

УДК 539.374:534.1

А. Г. Быковцев

ПРЕЛОМЛЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН ЧИСТОГО СДВИГА В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В развитие результатов решения задачи о преломлении плоской упругой волны чистого сдвига произвольного профиля в идеальное упругопластическое полупространство [1] исследуются закономерности распространения ударной волны разгрузки. Строится аналитическое решение задачи о преломлении волны, имеющей форму ступени конечной длины, как в области активного пластического нагружения, так и в зоне разгрузки.

1. При распространении волн чистого сдвига среда находится в условиях антиплоской деформации, вектор скорости перемещений w направлен вдоль оси x_3 и зависит только от переменных x_1, x_2 и времени t , отличны от нуля только напряжения $\tau_1 = \sigma_{13}(x_1, x_2, t)$ и $\tau_2 = \sigma_{23}(x_1, x_2, t)$. Для этого случая уравнения динамики идеального упругопластического тела выписаны в работе [1]. В дальнейшем ограничимся изучением автомодельных решений уравнений динамики идеальных упругопластических сред, зависящих от двух переменных: $x = x_1 - ct$ и $y = x_2$. При этом в области активного пластического нагружения уравнения характеристик системы уравнений движения и соотношения вдоль характеристик имеют вид [1]

$$dy (M \pm \cos\theta) = \mp \sin\theta dx, \quad k\theta \pm \rho aw = \text{const} \quad (1.1)$$

Здесь k — предел текучести, ρ — плотность, μ — модуль сдвига, $a = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения поперечных упругих волн, M — число Маха, величина θ такова, что $\tau_1 = k \sin\theta$, $\tau_2 = k \cos\theta$, берутся соответственно только верхние или нижние знаки.

В упругой области и в зоне разгрузки имеет место общий интеграл [1]

$$c\tau_1 + \mu w = f(y) \quad (1.2)$$

а уравнения характеристик системы уравнений движения и соотношения вдоль характеристик имеют вид [1]

$$x \pm \sqrt{M^2 - 1} y = \text{const}, \quad \mu \sqrt{M^2 - 1} w \mp c\tau_2 = \text{const} \quad (1.3)$$

Пусть из упругого полупространства $y < 0$ с параметрами $\mu_1, \rho_1, a_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ на границу раздела $y = 0$ с упругопластическим полупространством $y > 0$, которое характеризуется параметрами $\mu_2, \rho_2, a_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}, k$, падает плоская волна чистого сдвига OA (фиг. 1), в результате взаимодействия которой с границей раздела образуется отраженная волна OB и преломленная волна OC . Перед фронтом преломленной волны OC материал находится в покое и начальные напряжения в нем отсутствуют. На границе раздела предполагается полный контакт упругого и упругопластического полупространства, т. е. на границе раздела $y = 0$ нормальное напряжение τ_2 и скорость перемещений w непрерывны, откуда имеем [1]

$$w(x) = w_1(-x \sin \varphi_1) + w_2(-x \sin \varphi_1) \quad (1.4)$$

$$\tau_2(x) = \mu^{-1} \text{ctg} \varphi_1 (w_2(-x \sin \varphi_1) - w_1(-x \sin \varphi_1)), \quad \mu = \mu_2/\mu_1$$

На ударной ВР должно выполняться условие сохранения импульса [4], которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$[\tau_1]v_1 + [\tau_2]v_2 + c_1 a_2^{-1} M [w] = 0 \quad (2.1)$$

Здесь v_1, v_2 — проекции вектора нормали на оси x, y , c_1 — скорость ВР, $[\tau] = \tau^+ - \tau^-$, τ^+, τ^- — предельные значения τ на ВР соответственно со сторон области пластического нагружения и области разгрузки.

Было показано [5], что скачки пластических деформаций возникают только в особых случаях, поэтому пластические деформации непрерывны на фронте ВР. Используя закон Гука, кинематические и геометрические условия совместности [5], для скачков напряжений получаем

$$[\tau_i] = -c c_1^{-1} v_i [w], \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

Подставляя соотношения (2.2) в уравнение (2.1) и учитывая, что $v_1 = \sin \varphi$, $v_2 = \cos \varphi$, получаем

$$[w] (\mu_2 - \rho_2 c_1^2) = 0 \quad (2.3)$$

Из уравнения (2.3) следует, что скорость распространения ударной ВР равна скорости распространения упругих волн $c_1 = a_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$ и соотношения на линии разрыва (2.2), принимают вид

$$[\tau_1] = -[w], \quad [\tau_2] = -\sqrt{M^2 - 1} [w], \quad c = a_2/\sin \varphi, \quad M = c a_2^{-1} \quad (2.4)$$

Здесь φ — угол преломления, такой, что

$$a_1 \sin \varphi = a_2 \sin \varphi_1 \quad (2.5)$$

Если за фронтом ВР материал находится в упругом состоянии, то из условия текучести и соотношений (2.4) следует ограничение на величину скачка скорости

$$2[w] (\tau_1^+ + \sqrt{M^2 - 1} \tau_2^+) + M^2 [w]^2 \leq 0 \quad (2.6)$$

В неравенстве (2.6) оставалась неопределенной величина $[w]$.

