

УДК 539.3:534.1

В. В. Калинин, И. В. Лысенко, И. Б. Полякова

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ШТАМПА С НЕОДНОРОДНЫМ ТЯЖЕЛЫМ ОСНОВАНИЕМ

Развивается метод изучения основных характеристик волнового процесса на поверхности первоначально изотропного предварительно напряженного упругого полупространства, вызванного осциллирующим жестким штампом. В качестве модели неоднородной среды принята следующая: на поверхности однородного полупространства $x_3 \geq h$, $x_1, x_2 < \infty$ (x_1, x_2, x_3 — прямоугольная декартова система координат), подверженного действию однородных начальных напряжений, лежит упругий слой $0 \leq x_3 \leq h$, $x_1, x_2 < \infty$, механические характеристики которого, а также начальные напряжения являются в общем случае произвольными достаточно гладкими функциями координаты x_3 . Краевая линейризованная задача динамической теории упругости о колебании с частотой ω жесткого штампа на поверхности неоднородной среды сводится к интегральному уравнению или к системе интегральных уравнений первого рода, ядро интегрального оператора которых строится численно. Аппроксимация ядра интегрального оператора функцией специального вида позволяет методом факторизации [1, 2] построить приближенное решение интегрального уравнения. На основе последнего представляется возможность эффективного исследования влияния параметров, характеризующих неоднородность среды и начальное напряженное состояние на волновой процесс, как под штампом (волна напряжений), так и вне его.

Построению общей линейризованной теории и исследованию закономерностей распространения упругих волн в телах с однородными начальными напряжениями посвящена работа [3], где дан и достаточно полный обзор литературы по этому вопросу. Систематическое изложение теории распространения волн в упругих средах при неоднородном начальном состоянии впервые дано в [4].

Контактная задача о колебаниях неоднородного полупространства под действием осциллирующего на его поверхности жесткого штампа без учета начальных напряжений рассматривалась в [5, 6]. На основе решения контактной задачи был предложен [7] метод исследования закономерностей возбуждения упругих волн в полуограниченных телах (слой, цилиндр) с изменяющимися свойствами и величиной начальных напряжений. Разработан метод исследования особенностей распространения упругих волн в неоднородном начально-деформированном полупространстве, вызванных осциллирующей нагрузкой, распределенной в некоторой области на поверхности среды.

1. Задача о колебаниях жесткого штампа, занимающего в плане область Ω на поверхности упругой неоднородной начально-деформированной среды, описывается линейризованными уравнениями движения [8, 9]

$$\nabla \cdot \theta^{(i)} = \rho^{(i)} u''', \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

с граничными условиями на поверхность $x_3 = 0$

$$N \cdot \theta^{(1)} = q^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Omega \quad (1.2)$$

и условиями непрерывности смещений и напряжений на поверхности раздела среды $x_3 = h$.

В (1.1), (1.2) и ниже величины с индексом 1 относятся к слою, с индексом 2 — к полупространству; $u^{(i)} = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}\}$, $q^{(i)} = \{q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}\}$ — соответственно векторы смещений и напряжений слоя ($i = 1$) или полу-

¹ Калинин В. В., Лысенко И. В., Полякова И. Б. Особенности возбуждения и распространения упругих волн в неоднородном тяжелом полупространстве. Ростов н/Д. 1986. 21. с.— Деп. в ВИНТИ 10.12.86, № 8877 — В86.

пространства ($i = 2$), $\rho^{(i)}$ — плотность материала, \mathbf{N} — вектор нормали к поверхности. В рассматриваемом случае $\mathbf{N} = \{0, 0, 1\}$, $\theta^{(i)}$ — тензор четвертого ранга, который представляется в виде суммы симметричного $\mathbf{P}^{(i)}$ и антисимметричного $\mathbf{U}^{(i)}$ тензоров [9].

Тензор $\mathbf{U}^{(i)}$ не зависит от свойств материала и представляется через тензор начальных напряжений $\mathbf{T}^{(i)}$ и симметричный $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ и кососимметричный $\boldsymbol{\Omega}^{(i)}$ тензоры деформации [9]:

$$\mathbf{U}^{(i)} = \frac{1}{2} (\mathbf{T}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \cdot \mathbf{T}^{(i)}) - \mathbf{T}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\Omega}^{(i)} \quad (1.3)$$

Тензор $\mathbf{P}^{(i)}$ не зависит от начальных напряжений и в случае малых начальных деформаций имеет вид ($\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$ — параметры Ламе, \mathbf{E} — единичный тензор)

$$\mathbf{P}^{(i)}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}) = \lambda^{(i)}(x_3) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \cdot \mathbf{E} + 2\mu^{(i)}(x_3) \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \quad (1.4)$$

Далее будем полагать, что начальное напряженное состояние определяется тензором начальных напряжений $\mathbf{T}^{(i)}$ с компонентами

$$T_{ks}^{(i)} = \sigma_{ks}^{0(i)}, \quad k, s = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

Здесь δ_{ks} — символ Кронекера, причем $\sigma_{kk}^{0(2)} = \text{const}$ ($k = 1, 2, 3$), $\sigma_{kk}^{0(1)} = \sigma_{kk}^{0(1)}(x_3)$ — произвольные, достаточно гладкие функции координаты x_3 .

