xi)$, но теперь ее центр сдвинут в точку $\mu\varepsilon$, как и должно быть при трансляционном упрочнении. Аналогично предельная поверхность будет определяться равенством $|\sigma - \mu\varepsilon| = \sigma_0(\xi)$, следовательно, в точку $\mu\varepsilon$ свинут центр всего слоя пластичности.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Определяющее уравнение простейшей модели ЭТП с линейным упрочнением трансляционного типа (ядро функционала (4) взято в виде $J(z) = \mu + E \exp(-\alpha z)$, $\alpha = E/\sigma_0$) можно записать следующим образом:

$$d\sigma = (E + \mu) de - \alpha (\sigma - \mu e) d\xi \quad (17)$$

где μ имеет смысл модуля упрочнения, а σ_0 — предела точности.

Поведение материала, описываемого моделью (17), при одноосном нагружении и последующей разгрузке показано на фиг. 4.

Параметры модели E , σ_0 и μ постоянны и соответствуют параметрам модели ЭТП с линейным упрочнением изотропного типа, поведение которой показано на фиг. 1. Как и прежде, параметр χ принимал значения 0; 0,5; 0,95 для кривых 1, 2, 3 соответственно, $e = \epsilon E/\sigma_0$.

На фиг. 5 приведено сопоставление предсказаний модели (17) (штриховые линии) с результатами экспериментов (сплошные линии) по сложному нагружению стали 45 [10]. Траектории деформации в опытах были двузвенными ломаными с углом излома $\theta_0 = 90^\circ$ при $s_0 = 2,16\%$ (для фиг. 5, а) и $\theta_0 = 23, 46, 90^\circ$, (для фиг. 5, б), $U = \sigma_u \cos \theta$, $V = \sigma_u \sin \theta$, $\chi = 0,9$. Для сравнения штрихпунктирной линией на фиг. 5, а показаны кривые, рассчитанные на основе модели ЭТП с линейным упрочнением изотропного типа.

Допуская зависимость μ от ξ или же рассматривая функционалы с более сложными ядрами, можно учесть нелинейные эффекты при упрочнении трансляционного типа.

Многочисленные эксперименты показывают, что построенная по заданному допуску поверхность текучести может в процессе деформации не только перемещаться в пространстве напряжений, изотропно изменяя свои размеры, но и заметно менять форму. При этом фронтальная часть поверхности текучести перемещается медленнее тыльной части, которая в процессе деформации становится более плоской. Поперечные размеры поверхности текучести часто остаются неизменными, т. е. отсутствует «поперечный» эффект Баушингера (правило Филлипса) [31, 32]. Следует, однако, иметь в виду, что правило Филлипса выполняется не всегда [33].

В рамках ЭТП указанные выше особенности деформации поверхности текучести можно учесть, несколько изменив определяющие соотношения. Рассмотрим снова модель (12) и для простоты ограничимся процессами нагружения, лежащими в одной плоскости Σ_2 .

Пусть O — начало координат в Σ_2 , \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 — единичные ортогональные векторы базиса. Перейдем к полярным координатам с центром в O , тогда положение любой точки на траектории нагружения будет определяться интенсивностью напряжений σ_u и полярным углом θ , отсчитываем, например, от направления \mathbf{m}_1 . Будем считать, что деформационная анизотропия, возникшая в образце в процессе деформации, может быть описана функцией упрочнения f и параметром χ , выбранными в виде

$$f = f(\xi, \sigma_u, \zeta_\theta(\xi)), \quad \chi = \chi(\xi, \sigma_u, \zeta_\theta(\xi)) \\ \theta(\xi) = \arccos(\mathbf{m}_1 \boldsymbol{\sigma}(\xi) / \sigma_u(\xi))$$

Здесь $\zeta_\theta(\xi)$ — параметр, обеспечивающий зависимость f и χ от истории процесса нагружения (деформации). Определим его следующим образом.

$$\zeta_\theta(\xi) = \int_0^\xi \beta(\xi, \xi', \cos \gamma_\theta(\xi')) d\xi', \quad \cos \gamma_\theta(\xi') = \frac{\mathbf{m}_\theta d\sigma(\xi')}{|d\sigma(\xi')|}$$

(m_θ — единичный вектор, такой, что $m_1 m_\theta = \cos \theta (\xi)$). Иногда удобнее использовать другое определение

$$\zeta_\theta(\xi) = \int_0^\xi \beta_1(\xi, \xi', \cos \psi_\theta(\xi')) d\xi', \quad \cos \psi_\theta = \frac{m_\theta de(\xi')}{|de(\xi')|}$$

Конкретный вид функций f , χ , β , β_1 определяется свойствами материала. Как и прежде, движение УПТ в пространстве напряжений можно учесть при помощи замены $\sigma \rightarrow \sigma - \mu e$.

