

УДК 539.3:534.1

А. Г. Куликовский, Л. А. Пекуровская

О ФРОНТАХ СИЛЬНОГО И СЛАБОГО РАЗРЫВА В РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В разномодульном упругом теле проводится классификация фронтов, на которых происходит изменение упругих свойств. Рассматриваются фронты, представляющие собой сильные разрывы (ударные волны) малой интенсивности, а также соответствующие им простые волны. Обосновывается существование слабых разрывов, на которых условия непрерывности и условие, задающее изменение упругих свойств, не дают полной системы соотношений на фронте. В этом случае постулируется дополнительное соотношение.

Модели разномодульных упругих тел, т. е. тел, упругие свойства которых меняются разрывным образом, предложены в работах [1—5]. Экспериментальные исследования, положенные в основу модели, перечислены в [4—7]. Часто явление разномодульности объясняется наличием в теле мелких трещин, пор. В жидкостях разномодульность может порождаться фазовыми переходами. Были получены [8] простые волны и некоторые другие решения для баротропной среды, у которой зависимость давления от плотности имеет излом, соответствующий вскипанию жидкости. Исследовались [9—11] решения уравнения движения разномодульной упругой среды, соответствующие продольным волнам. Постановка и решение некоторых задач для двухпараметрической среды, жидкости с равновесными фазовыми переходами, были даны Г. Я. Галиным¹. Приведены [6] решения ряда статических задач теории упругости.

Ниже в произвольном упругом теле рассматриваются плоские волны, которые описываются полной системой уравнений теории упругости, представляющей собой гиперболическую систему уравнений седьмого порядка.

1. Разрывы характеристических скоростей. Плоские волны в упругой среде можно описывать уравнениями [12, 13]

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) + F_i(x, t) \equiv A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + B_i \frac{\partial S}{\partial x} + C_i + F_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$
(1.1)

$$\Phi = \Phi(u_i, S, x); \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}; \quad B_i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S \partial u_i}$$

$$C_i = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial u_i}; \quad u_i = \frac{\partial w_i}{\partial x}; \quad v_i = \frac{\partial w_i}{\partial t}$$

Здесь $x_1, x_2, x_3 = x$ — декартовы координаты, значения которых для точек среды в начальный момент времени принимаются в качестве лагранжевых переменных, w_i — компоненты вектора перемещений в этой системе координат, ρ — плотность начального состояния, S — энтропия. Величины u_i, v_i, S считаются функциями x и t . $\Phi = \rho U$ — внутренняя энергия единицы начального объема среды, рассматриваемая как функция компонент тензора градиентов перемещений u_i , изменяющихся в волне, энтропии S и, возможно, лагранжевой координаты x .

В классической теории линейно-упругого тела матрица A_{ij} постоянна, $B_i = 0, C_i = 0$. Здесь будет предполагаться, что вторые производные

¹ Галин Г. Я. Волны фазовых превращений. Доклад на международной конференции «Современные математические проблемы механики и их приложения». М., 1987.

A_{ij} упругого потенциала Φ терпят разрыв, в то время как сам потенциал и его первые производные по u_j непрерывны. Зависимость Φ от S и x считается достаточно гладкой. В пространстве переменных u_i разрыв A_{ij} будем считать расположенным на некоторой поверхности $\psi(u_i, S, x) = 0$, определяемой заданием Φ как функции своих аргументов. Эту поверхность будем называть поверхностью раздела (ПР). Ее положение в пространстве u_i зависит от x и S как от параметров.

Таким образом, ПР представляет собой поверхность слабого разрыва второго порядка потенциала Φ , рассматриваемого как функция u_i . На такой поверхности, как известно, разрыв терпит только вторая производная Φ по нормали. ПР делит пространство u_i на две части, которые будем обозначать V^* и V^{**} , а все величины будем снабжать одной или двумя звездочками, если нужно различать, к какой области пространства относится эта величина.

Характеристические скорости системы (1.1) связаны с собственными значениями $\lambda^{(k)}$ матрицы A_{ij} соотношениями $c^{(k)} = (\lambda^{(k)}/\rho)^{1/2}$ ($k = 1, 2, 3$). При переходе через ПР вместе с A_{ij} рвутся $\lambda^{(k)}$ и $c^{(k)}$. Исследуем эти изменения.