С учетом (1.3) — (1.5) краевую задачу (1.1), (1.2) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial \theta_{ks}^{(i)} / \partial x_k &= \rho^{(i)} u_s''^{(i)} & [(1.6) \\ N_s \theta_{ks}^{(1)} &= q_k^{(1)}, \quad x_3 = 0; \quad u_k^{(1)} = u_k^{(2)}, \quad \theta_{k3}^{(1)} = \theta_{k3}^{(2)}, \quad x_3 = h \\ &k, s = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta_{ks}^{(i)} &= a_{ks}^{(i)} \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial x_s} + b_{ks}^{(i)} \frac{\partial u_s^{(i)}}{\partial x_k}, \quad k \neq s \\ \theta_{kk} &= (\lambda^{(i)} + 2\mu^{(i)}) \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial x_k} + \lambda^{(i)} \left(\frac{\partial u_s^{(i)}}{\partial x_s} + \frac{\partial u_p^{(i)}}{\partial x_p} \right) \\ &k \neq p \neq s; \quad k, s, p = 1, 2, 3 \\ a_{ks}^{(i)} &= \mu^{(i)} - 1/4 \sigma_{kk}^{0(i)} - 1/4 \sigma_{ss}^{0(i)}, \quad b_{ks}^{(i)} = \mu^{(i)} + 3/4 \sigma_{kk}^{0(i)} - 1/4 \sigma_{ss}^{0(i)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Напомним, что в (1.6), (1.7) коэффициенты $a_{ks}^{(i)}$, $b_{ks}^{(i)}$, $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$, $\sigma_{kk}^{0(i)}$ при $i = 2$ являются постоянными при $i = 1$ произвольными, достаточно гладкими функциями координаты x_3 .

2. Применяя к краевой задаче (1.6) двумерное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 (α, β — параметры преобразования), ее можно привести к виду [7]

$$\mathbf{Y}^{(i)'} = \mathbf{M}^{(i)}(\alpha, \beta, x_3) \mathbf{Y}^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}^{(1)}(\alpha, \beta, x_3) \cdot \mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{S}^{(1)}, \quad x_3 = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B}^{(0)}(\alpha, \beta, x_3) \cdot \mathbf{Y}^{(0)} = 0, \quad x_3 = h$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{(k)} &= \uparrow \{i\alpha V_1^{(k)}, i\beta V_2^{(k)}, V_3^{(k)}, i\alpha U_1^{(k)}, i\beta U_2^{(k)}, U_3^{(k)}\}, \quad k = 1, 2 \\ \mathbf{Y}^{(0)} &= \uparrow \{i\alpha V_1^{(1)}, i\beta V_2^{(1)}, V_3^{(1)}, i\alpha U_1^{(1)}, i\beta U_2^{(1)}, U_3^{(1)}, i\alpha V_1^{(2)}, i\beta V_2^{(2)}, V_3^{(2)}, i\alpha U_1^{(2)}, i\beta U_2^{(2)}, U_3^{(2)}\} \\ \mathbf{S}^{(1)} &= \uparrow \{i\alpha Q_1, i\beta Q_2, Q_3\}, \quad V_k^{(i)} = dU_k^{(i)} / dx_3 \end{aligned}$$

$U_k^{(i)}, Q_k$ — трансформанты Фурье-компонент векторов перемещений и напряжений соответственно. Матрицы $M^{(i)}(\alpha, \beta, x_3)$ ($i = 1, 2$) имеют размер 6×6 , $V^{(0)}(\alpha, \beta, x_3)$ и $V^{(1)}(\alpha, \beta, x_3)$ — соответственно 12×6 и 6×3 . Элементы матриц $M^{(1)}(\alpha, \beta, x_3)$, $V^{(1)}(\alpha, \beta, x_3)$ и $V^{(0)}(\alpha, \beta, x_3)$ — функции координаты x_3 , которые определяются характером изменения упругих параметров и начальных напряжений в слое. Компоненты матрицы $M^{(2)}$ от x_3 не зависят и определяются упругими свойствами однородного полупространства, видом и интенсивностью начального напряженного состояния.

Решение системы (2.1) для полупространства ($i = 2$) может быть представлено в виде

$$Y_k^{(2)}(\alpha, \beta, x_3) = \sum_{i=1}^3 c_{i+6}(\alpha, \beta) m_{ik}(\alpha, \beta) e^{-\sigma_i(\alpha, \beta)x_3}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Здесь σ_i ($\operatorname{Re} \sigma_i \geq 0$, $\operatorname{Im} \sigma_i \leq 0$, $i = 1, 2, 3$) — решения характеристического уравнения

$$|M^{(2)}(\alpha, \beta) - \sigma E| = 0 \quad (2.4)$$

(E — единичная матрица), $m_{ik}(\alpha, \beta)$ — коэффициенты связи, определяемые из характеристического уравнения.

Шесть линейно независимых решений системы (2.1) можно получить численно, например методом Рунге — Кутты, Адамса и т. д., при фиксированных значениях параметров α, β . Предположим, что эти решения с начальными условиями $y_{ik}^{(1)}(\alpha, \beta, 0) = \delta_{ik}$ построены и имеют вид

$$Y_k^{(1)} = \sum_{i=1}^6 c_i(\alpha, \beta) y_{ik}^{(1)}(\alpha, \beta, x_3), \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.5)$$

Неизвестные $c_i(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), участвующие в представлениях (2.3) и (2.5), находятся при удовлетворении (2.3) и (2.5) граничным условиям (2.2). В результате после применения принципа предельного поглощения [1, 7] и обратного преобразования Фурье получаем

$$u^{(i)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} k^{(i)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) q^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.6)$$

$$k^{(i)}(s, t, x_3) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K^{(i)}(\alpha, \beta, x_3) e^{-i(\alpha s + \beta t)} d\alpha d\beta$$

Контуры Γ_1, Γ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [1, 2] и обходят специальным образом особенности элементов матрицы-функции $K(\alpha, \beta, x_3)$. Правая часть первого равенства (2.6) определяет вектор перемещения произвольной точки слоя $0 \leq x_3 \leq h$, $|x_1|, |x_2| < \infty$ ($i = 1$) или полупространства $x_3 \geq h$, $|x_1|, |x_2| < \infty$ ($i = 2$).