Рассмотрим простой пример. Пусть материал описывается уравнениями

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= Ede - \alpha [f(\zeta_\theta)]^{-1} \sigma_1 d\xi, \quad \sigma_1 = \sigma - \mu e \\ d\zeta_\theta &= \varphi(\cos \psi_\theta(\xi)) d\xi \\ \varphi(x) &= -k_- x h(-x) + k_+ x h(x), \quad 0 < k_+ < k_- \\ f(x) &= 1 - \beta(1 - e^{-\lambda x}), \quad \beta < 1 \end{aligned} \quad (18)$$

где $h(x)$ — функция Хевисайда, параметры α , β , λ , E , μ , χ , k_\pm будем считать постоянными, причем $\beta, \lambda > 0$. Пусть траектория деформации — двузвенная ломаная с углом излома θ_0 при $s = s_0$ (соответственно при $\xi = \xi_0$). Будем отсчитывать угол θ от направления первого звена, тогда при $s < s_0$ имеем $\cos \psi_\theta = \cos \theta$, $\zeta_\theta = \varphi(\cos \theta)\xi$, а при $s > s_0$ — соответственно $\zeta_\theta = \varphi(\cos \theta)\xi_0 + \varphi(\cos(\theta - \theta_0))(\xi - \xi_0)$. Пусть для определенности $\theta_0 = \pi/2$, $\chi = 0,95$.

В нижней правой части фиг. 6 сплошными линиями показаны начальная поверхность текучести (кривая 1) и последовательность УПТ для точек нагружения B , C , D , E . Штрихпунктиром обозначена траектория нагружения, штриховые окружности нанесены для сравнения и соответствуют учету только чисто трансляционного упрочнения. Параметры модели выбраны следующим образом:

$$\beta = 0,8; \quad k_+ \lambda = 10^{-3}; \quad k_-/k_+ = 15; \quad E/\sigma_0 = 1, \quad \mu/E = 0,1; \quad \delta = 0,2$$

В левой верхней части фиг. 6 приведена кривая зависимости σ от ε при простом нагружении для указанного материала, $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$.

На фиг. 7 сплошными линиями показаны начальная поверхность текучести 1 и три последовательные поверхности текучести 2, 3, 4, построенные после предварительного растяжения тонкостенного трубчатого образца, изготовленного из технически чистого алюминия марки 1100-0, до напряжений 46,5; 52,6 и 63,6 МПа соответственно [32]. Штриховыми линиями обозначены УПТ, соответствующие модели (18). При этом считалось, что $\zeta_\theta \approx \pm k_\pm \sigma_0 \mu^{-1} \cos \theta x$ (знак плюс относится к случаю $\cos \theta > 0$, минус — к случаю $\cos \theta < 0$), $x = \sigma_0^{-1} \Delta \sigma$, $\Delta \sigma = \sigma_z - \sigma_0$, причем $k_+ \lambda \mu^{-1} \sigma_0 \approx 4,5 \cdot 10^{-3}$, $k_- \lambda \mu^{-1} \sigma_0 \approx 2,38 \cdot 10^{-2}$, $\chi = 0,95$, $\beta \approx 0,84$. На фиг. 7 приведены только верхние половины соответствующих кривых (при $\tau > 0$), поскольку нижние половины (при $\tau < 0$) расположены симметрично относительно оси σ_z .

Графики зависимостей $y_+ = f(\zeta_0)$ и $y_- = f(\zeta_\pi)$ от x приведены на фиг. 8 (верхняя и нижняя кривая соответственно), точки со знаками плюс и минус внутри отвечают экспериментальным данным, представленным на фиг. 7.