Выберем некоторую точку u_i° на ПР при некоторых фиксированных значениях переменных S и x . Введем новые переменные u_i' , связанные с u_i ортогональным преобразованием с постоянными коэффициентами. Ось u_1' направим параллельно нормали к ПР в точке u_i° . Оси u_2' и u_3' расположим ортогонально оси u_1' так, чтобы $\partial^2\Phi/\partial u_2'\partial u_3' = 0$. Определим новые величины A_{ij}, B_i, C_i теми же производными, что и в (1.1), но по новым переменным u_i' . Очевидно, что это эквивалентно тензорным преобразованиям исходных величин. Преобразуем к новым осям также v_i и F_i . Описанные выше преобразования оставляют справедливыми уравнения (1.1), так как левая и правая части этих уравнений преобразуются по одному и тому же векторному закону. В дальнейшем будем пользоваться новыми переменными, а штрихи опустим.

В новой системе координат уравнение $\psi = 0$ в окрестности рассматриваемой точки u_i° с точностью до бесконечно малых высшего порядка запишется как $u_1 = u_1^\circ$, а из всех компонент матрицы A_{ij} в точке u_i° рвется только A_{11} : $A_{11}^{**} - A_{11}^* \neq 0$. Для определенности будем считать $A_{11}^{**} > A_{11}^*$.

Запишем характеристическое уравнение для нахождения собственных корней с учетом того, что $A_{23} = 0$ в новой системе координат, $(A_{22} - \lambda) \cdot (A_{33} - \lambda) P(\lambda) = 0$

$$P(\lambda) \equiv A_{12}^2/(\lambda - A_{22}) + A_{13}^2/(\lambda - A_{33}) + A_{11} - \lambda \quad (1.2)$$

Если

$$A_{12} \neq 0, \quad A_{13} \neq 0, \quad A_{22} \neq A_{33} \quad (1.3)$$

то значения $\lambda = A_{22}$, $\lambda = A_{33}$ не являются корнями (1.2). В дальнейшем будем предполагать, что $\lambda \neq A_{22}$, $\lambda \neq A_{33}$. Для определенности всюду будем считать $A_{22} < A_{33}$.

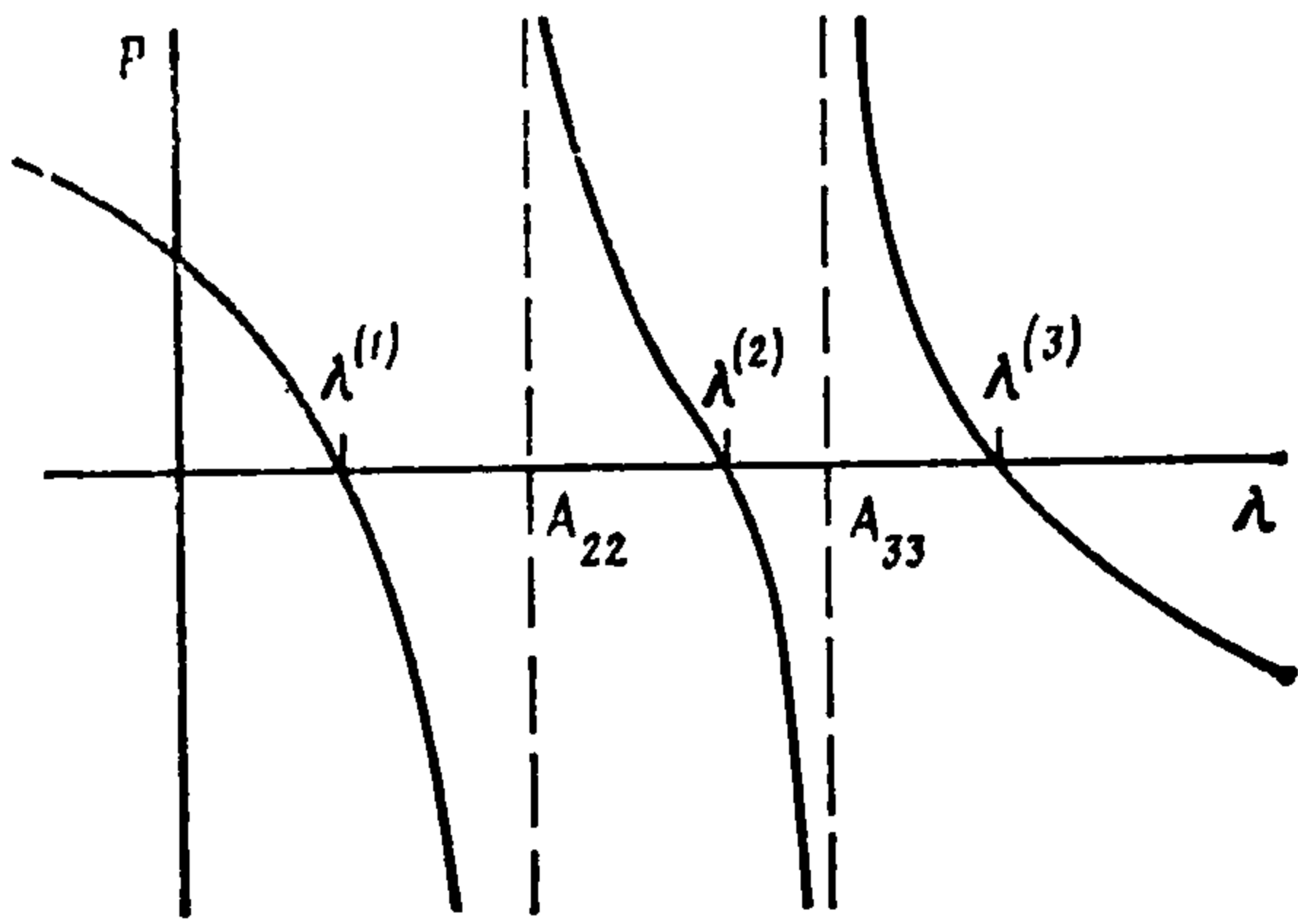
График функции $P(\lambda)$ изображен на фиг. 1: $\lambda^{(k)}$, ($k = 1, 2, 3$) — корни уравнения $P(\lambda) = 0$, при увеличении A_{11} они сдвигаются вправо, при уменьшении — влево. Таким образом, при выполнении условий (1.3) собственные числа и характеристические скорости по разные стороны от ПР

удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \lambda_*^{(1)} < \lambda_{**}^{(1)} < \lambda_*^{(2)} < \lambda_{**}^{(2)} < \lambda_*^{(3)} < \lambda_{**}^{(3)} \\ c_*^{(1)} < c_{**}^{(1)} < c_*^{(2)} < c_{**}^{(2)} < c_*^{(3)} < c_{**}^{(3)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Интересно отметить, что неравенства, аналогичные (1.4), имеют место также при переходе упругость — пластичность [14], но один результат не является следствием другого.

2. Простые волны. Рассмотрим решения уравнений (1.1) при $F_i = 0$, $S = \text{const}$, $\partial\Phi/\partial x = 0$ вида $u_i = u_i(\theta(x, t))$, $v_i = v_i(\theta(x, t))$, где $\theta(x, t) \neq \text{const}$ — некоторая функция. Такие решения называются простыми волнами. Подстановка указанного вида решений в уравнения (1.1) дает



Фиг. 1

$$(A_{ij} - \rho c^2 \delta_{ij}) \frac{du_j}{d\theta} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + c \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что $\rho c^2 = \lambda$ — одно из собственных значений матрицы A_{ij} , а производные $du_i/d\theta$ пропорциональны соответствующему собственному вектору

g_i матрицы A_{ij} . Очевидно, каждому собственному вектору матрицы A_{ij} соответствует простая волна.

Будем рассматривать малую окрестность некоторой точки u_i^0 поверхности раздела и считать, что матрица A_{ij} принимает постоянные значения A_{ij}^{**} в области V^{**} и A_{ij}^* в области V^* . Характеристические скорости также будут кусочно-постоянными. При таком предположении пренебрегаем процессом медленной деформации волны, связанным с переменностью c , в каждой из областей V^{**} и V^* , оставив деформацию волны, связанную только со скачком c .

В каждой из областей V^* или V^{**} решение строится как в линейном случае, причем u_i меняются вдоль прямой, параллельной собственному вектору в этой области, а решение содержит множитель $f(x - ct)$, где f — произвольная функция (которая может содержать разрывы). Это означает, что в простой волне u_i меняются вдоль ломаной с точкой излома на ПР (в некоторых частных случаях может оказаться, что излом отсутствует).