Предположим, что за фронтом ВР материал находится в упругом состоянии, т. е. условие (2.6) выполняется. Уравнение ударной ВР имеет вид

$$x + \sqrt{M^2 - 1} y = x_N \quad (2.7)$$

Здесь x_N — точка границы раздела, из которой начинает распространяться ВР.

На линии (2.7) имеет место второе соотношение (1.3) с верхним знаком, которое запишем в виде

$$\sqrt{M^2 - 1} w^- - \tau_2^- = \sqrt{M^2 - 1} w_N^- - \tau_{2N}^- \quad (2.8)$$

Здесь и в дальнейшем нижний буквенный индекс у величин $x, \tau_1, \tau_2, w, \theta$ (например, индекс N в уравнении (2.8)) означает, что соответствующая величина вычисляется в точке, обозначенной этой буквой на фиг. 1. Величины w^- и τ_2^- вычисляются в произвольной точке линии (2.7) в зоне разгрузки.

Из соотношений (2.4) для произвольной точки ВР в том числе и для точки N имеем

$$\sqrt{M^2 - 1} w^- + \tau_2^- = \sqrt{M^2 - 1} w^+ + \tau_2^+ \quad (2.9)$$

Краевое условие на границе раздела (1.6) в зоне разгрузки для точки N можно записать в виде

$$2w_1 (-x \sin \varphi_1) = w_N^- - \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \tau_{2N}^- \quad (2.10)$$

Система уравнений (2.8)—(2.10) позволяет определить величины τ_2^- и w^- в зоне разгрузки на линии (2.7), если решение в области активного пластического нагружения перед фронтом ВР известно.

Вначале предположим, что в точке N компоненты тензора напряжений τ_1 , τ_2 и скорость перемещений w терпят разрыв. Тогда, записывая соотношения (2.9) для точки N и решая его совместно с уравнением (2.10), можно определить величины τ_{2N}^- и w_N^- , а затем из уравнений (2.8) и (2.9) определяются величины τ_2^- и w^+ и в произвольной точке ВР

$$\begin{aligned} w^- &= A + B^+ / \sqrt{M^2 - 1}, \quad \tau_2^- = -A \sqrt{M^2 - 1} + B^- \quad (2.11) \\ A &= \frac{2w_1(-x_N^- \sin \varphi_1) \Delta}{\Delta + \cos \varphi}, \quad B^\pm = \frac{F(x^+) \pm \Delta_1 F(x_N^+)}{2} \\ \Delta &= \mu^{-1} \sin \varphi \operatorname{ctg} \varphi_1, \quad \Delta_1 = (\cos \varphi - \Delta) / (\Delta + \cos \varphi) \\ F(x^+) &= \sqrt{M^2 - 1} w^+ + \tau_2^+ \end{aligned}$$

Полученные соотношения (2.11) позволяют записать с использованием уравнений (2.4)

$$\begin{aligned} \tau_1^- &= \tau_1^+ - A + C / \sqrt{M^2 - 1} \quad (2.12) \\ C &= 1/2 (\sqrt{M^2 - 1} w^+ - \tau_2^+ - \Delta_1 F(x_N^+)) \end{aligned}$$

Построенное решение имеет место в случае, когда выполняется условие (2.6), которое, используя соотношения (2.11), можно представить в виде

$$2(\tau_1^+ + \tau_2^+ \sqrt{M^2 - 1}) + M^2(A + C / \sqrt{M^2 - 1}) \leq 0 \quad (2.13)$$

Условие (2.13) записано для $[w] > 0$. Если $[w] < 0$, то в неравенстве (2.13) следует заменить знак \leq на знак \geq .

Рассмотрим другой возможный случай, когда в точке N напряжения и скорость перемещений непрерывны, но в дальнейшем на ударной ВР образуются скачки τ_1 , τ_2 , w . Тогда

$$w_N^+ = w_N^-, \quad \tau_{1N}^+ = \tau_{1N}^-, \quad \tau_{2N}^+ = \tau_{2N}^-$$