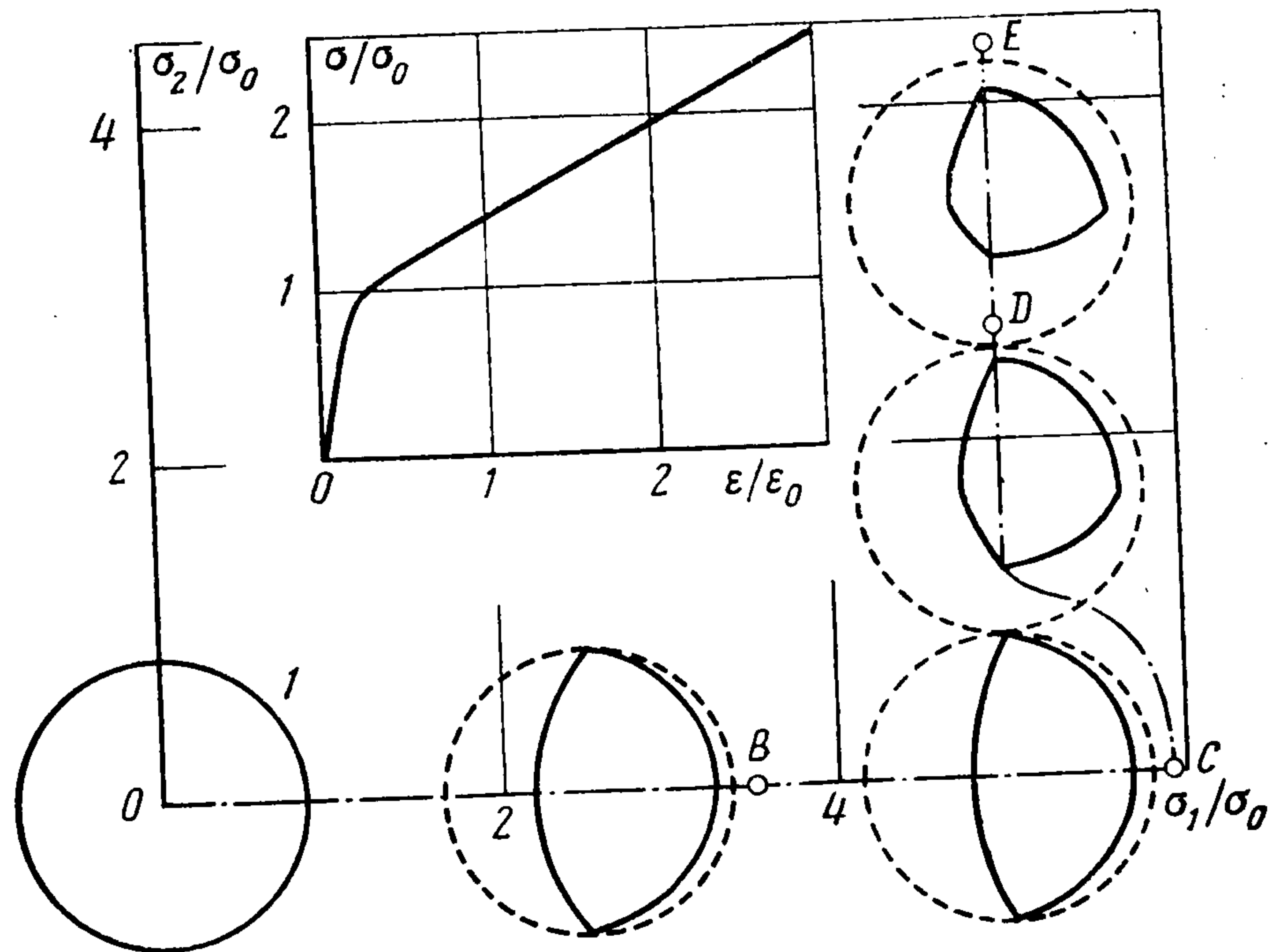
Из фиг. 6 и 7 видно, что рассматриваемая модель удовлетворяет правилу Филлипса. Появлению угловых точек на УПТ не следует придавать особого значения (хотя в их пользу, возможно, говорят некоторые недавние экспериментальные результаты [34]), поскольку они связаны с выбором законов упрочнения в форме (18). Закон деформации УПТ можно выбрать так, что гладкость ее в течение процесса деформации будет сохраняться. Другой подход к определению меры внутреннего времени был намечен в работах [11, 35, 36]².

Избрав инкрементальную форму ЭТП, Бажант [11] записал функционал пластичности в виде

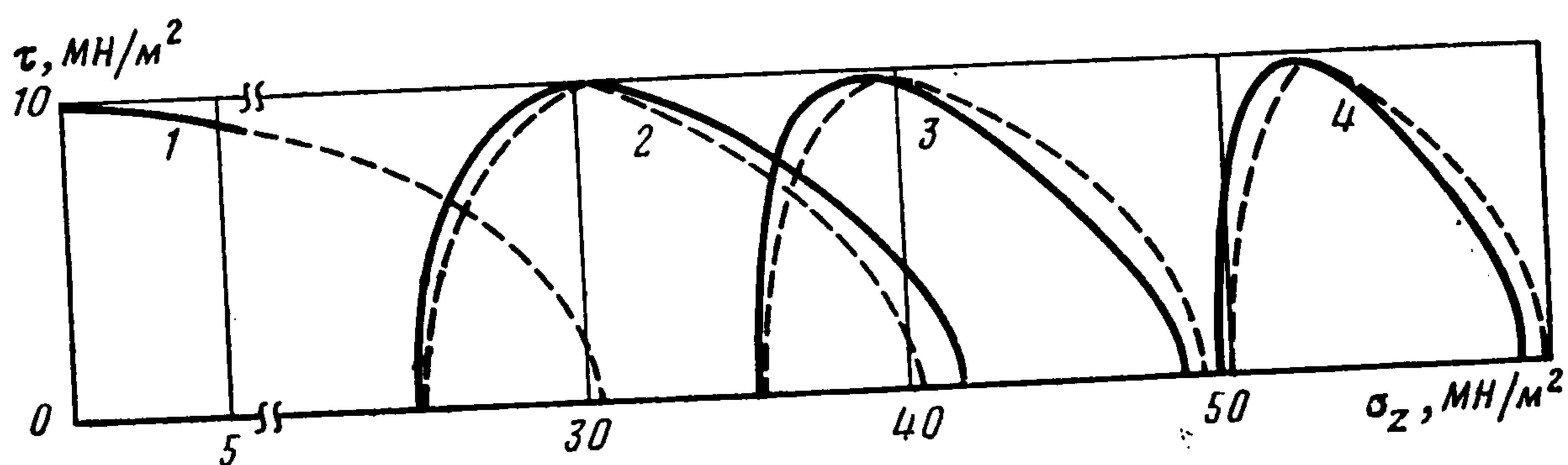
$$\sigma = F_1 de + F_2 \sigma dz, \quad dz = F_3 ds$$