3. Полагая в (2.6) $x_3 = 0$ и считая перемещения штампа $u^{(1)}(x_1, x_2, 0) = u^\circ(x_1, x_2)$ известными, приходим к системе интегральных уравнений относительно неизвестной вектор-функции распределения контактных напряжений

$$u^\circ(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} k^\circ(x_1 - \xi, x_2 - \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad x_1, x_2 \in \Omega \quad (3.1)$$

$$k^\circ(s, t) = k(s, t, 0) = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K^\circ(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha s + \beta t)} d\alpha d\beta \quad (3.2)$$

Матрица-функция $K^\circ(\alpha, \beta) = K^{(1)}(\alpha, \beta, 0)$ имеет характерное для динамических контактных задач теории упругости представление [1, 2]

$$K^\circ(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha^2 M + \beta^2 N & i\beta(M - N) & i\alpha S \\ \alpha\beta(M - N) & \alpha^2 N + \beta^2 M & i\beta T \\ i\alpha S & i\beta T & R \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

с элементами M, N, S, T, R , зависящими от параметра $u = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, частоты ω , вида зависимости упругих параметров и начального напряженного состояния слоя от координат. Представить функции M, N, S, T и R в аналитическом виде можно лишь в специальных случаях зависимости параметров $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \rho^{(1)}$, а также $\sigma_{kk}^{(1)}$ от x_3 (например, $\lambda^{(1)} = \lambda_0^{(1)} e^{\gamma x_3}$, $\mu^{(1)} = \mu_0^{(1)} e^{\gamma x_3}$, $\rho^{(1)} = \rho_0^{(1)} e^{\gamma x_3}$, $\sigma_{kk}^{(1)} = \sigma_{kk} e^{\gamma x_3}$ или аналогичные), допускающих аналитическое решение системы (2.1) при $i = 1$.

В общем случае функции M, N, S, T и R можно получить лишь численно, что существенно затрудняет исследование их свойств, знание которых необходимо для последующего анализа и построения решения интегрального уравнения. Некоторые свойства этих функций (четность, мероморфность) устанавливаются из вида аналитической зависимости коэффициентов системы (2.1) от параметров α и β . В силу однородности полупространства достаточно легко определяются точки ветвления и, следовательно, области аналитичности функций. Важным моментом является исследование их асимптотического поведения при $\alpha, \beta \rightarrow \infty$.

Следуя [7], систему (2.1) сводим к системе дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Изучение этой системы позволяет выписать представление элементов-функций матрицы K° при $u = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ в виде (m, n, s, t, r — постоянные коэффициенты)

$$\begin{aligned} M &= mu^{-3} + O(u^{-5}), & N &= nu^{-3} + O(u^{-5}) \\ R &= ru^{-1} + O(u^{-3}), & S &= su^{-1} + O(u^{-3}), & T &= tu^{-2} + O(u^{-4}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Дальнейшее изучение свойств элементов матрицы-функции K° возможно лишь при задании конкретных параметров неоднородности среды и использовании численных методов. В частности, детальный анализ распределения нулей и полюсов элементов K° с учетом (3.4) позволяет аппроксимировать матрицу-функцию K° полиномиальной с сохранением всех важнейших свойств. Далее, используя метод приближенной факторизации функций и матриц-функций [1, 2], можно построить решение системы интегральных уравнений (3.1) и исследовать влияние параметров системы неоднородный слой — однородное преднапряженное полупространство на волновое поле на поверхности среды.

Некоторые характеристики волнового поля, в частности фазовые характеристики скорости поверхностных волн, можно исследовать, анализируя свойства ядра интегрального оператора системы (3.1).