В этом случае для произвольной точки ВР интеграл (2.8) и второе условие на линии сильного разрыва (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \sqrt{M^2 - 1} w^- - \tau_2^- &= \sqrt{M^2 - 1} w_N^+ - \tau_{2N}^- \quad (2.14) \\ \sqrt{M^2 - 1} w^- + \tau_2^- &= \sqrt{M^2 - 1} w^+ + \tau_2^+ \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (2.14), получим выражения для τ_2^- и w^- , при помощи которых определяются скачки w и τ_2 в произвольной точке ВР

$$[w] = \frac{w^+ - w_N^+}{2} - \frac{\tau_2^+ - \tau_{2N}^+}{2\sqrt{M^2 - 1}} \quad (2.15)$$

$$[\tau_2] = \frac{\tau_2^+ - \tau_{2N}^+}{2} - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{2} (w^+ - w_N^+)$$

Из первого соотношения (2.15), вследствие того что в области пластического нагружения $0 \leq w^+ \leq w_N^+$, $\tau_{2N}^+ \leq \tau_2^+ \leq 0$ [1], следует, что $[w] < 0$, и условие (2.6) принимает вид

$$2(\tau_1^+ + \tau_2^+ \sqrt{M^2 - 1}) + M^2 \left(\frac{w^+ - w_N^+}{2} - \frac{\tau_2^+ - \tau_{2N}^+}{2\sqrt{M^2 - 1}} \right) \geq 0 \quad (2.16)$$

Но из решения области активного пластического нагружения [1] следует, что в левой части неравенства (2.16) стоит отрицательная величина. Значит, условие (2.16) может быть выполнено только в случае,

когда его левая часть равна нулю, т. е. при $\tau_1^+ = \tau_2^+ = 0$. Это невозможно, так как материал перед фронтом ВР находится в пластическом состоянии.

Следовательно, в случае, когда компоненты тензора напряжений и скорость перемещений непрерывны в точке N , ударная ВР распространяться не может.

На ВР скачок скорости перемещений оказывается положительным.

Действительно, из уравнений (2.4) следует

$$\tau_1^- = \tau_1^+ + [w], \quad \tau_2^- = \tau_2^+ + \sqrt{M^2 - 1} [w] \quad (2.17)$$

Так как величины $\tau_1^+ \leq 0$ и $\tau_2^+ \leq 0$ в пластической области [1], то из уравнений (2.17) следует, что при $[w] < 0$ величины τ_1^- и τ_2^- одновременно увеличиваются по абсолютной величине и поэтому $(\tau_1^-)^2 + (\tau_2^-)^2 > 1$, что противоречит условию пластичности.

В дальнейшем ограничимся исследованием только случая $[w] > 0$ на ВР.

Из первого уравнения (2.11) следует, что условие отсутствия скачка напряжений и скорости перемещений в точке N имеет вид

$$2w_1(-x_N^- \sin \varphi_1) = w_N^+ - \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \tau_{2N}^+$$

Таким образом, скачок напряжений и скорости перемещений в точке N упругопластического полупространства отличен от нуля (и следовательно, ВР является ударной волной) в двух случаях: во-первых, когда функция $w_1(-x \sin \varphi_1)$ в точке N терпит разрыв (например, если падающая волна имеет форму ступени), во-вторых, когда в точке N нарушается выполнение краевого условия на границе раздела.

3. Воспользуемся полученными соотношениями для исследования преломления волн сдвига, проходящих из упругого полупространства в упругопластическое, в случае, когда профиль падающей волны имеет вид ступени конечной длины l , т. е.

$$w_1(-x \sin \varphi_1) = \begin{cases} w_0 = \text{const}, & x_N \leq x < 0 \\ 0, & x < x_N \end{cases}$$

Решение, полученное в [1] для случая падения волны произвольного профиля, позволяет легко построить решение поставленной задачи в упругой области и в области пластического нагружения за фронтом преломленной волны OC (фиг. 1).

Если интенсивность падающей волны w_0 удовлетворяет неравенству

$$2 |w_0| \leq \Delta_2/M, \quad \Delta_2 = 1 + \mu \operatorname{tg} \varphi_1 / \operatorname{tg} \varphi \quad (3.1)$$

то в упругопластическом полупространстве материал находится в упругом состоянии. Знак равенства в условии (3.1) соответствует условию достижения материалом упругопластического полупространства предела текучести. Скорость перемещений w и напряжения τ_1, τ_2 за фронтом волны OC постоянны

$$w = 2w_0/\Delta_2, \quad \tau_1 = -2w_0/\Delta_2, \quad \tau_2 = -2\sqrt{M^2 - 1} w_0/\Delta_2$$

Если неравенство (3.1) не выполняется, то материал в упругопластическом полупространстве деформируется пластически. В этом случае точка O является источником пакета волн. Ударная волна OC распространяется со скоростью упругих волн. Между характеристиками OC_1 и OE напряжения