где F_1 , F_2 , F_3 — функции σ , e , z . Для горных пород и бетона была предложена очень сложная конкретизация этих функций, зависящая от большого числа параметров [35, 36]. Это позволило получить хорошее

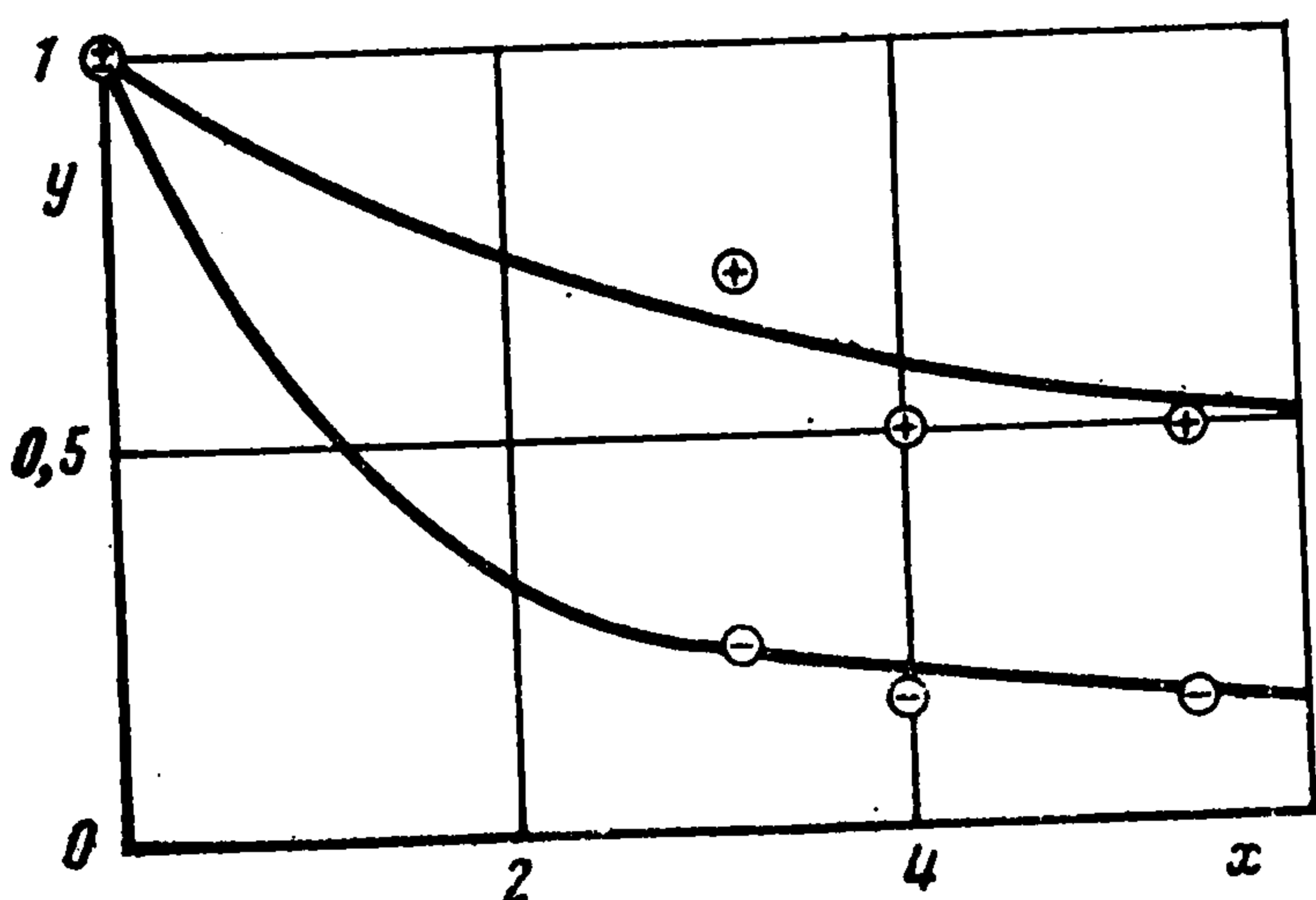
² См. также сноску на стр. 322.