Не нарушая общности, положим

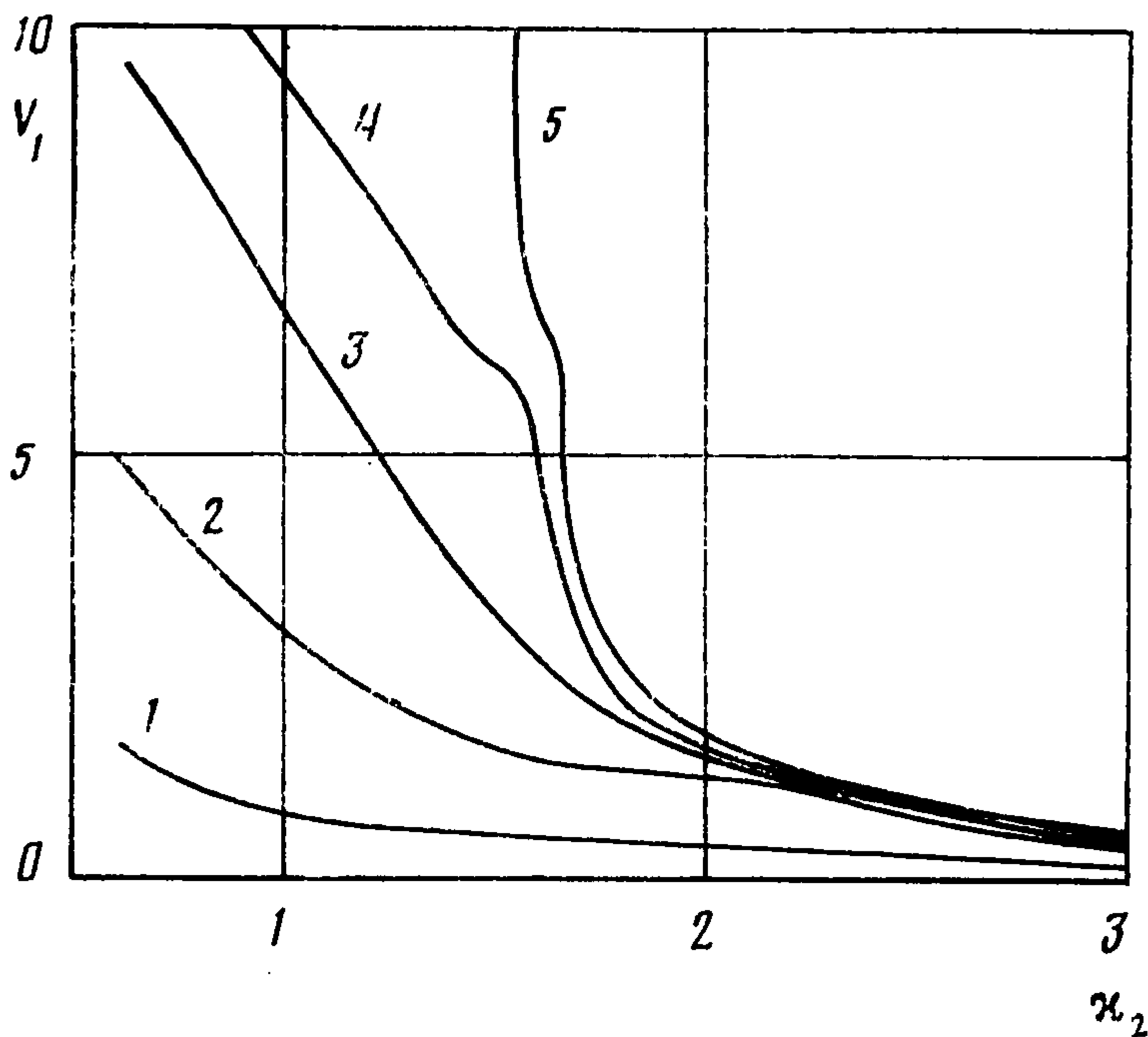
$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= \mu_0 e^{\theta x_3}, & \lambda^{(1)} &= \lambda_0 e^{\gamma x_3}, & \rho^{(1)} &= \rho_0 e^{\delta x_3} \\ \mu^{(2)} &= k_1 \mu_0, & \lambda^{(2)} &= k_2 \lambda_0, & \rho^{(2)} &= k_3 \rho_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее будем предполагать, что начальные напряжения в слое обусловлены действием силы тяжести

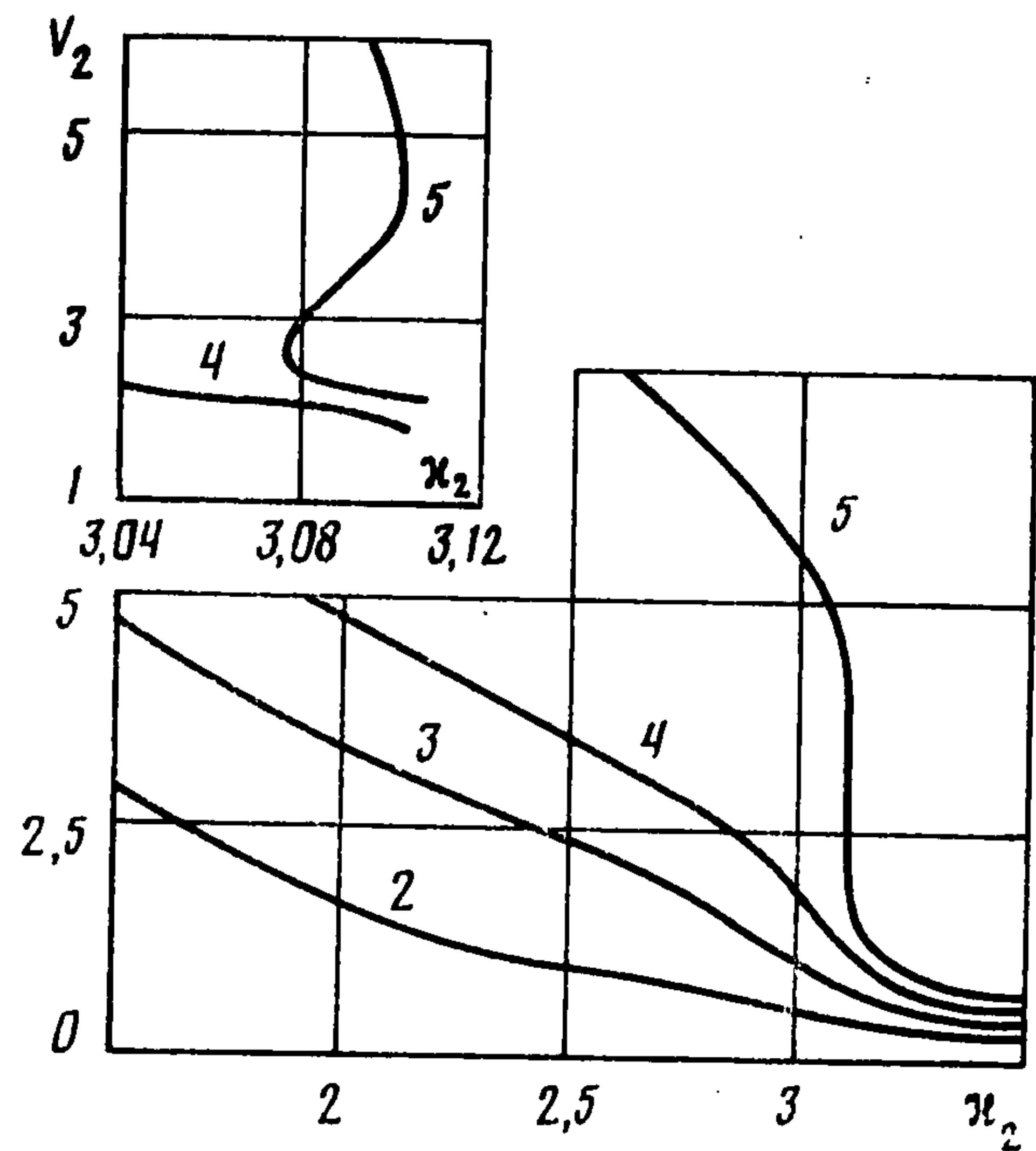
$$\sigma_{33}^{(1)} = k_0 e^{\delta x_3}, \quad k_0 = -\rho_0 g / \delta, \quad \delta \neq 0 \quad (3.6)$$