и скорость перемещений постоянны. В этой зоне достигается предел текучести, но скорости пластических деформаций равны нулю. В области COE

$$w = \sin \varphi, \tau_1 = -\sin \varphi, \tau_2 = -\cos \varphi \quad (3.2)$$

Характеристика отрицательного направления семейства (1.1) наклонена к оси Ox под углом ψ , для которого имеем

$$\operatorname{tg} \psi = -\sin \varphi / (M + \cos \varphi)$$

В дальнейшем угол наклона характеристик отрицательного направления семейства (1.1) исходящих из точки O , уменьшается до величины ψ_1 , такой, что

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \sin \theta_1 / (M - \cos \theta_1) \quad (3.3)$$

В соотношении (3.3) величина θ_1 удовлетворяет краевому условию на границе раздела (1.4), которое запишем в виде

$$2\mu^{-1} \operatorname{ctg} \varphi_1 w_0 = \Delta (1 + \pi + \varphi - \theta_1) - \cos \theta_1 \quad (3.4)$$

За фронтом волны OE происходит пластическое деформирование материала. Напряжения и скорость перемещений в точках между характеристиками OE и OK определяются следующим образом

$$\tau_1 = \sin \theta, \tau_2 = \cos \theta, w = \sin \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta) \quad (3.5)$$

Здесь θ — корень уравнения, определяющего положение соответствующей характеристики семейства (1.1), проходящей через точку O

$$y = x \sin \theta / (M - \cos \theta) \quad (3.6)$$

где x, y — координаты точки, в которой вычисляются напряжения и скорость перемещений.

Между характеристикой OK и линией ON (фиг. 1) величины τ_1, τ_2, w принимают постоянные значения и вычисляются по формулам (3.5) при $\theta = \theta_1$.

В случае, когда интенсивность падающей волны удовлетворяет неравенству

$$|w_0| \geq \sqrt{\mu\rho} (2 \sin \varphi \cos \varphi_1)^{-1} (\Delta (1 + \varphi) + 1) \quad (3.7)$$

на границе раздела образуется зона проскальзывания. Характеристика OK в этом случае становится параллельной оси Ox . Линия OK — стационарная линия разрыва, на которой претерпевает разрыв скорость перемещения, а напряжение τ_2 непрерывно на линии OK [1]. Механизм образования и физическая интерпретация зоны проскальзывания подробно обсуждались в [1, 3]. В рассматриваемой постановке решение в области нагружения получается из решения, построенного в [1] в предельном случае, когда характеристики семейства (1.1) исходят из одной точки и на волновой картине (фиг. 1) упругая зона представлена лишь областью постоянного напряженного состояния.

В рассматриваемом случае BP NS , которая распространяется из точки N (фиг. 1), будет ударной волной, так как в точке N функция $w_1(x - \sin \varphi_1)$ терпит разрыв. Следовательно, BP распространяется со скоростью упругих волн и ее положение в плоскости xOy определяется уравнением (2.7).

Благодаря тому что известно уравнение BP , удастся построить аналитическое решение за фронтом волны NS методом характеристик.

Для определения величин τ_2 и w в произвольной точке M области разгрузки поступаем следующим образом. Через точку M проводятся характеристики семейств (1.3) MF и MP (фиг. 1). Из точки пересечения характеристики MP с границей раздела проводится до пересечения с BP харак-

теристика PG семейства (1.3) (с нижним знаком), вдоль последней имеет место соотношение, которое, используя формулы (2.11), можно представить в виде

$$\sqrt{M^2 - 1} w + \tau_2 = \sqrt{M^2 - 1} w_G^+ + \tau_{2G}^+ \quad (3.8)$$

В точке P , кроме этого, выполняется краевое условие (1.4), которое в зоне разгрузки принимает вид

$$w = \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \tau_2 \quad (3.9)$$

Решая совместно уравнения (3.8) и (3.9), определяем величины w и τ_2 в произвольной точке P границы раздела

$$\tau_{2P} = \Delta F(x_G^+) / (\Delta + \cos \varphi), \quad w_P = \mu \operatorname{tg} \varphi_1 \tau_{2P} \quad (3.10)$$

Это позволяет вычислить постоянную в соотношении вдоль характеристики MP

$$\sqrt{M^2 - 1} w - \tau_2 = \Delta_1 F(x_G^+) \quad (3.11)$$

Вдоль характеристики MF имеет место соотношение (1.3) (с нижним знаком), которое, используя выражение (2.11), можно представить в виде

$$\sqrt{M^2 - 1} w + \tau_2 = \sqrt{M^2 - 1} w_F^+ + \tau_{2F}^+ \quad (3.12)$$

Решая совместно уравнения (3.11) и (3.12), определяем напряжение τ_2 и скорость перемещений w в произвольной точке M зоны разгрузки

$$\tau_{2M} = 1/2 (F(x_F^+) - \Delta_1 F(x_G^+)), \quad w_M = 1/2 \operatorname{tg} \varphi (F(x_F^+) + \Delta_1 F(x_G^+)) \quad (3.13)$$

Отметим некоторые особенности построенного решения. Вдоль отрезка NK в зоне разгрузки величины τ_2 и w определяются по формулам (2.11) и, так как $\tau_2^+ = \tau_{2N}^+$, $w^+ = w_N^+$ для любой точки отрезка NK , из соотношений (3.13) вытекает, что в области RKN величины τ_2 и w принимают постоянные значения. Отсюда следует, что вдоль отрезков характеристик семейства (1.3) (с нижним знаком), заключенных между характеристиками NS и JR (фиг. 1), величины τ_2 и w также остаются постоянными.