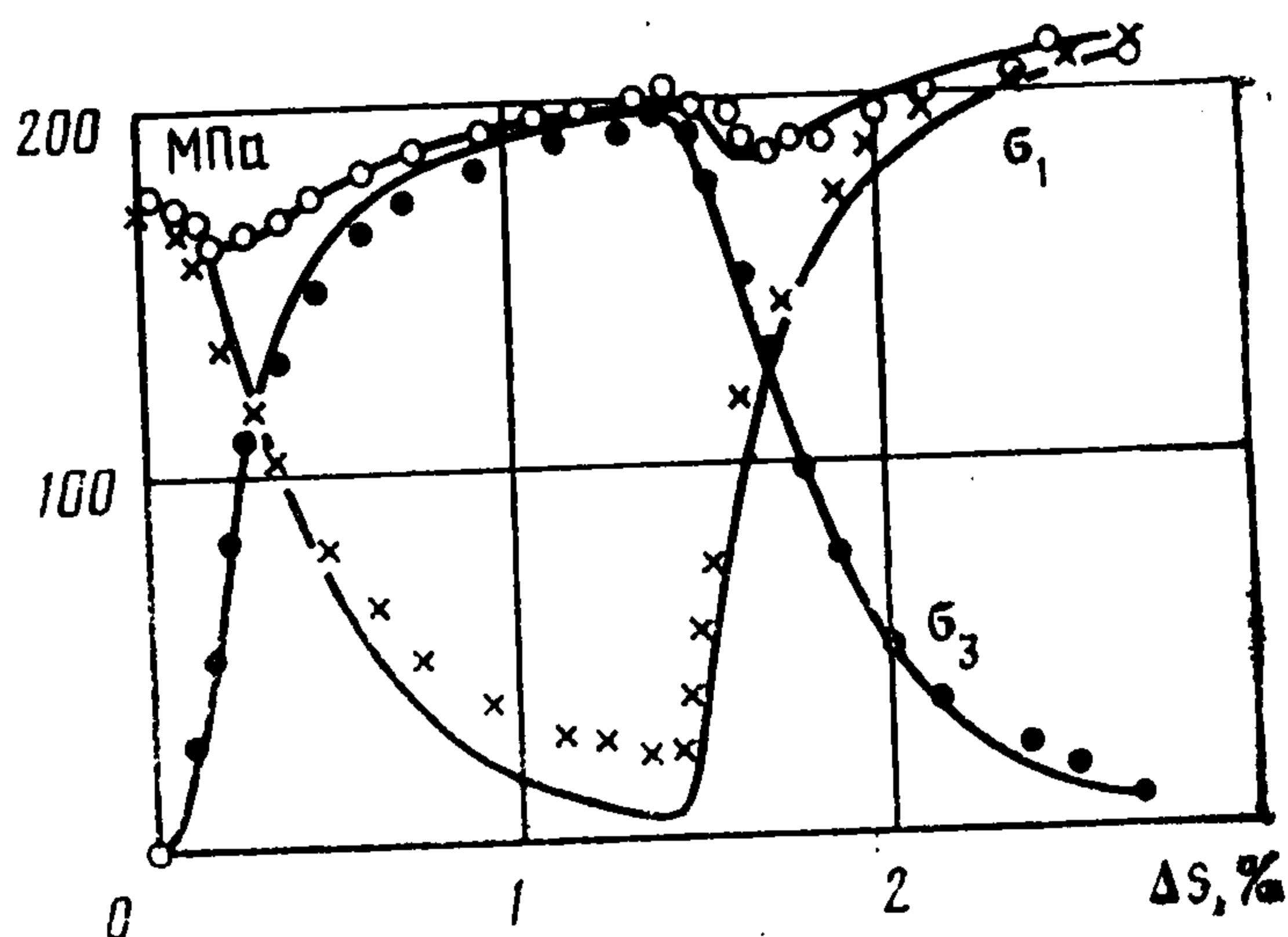
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

согласие экспериментальных и расчетных данных для различных режимов нагружения, однако определение параметров, входящих в F_1 , F_2 и F_3 , из данных экспериментов весьма затруднительно.