Рассмотрим изменение собственных векторов при переходе через ПР. Можно убедиться, что при выполнении условий (1.3) все собственные векторы имеют отличную от нуля компоненту g_1 , нормальную к поверхности раздела. Это следует из двух последних уравнений для компонент собственного вектора при условии, что (см. п. 1) $A_{23} = 0$, $\lambda \neq A_{22}$, $\lambda \neq A_{33}$, т. е.

$$A_{12}g_1 + (A_{22} - \lambda)g_2 = 0, \quad A_{13}g_1 + (A_{33} - \lambda)g_3 = 0 \quad (2.2)$$

Согласно п. 1, уменьшение A_{11} приводит к увеличению $|A_{22} - \lambda^{(1)}|$ и $|A_{33} - \lambda^{(1)}|$ и, следовательно, к уменьшению $g_2^{(1)}/g_1^{(1)}$ и $g_3^{(1)}/g_1^{(1)}$, так что собственный вектор отклоняется в сторону нормали к ПР. Аналогично получается, что собственный вектор $g_i^{(3)}$ при уменьшении A_{11} приближается по направлению к касательной плоскости к ПР. У собственного вектора $g_i^{(2)}$ отношение $|g_2^{(2)}/g_1^{(2)}|$ растет, а $|g_3^{(2)}/g_1^{(2)}|$ убывает.

При нарушении одного или нескольких условий (1.3) один или два

собственных вектора становятся параллельными касательной плоскости к ПР. Этот случай в дальнейшем рассматриваться не будет.

Условия неопрокидывания простых волн заключаются в рассматриваемом случае, очевидно, в том, что передняя часть волны должна соответствовать бóльшему значению $A_{11} = A_{11}^{**}$, а задняя — меньшему значению $A_{11} = A_{11}^*$, т. е. в неопрокидывающейся волне изменение величин происходит так, что точка $u_i(x, t)$ с ростом t при $x = \text{const}$ переходит из V^{**} в V^* . В физическом пространстве передняя и задняя части простой волны, в которых соответственно $u_i \in V^{**}$ и $u_i \in V^*$, двигаются без деформаций с постоянными, но различными скоростями c^{**} и c^* , а между ними образуется и линейно растет со временем область постоянных значений $u_i = u_i^\circ$, соответствующих точке на границе $\psi(u_i) = 0$ между V^{**} и V^* . При противоположном направлении изменения величин в простой волне задняя часть волны обгоняет переднюю и образуется неоднозначность, которую следует ликвидировать путем введения в решение разрыва (ударной волны).

3. Ударные волны. На разрывах должны выполняться соотношения, выражающие сохранение импульса, энергии и непрерывность перемещений:

$$\begin{aligned} \rho W [v_i] &= - [\partial\Phi/\partial u_i], [\Phi] = \{(\partial\Phi/\partial u_k)^- + 1/2 [\partial\Phi/\partial u_k]\} [u_k] \\ W [u_i] &= - [v_i] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь, как обычно, квадратные скобки означают скачок величины, стоящей в скобке $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$, где индексом минус отмечается значение непосредственно перед разрывом, индексом плюс — за разрывом, W — скорость скачка dx/dt .

Вычислим изменение энтропии в разрыве, считая, что начальное и конечное состояния достаточно близки к ПР, соответствующей начальному значению энтропии. Считая изменение энтропии в волне малым, ограничимся линейным разложением потенциала Φ по энтропии в точке S^-

$$\Phi(u_i, S) = \rho T^- (S - S^-) + \Phi_1(u_i) \quad (3.2)$$

Тогда из (3.1) следует, что

$$\rho T^- [S] = 1/2 [\partial\Phi_1/\partial u_i] [u_i] + (\partial\Phi_1/\partial u_i)^- [u_i] - [\Phi_1] \quad (3.3)$$

Разложим в окрестности некоторой точки u_i° на ПР правую часть последнего равенства в ряд по величинам Δu_i^\pm , где $\Delta u_i^\pm = u_i^\pm - u_i^\circ$, причем разложение будем вести до малых второго порядка. Учитывая, что рвутся только вторые производные Φ_1 , для $[S]$ получаем

$$\rho T^- [S] = \{A_{ij}^- \Delta u_j^- + 1/2 [A_{ij} u_j]\} [u_i] - 1/2 [A_{ij} u_i u_j] \quad (3.4)$$