В области $SEOC$ материал не имеет пластических деформаций. Напряжения и скорость перемещений постоянны и определяются по формулам (3.2), поэтому вдоль линии SE (характеристики семейства (1.3) с верхним знаком) величины τ_2 и w и не изменяются. Следовательно, в области $JSEV$ τ_2 и w принимают постоянные значения (так как постоянные в соотношениях вдоль характеристик обоих семейств одни и те же для всех характеристик каждого семейства).

Из соотношений (3.13) для точек области $JSEV$ получаем

$$w = 1/2 \operatorname{tg} \varphi \Delta_1 F(x_N^+), \quad \tau_2 = 1/2 \Delta_1 F(x_N^+) \quad (3.14)$$

При выводе формул (3.14) учитывалось, что вдоль характеристик семейства (1.3) (с нижним знаком), пересекающих линию SE

$$\sqrt{M^2 - 1} w + \tau_2 = 0 \quad (3.15)$$

Решая совместно уравнения (3.9) и (3.15), находим $\tau_{2H} = w_H = 0$, т. е. в зоне TQH покой, напряжение τ_2 отсутствует.

Для определения напряжения τ_1 имеем соотношение (1.2), которое в зоне разгрузки вдоль линии $y = \operatorname{const}$ имеет вид

$$y = \operatorname{const}, \quad \tau_1 + w = \operatorname{const} \quad (3.16)$$

Из условий на линии сильного разрыва (2.4) для величины τ_1 получаем

$$\tau_1^- + w^- = \tau_1^+ + w^+ \quad (3.17)$$

причем величины τ_1^- , τ_1^+ , w^- , w^+ вычисляются в точке пересечения линии $y = \text{const}$ и ВР.

Из уравнений (3.16) и (3.17) следует, что в области разгрузки

$$y = \text{const}, \tau_1 + w = \tau_1^+ + w^+ \quad (3.18)$$

Вследствие того что величина w была определена выше, τ_1^+ и w^+ вычисляются в области пластического нагружения по формулам (3.5), из соотношений (3.19) определяем напряжение τ_1 в произвольной точке M зоны разгрузки (фиг. 1)

$$\tau_{1M} = \tau_{1L}^+ + w_L^+ - 1/2 \text{tg } \varphi \Delta_1 (F(x_F^+) + F(x_G^+)) \quad (3.19)$$

Из соотношений (3.19) следует, что после того, как за фронтом ВР устанавливается покой, в слое упругопластического полупространства глубиной h , прилегающем к границе раздела, напряжение τ_1 отлично от нуля. Величина остаточных напряжений равна

$$\tau_1^* = \tau_{1L}^+ + w_L^+ = \sin \theta_L + \sin \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_L) \quad (3.20)$$

Анализ соотношения (3.20) показывает, что остаточные напряжения положительны, величина τ_1^* принимает максимальное значение на границе раздела и уменьшается до нуля по мере увеличения координаты y . Распределение остаточных напряжений зависит от интенсивности падающей волны w_0 , параметров φ_1 , μ , ρ , но не зависит от длительности воздействия (т. е. от длины падающей волны l).

Заметим, что наибольшее значение τ_1^* принимает на границе раздела в случае, когда на ней возникает зона проскальзывания, и это значение при величине w_0 , удовлетворяющей условию (3.7), не зависит от w_0 .

Зависимость остаточных напряжений от интенсивности падающей волны w_0 представлена на фиг. 2 при следующих значениях параметров:

$$\varphi_1 = 80^\circ, \mu = 0,5, \rho = 0,6, l = 10$$

Из построений на фиг. 1 при помощи теорем геометрии получаем глубину слоя, в которой $\tau_1^* \neq 0$

$$h = \sin \varphi \sin 2\varphi_1 \sin \psi / [\sin \varphi_1 \sin (\varphi - \psi)] \quad (3.21)$$