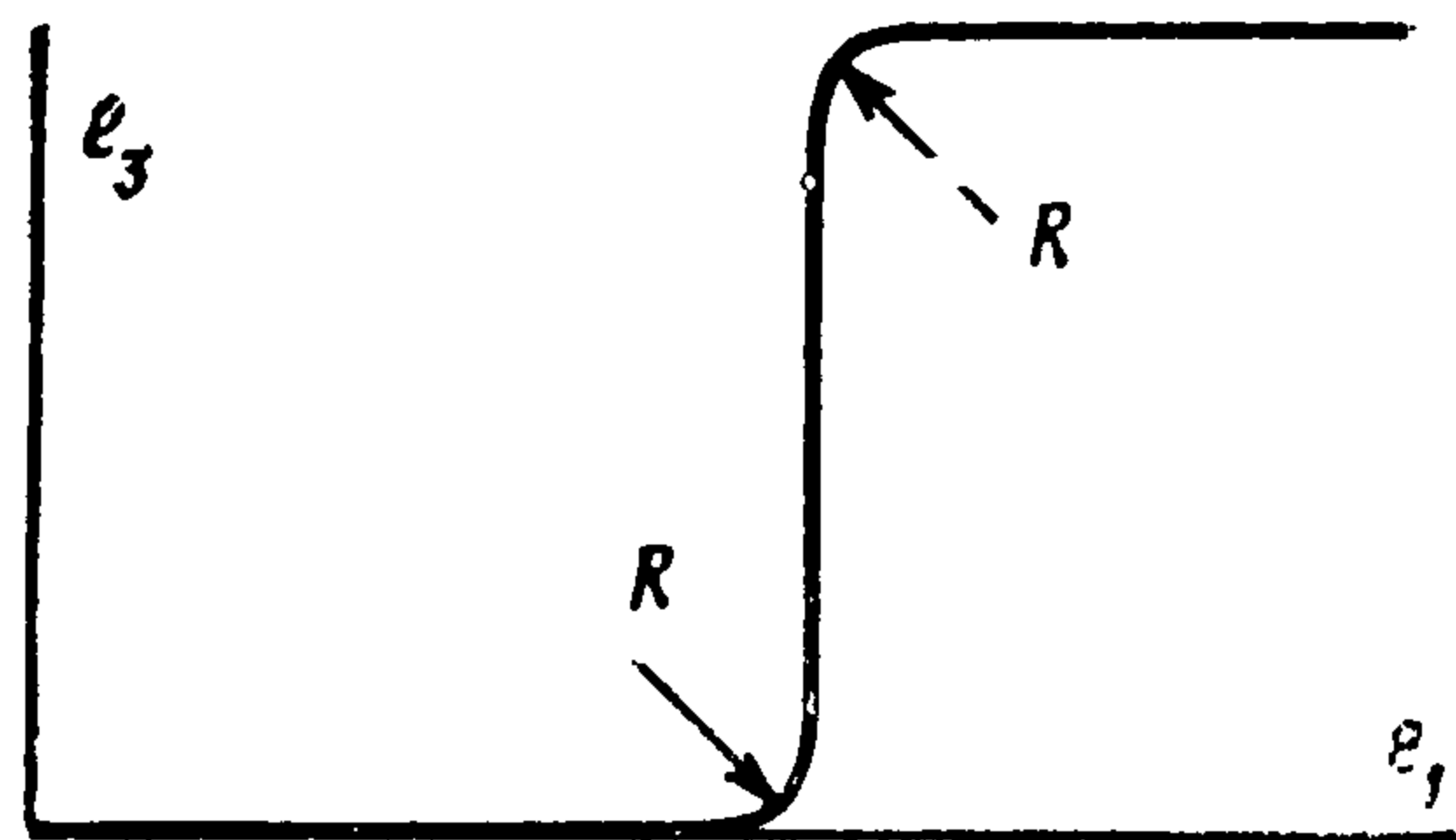
Обобщая приведенные выше варианты выбора z , можно считать, что мера внутреннего времени должна выбираться так, чтобы правильно учитывать характер (активный или пассивный) процессов деформации. Положим поэтому $dz = \varphi(s, \{\beta\}) ds$, где $\{\beta\}$ — совокупность параметров, обеспечивающих учет «сложности» процессов деформации. Вид функции φ и параметров $\{\beta\}$ требуют дополнительного исследования, но в качестве простого и достаточно общего предположения можно воспользоваться, имея в виду соотношение (13), обобщенной гипотезой локальной определенности и считать, что $\{\beta\} = \{\sigma_u(s), \theta(s)\}$, т. е.

$$dz = \varphi(s, \sigma_u, \theta) ds \quad (19)$$

Естественно принять, что φ — четная убывающая функция θ , $0 \leq \varphi \leq 1$. Учитывая, что для процессов, близких к простым, вполне адек-

ватным параметром истории является длина дуги s , можно считать, что φ также удовлетворяет условию $\varphi(s, \Phi(s), 0) = 1$, где $\Phi(s)$ — функция упрочнения при простом нагружении.