В рассматриваемом случае, когда из всех коэффициентов разложения рвется только A_{11} , в формуле (3.4) сократятся все члены, не содержащие A_{11} , и в результате имеем

$$\rho T^- [S] = 1/2 [A_{11}] |\Delta u_1^-| |\Delta u_1^+| \quad (3.5)$$

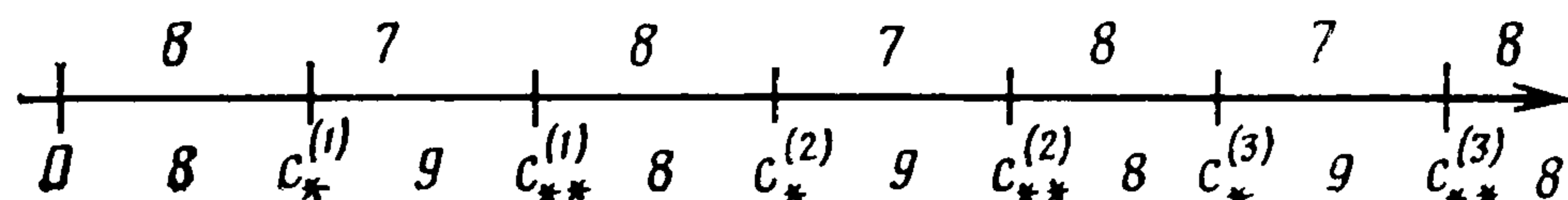
Видно, что только при условии $A_{11}^+ - A_{11}^- \geq 0$ скачок удовлетворяет требованию неубывания энтропии, другими словами, возможны только скачки с увеличением A_{11} , т. е. из V^* в V^{**} .

Заметим, что эти выводы согласуются с рассмотренным выше поведением простых волн в том смысле, что ударные волны существуют, когда происходит «опрокидывание» соответствующих простых волн и не существуют в противном случае.

Как видно из (3.5), изменение энтропии в ударной волне не превосходит второго порядка малости, но может быть меньше или даже обратиться в нуль, когда либо Δu_1^- , либо Δu_1^+ равны нулю (в последнем случае начальное и конечное состояния среды не выходят за пределы области линейного поведения).

4. Условия эволюционности. Неравенства (1.4) позволяют перечислить все эволюционные фронты, как с непрерывным изменением величин, так и представляющие собой разрывы малой интенсивности. В последнем случае будем также считать, что характеристические скорости в состояниях перед и за разрывом совпадают соответственно с $c_*^{(k)}$ и $c_{**}^{(k)}$.

Условия эволюционности, как известно [15], в общем случае заключаются в том, что число граничных условий на разрыве должно быть на еди-



Фиг. 2

ницу больше числа уходящих от разрыва характеристик. На фиг. 2 изображена ось скорости, которую значения $c_*^{(k)}$ и $c_{**}^{(k)}$ делят на интервалы. Если скорость разрыва W принадлежит какому-нибудь из этих интервалов, то можно указать необходимое для эволюционности число граничных условий на разрыве в зависимости от того, соответствуют ли состояния перед и за фронтом состояниям, отмеченным одной и двумя звездочками, или наоборот. Число граничных условий отмечено на фиг. 2 выше и ниже соответствующих интервалов изменения скоростей.

5. Изменение величин в ударных волнах, проверка условий эволюционности. Считая ударную волну слабой и пренебрегая малыми второго порядка (в том числе изменением энтропии), из первого и третьего соотношений (3.1) получим

$$A_{ij}^+ [u_j] = \alpha [u_i] - [A_{ij}] \Delta u_j^- \quad (\alpha = \rho W^2) \quad (5.1)$$

Из (5.1) с учетом того, что, согласно п. 1, только A_{11} имеет нетривиальный разрыв и $A_{23} = 0$, находим

$$[u_k] = A_{1k} (\alpha - A_{kk})^{-1} [u_1], \quad k = 2, 3; \quad P^+(\alpha) [u_1] = - [A_{11}] \Delta u_1^- \quad (5.2)$$

причем функция P определена равенством (1.2) и индекс плюс означает, что положено $A_{11} = A_{11}^+$. Очевидно, $P^+(\lambda_-^{(k)}) = [A_{11}] > 0$, и из последнего равенства (5.2) получим $\Delta u_1^+(\lambda_-^{(k)}) = 0$. Из этого же равенства следует, что увеличение Δu_1^+ происходит при уменьшении $P^+(\alpha)$, т. е. при увеличении α (фиг. 1). При $\alpha = \lambda_+^{(k)}$ $P^+(\alpha)$ обращается в нуль, Δu_1^+ в бесконечность. Учитывая первые два равенства (5.2) получаем в пространстве u_i связанную ветвь кривой

$$u_i^+ = u_i^+(W), \quad c_-^{(k)} \leq W \leq c_+^{(k)} \quad (5.3)$$

которая может быть названа ударной адиабатой k -й ударной волны. Сравнение (5.3) с данными фиг. 2 показывает, что условия эволюционности выполнены.