Используя соотношения (3.3) и (2.5) при условии $\sin \varphi_1 \neq 0$, $\cos \varphi \neq 0$, выражение (3.21) можно преобразовать к виду

$$h = 2 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \mu l / \rho$$

Построенное решение позволяет определить интенсивность отраженной волны w_2 ($-x \sin \varphi_1$). Используя соотношения (1.4)₁ и (3.5), определяем величину w_2 ($-x \sin \varphi_1$) для точек границы раздела, лежащих перед фронтом ВР, т. е. при $x \in [x_N, 0]$

$$w_2(-x \sin \varphi_1) = w_0 - \mu \text{tg } \varphi_1 \cos \theta_1$$

Из соотношений (1.4) следует, что за фронтом ВР

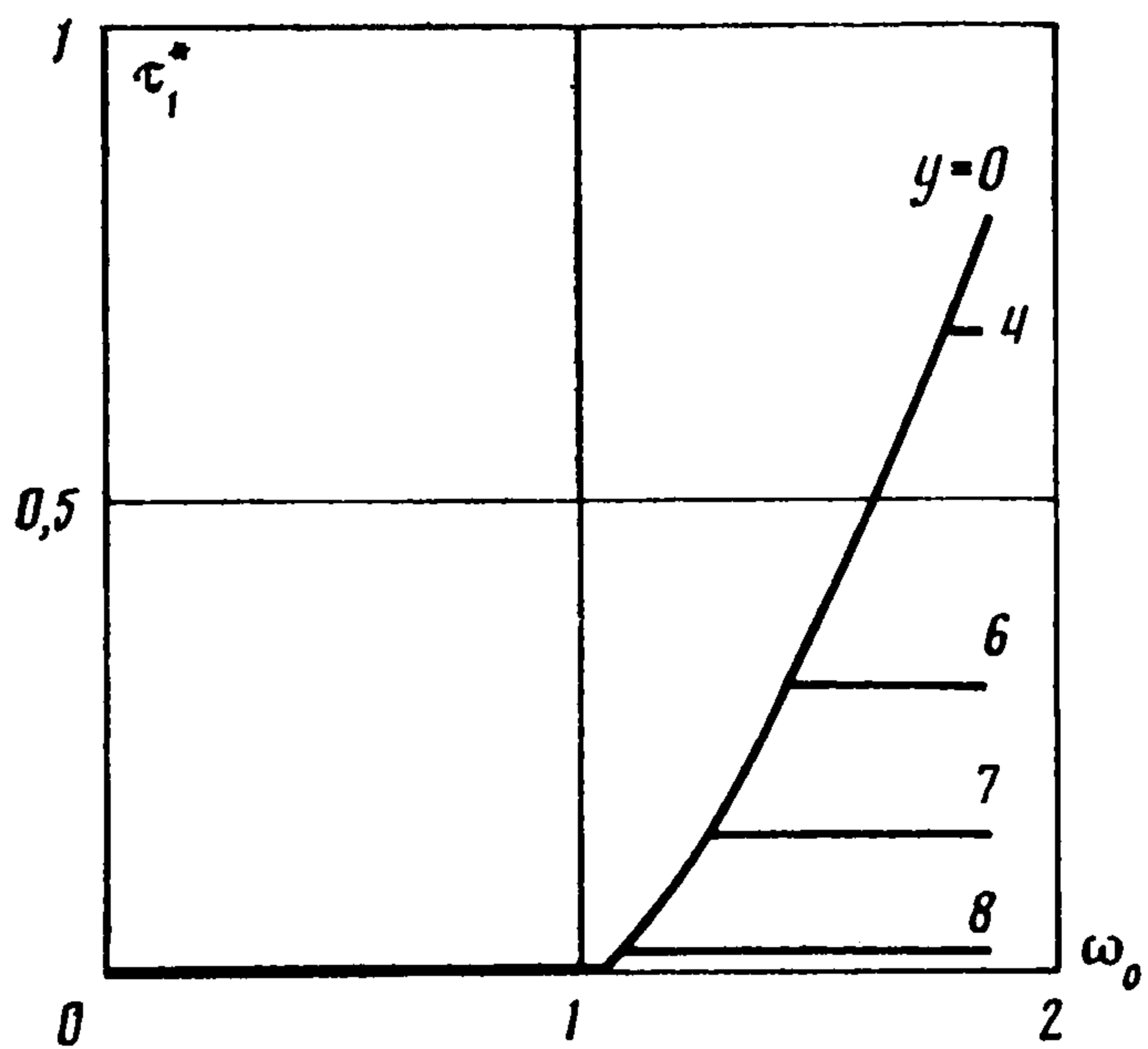
$$w_2(-x \sin \varphi_1) = w(x)$$

причем $w(x)$ вычисляется по формуле (3.10).