(g — ускорение свободного падения). Постоянные коэффициенты $\theta, \gamma, \delta, k_1, k_2, k_3$ в (3.5), (3.6) позволяют в широком диапазоне варьировать свойства среды.

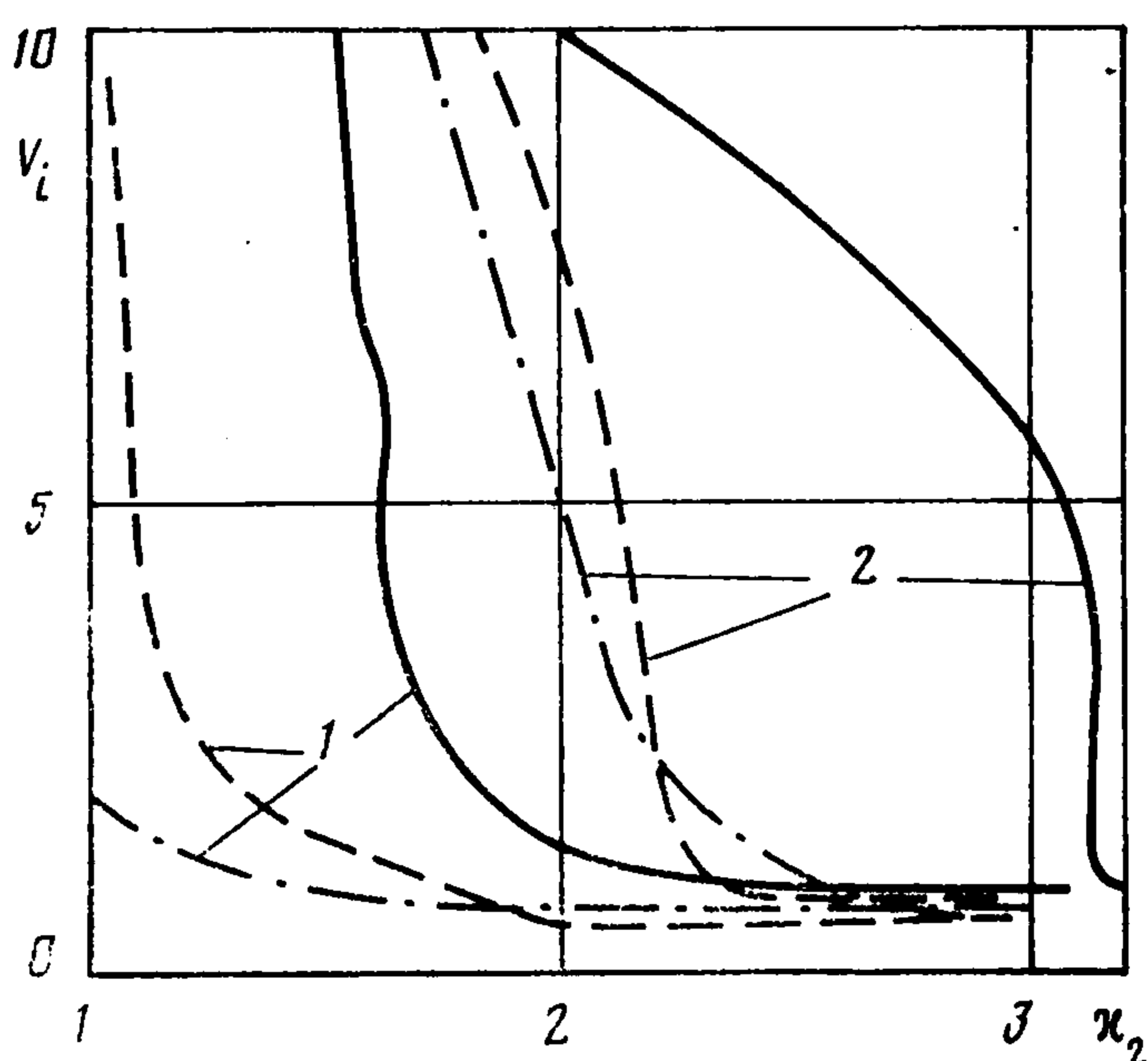
Численный анализ показал, что в достаточно широком диапазоне изменения параметров θ, γ, δ при $k_1 = k_2 = K > 1$ элементы матрицы-функции K° имеют счетное множество нулей и полюсов при строгом их