Приведем пример использования модели (4), (19) для описания экспериментов на сложное нагружение. На фиг. 9 представлены результаты опытов по двухосному деформированию латуни (светлые точки соответствуют значениям σ_u , крестики и темные точки — значениям σ_1 и σ_3) [37]. Траектория деформации представляла собой трех-



Фиг. 10

звенную S -образную ломаную со скруглениями радиуса $R = 0,09\%$ в точках излома (фиг. 10). Нелинейное упрочнение латуни предложено описывать уравнением

$$\Phi(s) = 106,7 + 51,3\sqrt{s} \text{ (МПа)}, s > 0,5\%$$

Для описания экспериментов воспользуемся моделью (4), (19) при

$$J(z) = E \exp(-\alpha z), \quad \varphi(s, \sigma_u, \theta) = \frac{E}{\alpha \Phi(s)} \left(\frac{\sigma_u}{\Phi(s)} \right)^k \cos^{2\nu} \frac{\theta}{2} \\ \alpha = E/\Phi(s_0)$$

где $k = 3$, $\nu = 1$, $s \geq s_0 = 1,5\%$; E имеет смысл модуля упругости. Расчетные кривые показаны на фиг. 9 сплошными линиями.

Аналогично можно определить параметры $\{\beta\}$ и в истокообразной теории пластичности (ИТП) (2), тогда функционал ИТП запишется в виде

$$\sigma = \int_0^s B(s, s', \sigma_u(s), \sigma_u(s'), \theta(s')) de(s') \quad (20)$$

Сравнивая (4), (19), и (20), можно заметить «дуальность» этих соотношений. Различаются они лишь тем, что в ЭТП геометрия процессов деформации учитывается в определении параметра внутреннего времени, а в ИТП — при выборе ядра B .

Иногда принимается, что справедливо частное свойство локальной определенности, согласно которому если после произвольного процесса нагружения осуществить в некоторый момент $s = s_0$ излом траектории деформации так, чтобы направление вектора $p_0 = de/ds(s_0 + 0)$ совпадало с направлением вектора $\sigma(s_0 - 0)$ и затем продолжить деформирование по прямой, определяемой вектором p_0 , то вектор σ остается параллельным p_0 [38]. В этом случае можно показать, что ядра функционалов ЭТП и ИТП факторизуются, т. е. могут быть представлены в виде произведений

$$J(z, z') = J_1(z) J_2(z') \\ B(s, s', \sigma_u(s), \sigma_u(s'), \theta(s')) = B_1(s, \sigma_u(s)) B_2(s', \sigma_u(s'), \theta(s'))$$

В силу этого функционалы ЭТП и ИТП можно переписать в виде трехчленного соотношения пластичности [3, 39]

$$d\sigma = Nde - M\sigma ds$$

или в виде уравнений обобщенной гипотезы локальной определенности

$$\frac{d\sigma_u}{ds} = N \cos \theta - M\sigma_u, \quad \frac{d\theta}{ds} = \kappa - \frac{N}{\sigma_u} \sin \theta$$

где N и M могут быть функциями z , s , σ_u и θ .

Несмотря на явное сходство представлений функционалов ЭТП и ИТП, предсказания этих теорий в ряде случаев могут различаться. Дело в том,