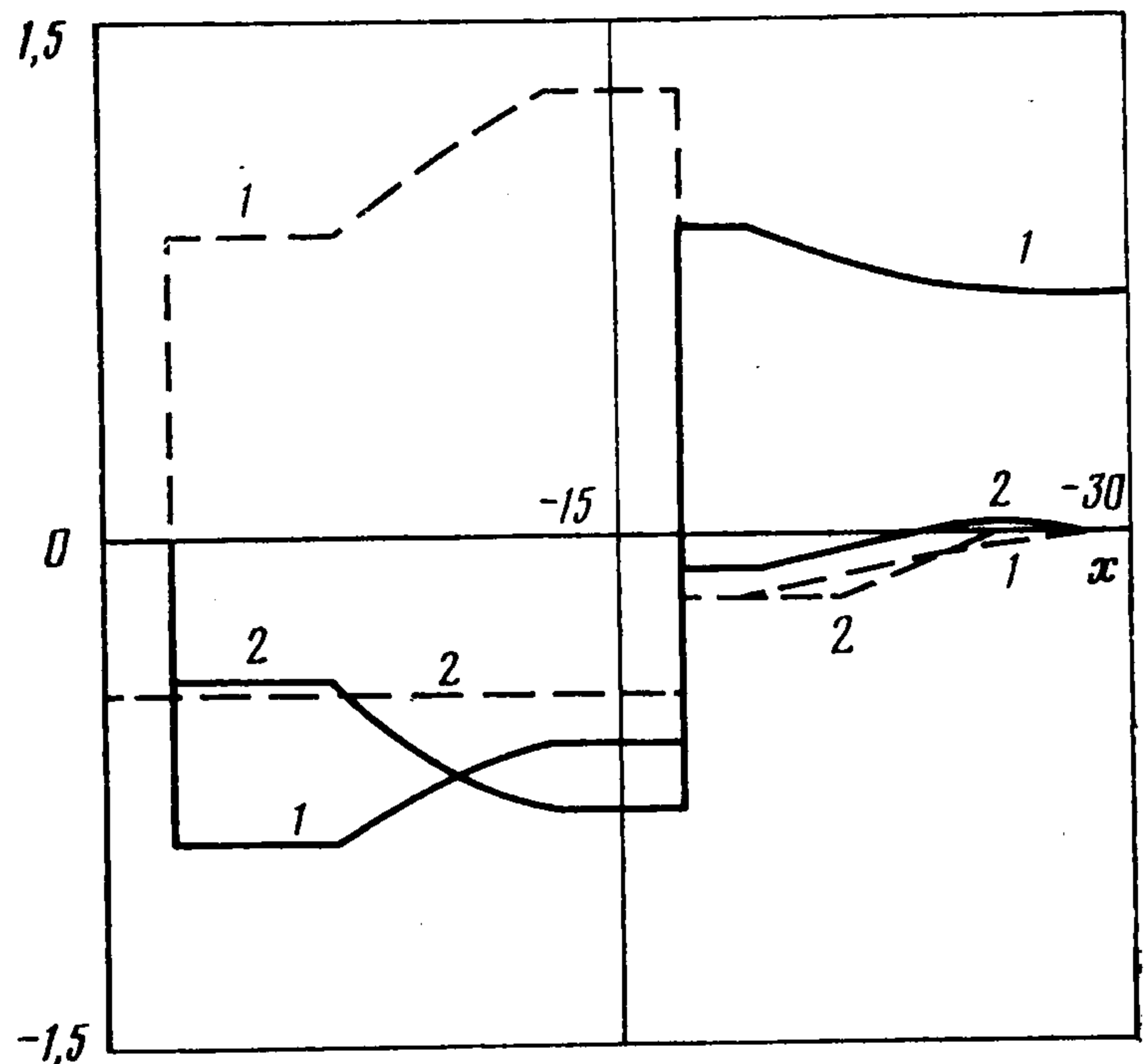
Качественные особенности построенного решения иллюстрируются графиками на фиг. 3 при следующих значениях параметров:

$$\varphi_1 = 80^\circ, \mu = 0,5, \rho = 0,6, w_0 = 1,8, l = 15$$

Приведены графики изменения напряжений τ_1 и τ_2 (сплошные кривые 1 и 2) за фронтом преломленной волны OC при $y = 4$. Аналогичная зави-



Фиг. 2



Фиг. 3

симось для скорости w представлена штриховой линией 1. Изменение интенсивности отраженной волны w_2 на границе раздела показано штриховой линией 2.

4. Построенное решение имеет место в случае, когда за фронтом ВР материал находится в упругом состоянии, т. е. напряжения, вычисленные по формулам (3.13) и (3.19), удовлетворяют неравенству

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 \leq 1 \quad (4.1)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения

$$z = 2 [\sin \theta_L + \sin \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_L)], \quad z_1 = \cos \theta_F + \cos \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_F) \quad (4.2)$$

$$z_2 = \cos \theta_G + \cos \varphi (1 + \pi + \varphi - \theta_G)$$

Тогда из соотношений (4.2), (3.13), (3.20) получаем

$$F_1 = F_1(z, z_1, z_2) = [z - \operatorname{tg} \varphi (z_1 + \Delta_1 z_2)]^2 + [z_1 - \Delta_1 z_2]^2 = 4 (\tau_1^2 + \tau_2^2) \quad (4.3)$$

Определим экстремумы функции F_1 . Определитель системы уравнений, полученных путем приравнивания нулю частных производных функции F_1 по z, z_1, z_2 , равен нулю. Следовательно, эта система имеет бесконечное множество решений вида

$$z_1^0 = \Delta_1 z_2, \quad z^0 = \Delta_1 z_2 \operatorname{tg} \varphi \quad (4.4)$$

Подстановка решений (4.4) в уравнение (4.3) дает $F_1(z^0, z_1^0, z_2) = 0$. Следовательно, функция F_1 принимает наибольшее значение на границе области определения своих аргументов.