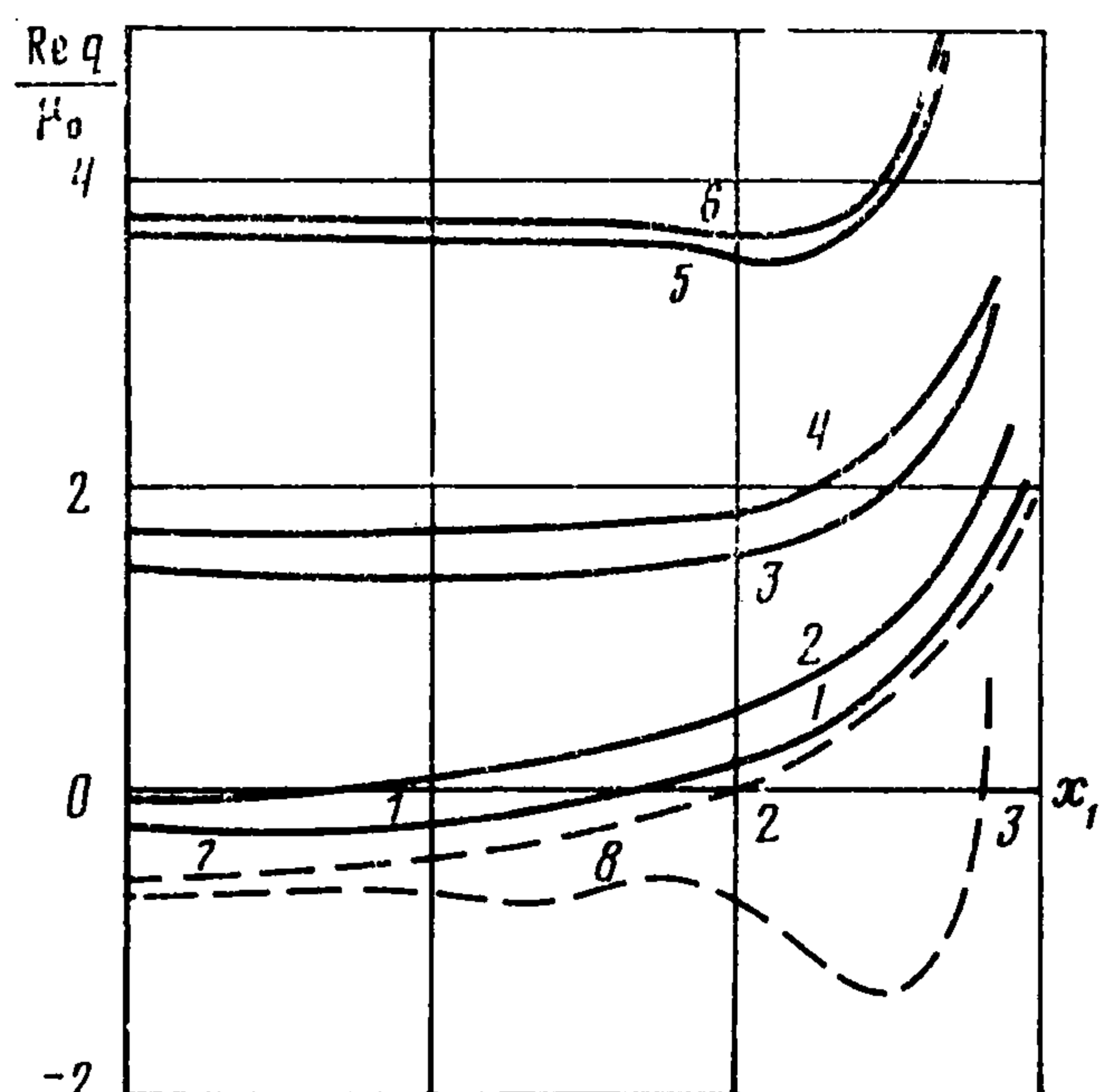
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

чередовании для элементов $M(u)$ и $R(u)$. При фиксированном ω нули и полюсы лежат между $V_s^{(1)}$ и $V_s^{(2)}$ (соответственно скорости поперечных волн в слое и полупространстве).

На фиг. 1, 2 приведены графики фазовых скоростей поверхностных упругих волн $V_i(\kappa_2)$ (i — номер моды поверхностной волны, κ_2 — параметр обобщенной частоты, $\kappa_2 = \omega h (\rho_0/\mu_0)^{1/2}$ для различных K (кривые 1—5 соответствуют значениям параметра $K = 1, 10, 50, 100, 500$) и $\theta = \gamma = 0$, $\sigma_{jj}^{(1)} = 0$ ($j = 1, 3$). С увеличением K фазовая скорость каждой моды растет, в то же время количество мод на фиксированной частоте уменьшается. Каждая мода колебаний существует при $\kappa_2 > \kappa_{2i}$. Частота κ_{2i} называется граничной частотой i -й моды [10].