что в ЭТП $N = N(z)$, а в ИТП $N = N(s, \sigma_u, \theta)$. Поэтому, при изломе траектории деформации предсказывает непрерывное изменение N , что согласуется с ранее высказанными предположениями о поведении этого функционала [1, 2, 39]. Иначе обстоит дело в ИТП, поскольку в этом варианте теории допускается зависимость N от θ , и, следовательно, при изломе траектории деформации N может меняться скачком. Имеются экспериментальные указания на то, что последнее больше соответствует действительности [40], хотя для прикладных расчетов обычно достаточно хорошим приближением является предположение, согласно которому N слабо меняется в процессе деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 6. С. 641—666.
2. *Ильюшин А. А.* Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР. 1961. С. 3—29.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.
4. *Ленский В. С.* Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 154—158.
5. *Ленский В. С.* О постановке краевой задачи общей теории пластичности // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1979. Вып. 6. С. 92—95.
6. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface // Arch. Mech. Stosow. 1971. V. 23. № 4. P. 517—551.
7. *Valanis K. C.* On the foundations of the anochronic theory of viscoplasticity // Arch. Mech. Stosow. 1975. V. 27. № 5/6. P. 857—868.
8. *Hsieh B. J.* Application of endochronic theory in multi-dimensional stress states // Nucl. Eng. and Des. 1981. V. 63. № 1. P. 143—155.
9. *Sandler I. S.* On the uniqueness and stability of endochronic theoreis of material behavior // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1978. V. 45. № 2. P. 263—266.
10. *Ленский В. С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. 1978. Вып. 5. С. 65—96.
11. *Бажант З.* Эндрахронная теория неупругости и инкрементальная теория пластичности // Механика деформируемых твердых тел: Направления развития. М.: Мир, 1983. С. 189—229.
12. *Rivlin R. S.* Some comments on the endochronic theories of material behavior // Intern. J. Solids Struct. 1981. V. 17. № 2. P. 231—248.
13. *Valanis K. C.* On the substance of Rivlin's remarks on the endochronic theory // Intern. J. Solids Struct. 1981. V. 17. № 2. P. 249—265.
14. *Мосолов А. Б.* Единственность в малом и устойчивость в одном варианте теории пластичности // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1980. Вып. 6. С. 84—86.
15. *Мосолов А. Б.* О соотношениях теории пластичности для двузвенных процессов деформации с искривленными звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 122—127.
16. *Кадашевич Ю. И., Михайлов А. Н.* О теории пластичности, не имеющей поверхности текучести // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 3. С. 574—576.
17. *Кадашевич Ю. И.* О новых тенденциях в развитии теории течения // Проблемы механики деформируемого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. Вып. 14. С. 15—20.
18. *Мосолов А. Б., Динарев О. Ю.* О траекториях с угловыми точками в теории пластичности без поверхности текучести // Пробл. прочности. 1986. № 10. С. 14—18.
19. *Valanis K. C., Read H. E.* A theory of plasticity for hysteretic materials. I. Shear response // Computer and Structures. 1978. V. 8. № 3/4. P. 503—510.
20. *Valanis K. C.* Fundamental consequences of a new intrinsic time measure: Plasticity as a limit of the endochronic theory // Arch. Mech. 1980. V. 32. № 2. P. 171—191.
21. *Кадашевич Ю. И.* О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. Вып. 6. С. 39—45.
22. *Ohashi Y.* Precise measurement and formulation of plastic behaviour of metals // Rozpr. inž. 1978. V. 26. № 3. P. 471—500.
23. *Wu H. C., Yang R. J.* Application of the improved endochronic theory of plasticity to loading with multiaxial strainpath // Intern. J. Non-Linear Mech. 1983. V. 18. № 5. P. 395—408.
24. *Valanis K. C.* Continuum foundation of endochronic plasticity // Trans. ASME: J. Eng. Mater. Technol. 1984. V. 106. № 4. P. 367—375.
25. *Wu H. C., Yang C. C., Chu S. C.* Further application on endochronic constitutive equation to loading with non-proportional axial-torsional strain-path // Intern. J. Non-Linear Mech. 1985. V. 20. № 1. P. 41—52.
26. *Watanabe O., Atluri S. N.* A new endochronic approach to computational elastop-

- lasticity: example of a cyclically loaded cracked plate // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1985. V. 52. № 4. P. 857—864.
27. *Watanabe O.* Anisotropic hardening law of plasticity using an internal time concept. (Deformations of yield surface) // Bull. JSME. 1987. V. 30. № 264. P. 912—920.
 28. *Krieg R. D.* A practical two surface plasticity theory // Trans ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1975. V. 42. № 3. P. 641—646.
 29. *Phillips A., Moon H.* An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces // Acta Mech. 1977. V. 27. № 1—4. P. 91—102.
 30. *Ohashi Y., Kawashima K.* Analysis of unloading on a thin circular plate of mild steel using actual unloading stress-strain relation // ZAMM. 1970. B. 50. H. 8. S. 467—478.
 31. *Phillips A.* Experimental plasticity. Some thought on its present status and possible future trends // Mech. Plast. Solids. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. 1974. V. 2. P. 193—233.
 32. *Phillips A., Tang J.-L.* The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures // Intern. J. Solids Structures. 1972. V. 8. № 4. P. 463—474.
 33. *Shiratori E., Ikegami K., Kaneko K.* Subsequent yield surface determined in consideration of the Bauschinger effect // Mech. Plast. Solids. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. 1973. V. 1. P. 477—489.
 34. *Gupta N. K., Lauert H. A.* A study of yield surface upon reversal of loading under biaxial stress // ZAMM. 1983. B. 63. H. 10. S. 497—504.
 35. *Bazant Z. P., Bhat P. D.* Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. 1976. V. 102. № 4. P. 701—722.
 36. *Bazant Z. P., Bhat F. D.* Prediction of hysteresis of reinforced concrete members // J. Struct. Div. Proc. ASCE. 1977. V. 103. № 1. P. 153—167.
 37. *Ohashi Y., Tokuda M., Miyake T., Kurita Y., Suzuki T.* Stress-strain relation of integral type for deformation of brass along strain trajectories consisting of three normal straight branches // Arch. Mech. 1980. V. 32. № 1. P. 125—143.
 38. *Мальй В. И.* Об упрощении функционалов теории упруго-пластических процессов // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 2. С. 48—53.
 39. *Васин Р. А., Ильюшин А. А.* Об одном представлении законов упругости и пластичности в плоских задачах // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 114—118.
 40. *Васин Р. А.* Об экспериментальной проверке одного закона, описывающего векторные свойства пластических материалов // Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 41—45.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1987