Исследуем поведение функции F_1 на характеристиках семейства (1.3) (с нижним знаком). В этом случае поиск экстремумов функции F_1 сводится к задаче определения условного экстремума функции F_1 при условии

$$z_1 = \operatorname{const} \quad (4.5)$$

Из соотношений (4.3)–(4.5) и необходимого условия существования условного экстремума получаем, что функция F_1 может иметь условный экстремум лишь в точках $z_2^* = \Delta_1 z_1, z^* = \operatorname{tg} \varphi z_1$. Но $F_1(z^*, z_1, z_2^*) = 0$. Поэтому функция F_1 принимает наибольшее значение на характеристиках семейства (1.3) в точках пересечения последних с ВР или с границей раздела.

Вдоль характеристики NS семейства (1.3) (с верхним знаком) (фиг. 1) в области разгрузки упругое решение имеет место при выполнении условия (2.13), которое запишем в виде

$$F_2(\theta_F, \theta_N) = 2 (\sin \theta_F + \sqrt{M^2 - 1} \cos \theta_F) + 1/2 M (1 + \pi + \varphi - \theta_F - \Delta_1 (1 + \pi + \varphi - \theta_N)) - 1/2 (M^2 / \sqrt{M^2 - 1}) (\cos \theta_F + \Delta_1 \cos \theta_N) \leq 0 \quad (4.6)$$

(F — произвольная точка характеристики NS). Дифференцируя функцию $F_2(\theta_F, \theta_N)$

вдоль характеристики NS , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\mathbf{m}}} &= \frac{\partial F_2}{\partial \theta_F} \left(\frac{\partial \theta_F}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial \theta_F}{\partial y} \cos \alpha_2 \right) + \frac{\partial F_2}{\partial \theta_N} \left(\frac{\partial \theta_N}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial \theta_N}{\partial y} \cos \alpha_2 \right) = \\ &= \left(-\frac{2 \sin(\theta_F - \varphi)}{\sin \varphi} - \frac{M}{2} \left(1 - \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \sin \theta_F \right) \right) \left(-\frac{\partial \theta_F}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \theta_F}{\partial y} \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\bar{\mathbf{m}}$ — единичный вектор, задающий направление характеристики NS , с координатами $m_i = \cos \alpha_i$, α_i — углы между вектором $\bar{\mathbf{m}}$ и положительными направлениями осей координат. При выводе формулы (4.7) учтено, что величина θ_N в соотношении (4.6) остается постоянной для любой точки характеристики NS .

Из построенного ранее решения в области пластического нагружения имеем $\theta_F \in [\pi, \pi + \varphi]$, $\partial \theta_F / \partial x \leq 0$, $\partial \theta_F / \partial y \geq 0$. Поэтому из соотношения (4.7) получаем, что $\partial F_2 / \partial \bar{\mathbf{m}} \leq 0$. Следовательно, функция $F_2(\theta_F, \theta_N)$ принимает наибольшее значение в точке N . Но так как функция $F_1(z, z_1, z_2)$ на любой характеристике семейства (1.3) (с нижним знаком) принимает наибольшее значение в точке пересечения ее либо с границей раздела, либо с ВР, то получаем, что условие (4.1) может быть впервые нарушено в точках границы раздела. Таким образом, используя соотношения (3.10) и (3.19), заключаем, что построенное решение имеет место в случае, когда выполняется неравенство

$$[\tau_{1N}^+ + \omega_N \tau - \operatorname{tg} \varphi \Delta_1 F(x_G)]^2 + [F(x_G) \Delta_1 / (\Delta_1 + \cos \varphi)]^2 \leq 1$$

В противном случае за фронтом ВР возникают вторичные пластические течения и тогда построение решения требует отдельного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев А. Г. Преломление плоскополяризованных волн на границе упругого и упругопластического полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 307—315.
2. Разматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
3. Быковцев А. Г. О преломлении волны сдвига в нелинейноупругое и упругопластическое полупространство // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 490—497.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
5. Быковцев Г. И., Кретова Л. Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106—116.

Куйбышев

Поступила в редакцию
15.II.1988