При $\kappa_2 \rightarrow \infty$ фазовые скорости уменьшаются, их значение $V_i \rightarrow V_s^{(1)}$ для всех K . При $K \gg 1$ наблюдается интервал изменения κ_2 (фиг. 2), на котором фазовые скорости с ростом частоты растут, возникают полюсы, не чередующиеся с нулями, связанные с появлением обратной волны [1]. Дисперсионные свойства задачи становятся аналогичными задаче о колебании штампа на слое, жестко сцепленном с недеформируемым основанием.

По-иному влияет на поверхностное поле изменение параметров неоднородности слоя θ, δ, γ . На фиг. 3 приведены графики $V_i(\kappa_2)$ при $\delta = 0, 2, 3$ ($\gamma = \theta = 0, K = 500$) (соответственно сплошная, штриховая

и штрихпунктирная линии, цифрами 1, 2 обозначены первая и вторая моды колебаний). С увеличением δ граничная частота i -й моды κ_{2i} уменьшается. Фазовые скорости с ростом частоты (параметра κ_2) убывают тем быстрее, чем больше параметр δ , количество самих волн (мод) на фиксированной частоте растет.

4. Для иллюстрации изложенного выше метода исследования влияния параметров неоднородной среды на волновое поле рассмотрим в качестве примера задачу о вибрации жесткого штампа, занимающего в плане полосу $|x_1| \leq a, |x_2| < \infty$. Трение в области контакта (для сокращения выкладок) будем предполагать отсутствующим, т.е.

$$q^{(1)}(x_1, x_2, 0) = \begin{cases} \{0, 0, q^{(1)}(x_1)\}, & |x_1| \leq a, |x_2| < \infty \\ 0, & |x_1| > a, |x_2| < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

В рамках этих предположений необходимо рассмотреть плоскую краевую задачу (1.6) о возбуждении волнового поля в неоднородной среде с той разницей, что в формулах (1.6), (1.7) индексы k, s принимают значения 1 и 3. Использование преобразования Фурье по x_1 (α — параметр преобразования) позволяет без особых трудностей привести задачу (1.6) к виду (2.1), (2.2) с векторами

$$\begin{aligned} Y^{(i)} &= \uparrow \{i\alpha V_1^{(i)}, V_3^{(i)}, i\alpha U_1^{(i)}, U_3^{(i)}\}, \quad i = 1, 2 \\ S^{(1)} &= \uparrow \{0, 0, Q^{(1)}\} \\ Y^{(0)} &= \uparrow \{i\alpha V_1^{(1)}, V_3^{(1)}, i\alpha U_1^{(1)}, U_3^{(1)}, i\alpha V_1^{(2)}, V_3^{(2)}, i\alpha U_1^{(2)}, U_3^{(2)}\} \end{aligned}$$

и матрицами $M^{(i)}(\alpha, x_3)$ ($i = 1, 2$) размером 4×4 , $B^0(\alpha, x_3)$ и $B^{(1)}(\alpha, x_3)$ размером 8×4 и 4×2 соответственно.

Решение для полупространства (по аналогии с (2.3)) представим в виде

$$Y_k^{(2)}(\alpha, x_3) = \sum_{j=1}^2 c_{j+4}(\alpha) m_{jk}(\alpha) e^{-\sigma_j(\alpha)x_3}, \quad k = 1, 3 \quad (4.2)$$

$$\sigma_{1,2} = [(-D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - 4D_1D_3}) / (2D_1)]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1A_6, \quad D_2 = S_1A_1 + S_2A_6 + \alpha^2A_5^2, \quad D_3 = S_1S_2 \\ A_1 &= b_{31}^{(2)}, \quad A_2 = b_{13}^{(2)}, \quad A_6 = \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}, \quad A_5 = \lambda^{(2)} + a_{13}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \rho^{(2)}\omega^2 - A_2\alpha^2, \quad S_2 = \rho^{(2)}\omega^2 - A_6\alpha^2 \\ m_{j3} &= -\sigma_j [D_1\sigma_j^2 + A_6S_2 + \alpha^2A_5^2] / (S_1A_5), \quad m_{j1} = 1, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Предполагая линейно независимые решения для слоя ($i = 1$) построенными (в плоском случае их четыре, они могут быть получены численно при начальных условиях $y_{kj}^{(1)}(\alpha, 0) = \delta_{jk}$) и имеющими вид

$$Y_k^{(1)}(\alpha, x_3) = \sum_{j=1}^4 c_j(\alpha) y_{kj}^{(1)}(\alpha, x_3), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.5)$$

приходим к системе шести уравнений для определения $c_k(\alpha)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$)

$$\sum_{j=1}^6 A_{kj} c_j(\alpha) = T_k(\alpha) \quad (4.6)$$

$$T_1 = T_2 = T_4 = T_5 = T_6 = 0, \quad T_3 = Q_3(\alpha)$$

$$A_{11} = b_{31}^{(1)}(0), \quad A_{12} = A_{13} = A_{15} = A_{16} = A_{21} = A_{24} = A_{25} = A_{26} = 0$$

$$A_{14} = a_{31}^{(1)}(0), \quad A_{mi} = y_{mi}^{(1)}(\alpha, h), \quad m = 3, 4; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$A_{5i} = b_{31}^{(1)}(h) y_{1i}^{(1)}(\alpha, h) + a_{31}^{(1)}(h) y_{4i}^{(1)}(\alpha, h) \quad (4.7)$$

$$A_{6i} = (\lambda^{(1)}(h) + 2\mu^{(1)}(h)) y_{2i}^{(1)}(\alpha, h) - \alpha^2 \lambda^{(1)}(h) y_{4i}^{(1)}(\alpha, h), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$A_{35} = -e^{-\sigma_1 h}, \quad A_{36} = -e^{-\sigma_2 h}, \quad A_{45} = -m_{12} e^{-\sigma_1 h}$$

$$A_{46} = -m_{22} e^{-\sigma_2 h}, \quad A_{55} = -(a_{31}^{(2)} m_{12} - b_{31}^{(2)} \sigma_1) e^{-\sigma_1 h}$$

$$A_{56} = -(a_{31}^{(2)} m_{22} - b_{31}^{(2)} \sigma_2) e^{-\sigma_2 h}$$

$$A_{65} = -[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) m_{12} \sigma_1 + \alpha^2 \lambda^{(2)}] e^{-\sigma_1 h}, \quad A_{66} = -[(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) m_{22} \sigma_2 + \alpha^2 \lambda^{(2)}] e^{-\sigma_2 h}$$

Здесь учтено, что компоненты V_1^2 и V_3^2 в силу (4.2) линейным образом выражаются через компоненты $U_1^{(2)}$ и $U_3^{(2)}$.

Решение системы (4.6) имеет вид

$$c_i(\alpha) = Q_3(\alpha) B_{ij} / \Delta(\alpha) \quad (4.8)$$

где B_{ij} — элементы матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов A_{ij} матрицы A .

Принимая во внимание (4.2), (4.5) и (4.8), вектор перемещений произвольной точки среды представим в виде

$$u_3^{(i)}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k^{(i)}(x_1 - \xi, x_3) q(\xi) d\xi \quad (4.9)$$

$$k^{(i)}(s, x_3) = \int_{\Gamma} R^{(i)}(\alpha, x_3) e^{-i\alpha s} d\alpha$$

В случае контактной задачи в (4.9) необходимо положить $i = 1$, $x_3 = 0$. Полагая $u_3^{(1)}(x_1, 0)$ известной функцией, получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений $q^{(1)}(x_1)$ с ядром $R^{(1)}(\alpha, 0) = R_0(\alpha)$.

Решение этого интегрального уравнения строится методом приближенной факторизации. С этой целью аппроксимируем $R_0(\alpha)$ функцией

$$R^*(\alpha) = r^{(1)}(\alpha^2 + B^2)^{-1/2} \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2)(\alpha^2 - \zeta_k^2)^{-1} \quad (4.10)$$

Здесь $r^{(1)}$ — постоянная, участвующая в (3.4), z_k ($k = 1, 2, \dots, n_1$), ζ_k ($k = 1, 2, \dots, m_1$) — вещественные нули и полюсы $R(\alpha)$; B , z_k ($k = n_1 + 1, \dots, N$), ζ_k ($k = m_1 + 1, \dots, N$) — параметры аппроксимации, которые определяются из условия наилучшего приближения $R_0(\alpha)$ функцией $R^*(\alpha)$ на вещественной оси.

Представление функций $q^{(1)}(x_1)$, $|x_1| \leq a$, $u^{(1)}(x_1)$ при использовании аппроксимации вида (4.10) описывалось в литературе (например, [1, 2, 5, 7, 11]) и здесь не приводится.

На фиг. 4 представлены графики функций $\operatorname{Re} q(x_1)/\mu_0$ для различных значений $k_1 = k_2 = K$ и δ при $\theta = \gamma = 0$ в (3.5). Сплошными линиями представлены $\operatorname{Re} q(x_1)/\mu_0$ для случая $\sigma_{jj}^{(1)} = 0$ ($j = 1, 3$) (однородный слой) и $K = 1, 2, 7, 10, 100, 500$ (обозначены цифрами 1, 2, ..., 6). Видно, что с увеличением K амплитуда контактных напряжений растет, причем из параболической ($K = 1$) трансформируется при $K \gg 1$ в характерный для статических задач вид. Это можно объяснить тем, что на данной частоте $\kappa_2 = 0,8$ при $K \gg 1$ нет вещественных нулей и полюсов, т. е. задача становится квазистатической. Штриховыми линиями представлены контактные напряжения при разных значениях δ .

Цифрами 7, 8 обозначены графики $\operatorname{Re} q(x_1)/\mu_0$ при $\delta = 1, 2$, $K = 1$, $\gamma = \theta = 0$. С ростом δ амплитуда напряжений падает, причем эпюра из параболической трансформируется в седлообразную, под штампом усиливается осцилляция напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979, 319 с.
2. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации и пространственных динамических смешанных задач теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. 373 с.; Т. 2. 535 с.
4. Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1952. V. 211. № 1104. P. 128—154.
5. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Методы построения матрицы Грина на статифицированного упругого полупространства // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93—101.
6. Глушков Е. В. Поток энергии при гармонических колебаниях многослойных упругих сред // VI Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986: Анот. докл. Ташкент: Фан, 1986, С. 198.

7. *Ананьев И. В., Калинин В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483—489.
8. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
9. *Зубов Л. М.* Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 85—95.
10. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. Т. 1. 519 с.
11. *Калинчук В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении предварительно напряженного цилиндра // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 384—389.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
4.VII.1988