Эта ударная адиабата, построенная для разрывов с $u_1^+ > u_1^0$ может быть непрерывным образом дополнена внутри области $u_1 < u_1^0$ (где изменение упругих свойств не происходит) прямой, проходящей через точку u_i^- параллельно k -му собственному вектору матрицы A_{ij}^- . Эта прямая со-

ответствует разрывам внутри области V^* , причем, как следует из результатов п. 2, на всей этой прямой $W = c_-^{(k)}$. Можно проверить, что такая полная ударная адиабата при пересечении поверхности $u_1 = u_1^\circ$ будет испытывать излом, а при $W \rightarrow \lambda_+^{(k)}$, когда $u_i \rightarrow \infty$, касательная к ней будет стремиться к совпадению с соответствующим собственным вектором в области V^{**} .

К ударным волнам будем также относить скачки с поверхности раздела в область V^{**} . Эти скачки, как следует из п. 2 или непосредственно из (5.2), происходят в направлении собственного вектора матрицы A_{ij} и распространяются с характеристической скоростью. Изменение энтропии в таких скачках отсутствует.

Таким образом, все фронты, представляющие собой нетривиальные разрывы малой интенсивности в окрестности поверхности раздела, на которых выполняются законы сохранения, условия непрерывности перемещений и условие неубывания энтропии, представляют собой либо скачки (с учетом границ) в одной из областей V^* и V^{**} , либо скачки из V^* в V^{**} (ударные волны). Все эти разрывы эволюционны и никаких других нетривиальных разрывов, удовлетворяющих упомянутым условиям, не существует.

6. Непрерывные фронты, дополнительные соотношения. Изменение упругих свойств среды может происходить, очевидно, также на фронтах с непрерывным изменением величин. На этих фронтах должны быть выполнены условия непрерывности u_i, v_i, S , а также условие перехода $\psi(u_i, S, x) = 0$, т. е. восемь условий. Если выполняются только эти условия, то для эволюционности скорость фронта должна (фиг. 2) принадлежать одному из интервалов

$$0 < W < \bar{c}_*^{(1)}, \quad c_{**}^{(1)} < W < c_*^{(2)}, \quad c_{**}^{(2)} < W < c_*^{(3)}, \quad c_{**}^{(3)} < W \quad (6.1)$$

Аналогичные непрерывные фронты для чисто продольных волн рассматривались и использовались для построения решений в [9—11], где они были названы сигнотонами.

Как видно из фиг. 2, если в непрерывном фронте происходит переход из V^{**} в V^* и W удовлетворяет одному из неравенств

$$c_*^{(1)} < W < c_{**}^{(1)}, \quad c_*^{(2)} < W < c_{**}^{(2)}, \quad c_*^{(3)} < W < c_{**}^{(3)} \quad (6.2)$$

то для эволюционности разрыва к перечисленным выше восьми условиям должно быть добавлено еще одно «дополнительное» условие на фронте. Это связано с появлением в случае (6.2) дополнительной уходящей от фронта характеристики. Для фронтов (6.1) все семейства характеристик проходят с одной стороны фронта на другую, а для фронтов (6.2) имеется одно семейство характеристик, которые уходят от фронта с обеих сторон. Можно сказать, что возмущения, связанные с этим семейством характеристик, излучаются фронтом. Поэтому непрерывные фронты типа (6.2) можно назвать излучающими в отличие от неизлучающих фронтов (6.1).

Для установления дополнительного соотношения будем исходить из следующей физической модели разрыва. Будем предполагать, что изменение упругих свойств среды происходит непрерывным образом в узком слое в пространстве u_i , ширина слоя затем устремляется к нулю. Внутри такого слоя, как и вне его, предполагаются справедливыми уравнения теории упругости. В этом случае линия, представляющая фронт k -го типа на плоскости xt , заменится узкой полоской, внутри которой проходит мно-

жество характеристик k -го семейства, выходящих из этой полости через обе границы и уходящих от нее. На любом интервале времени можно найти характеристику, которая в течение этого времени находилась внутри полоски. Последнее означает, что можно написать соотношения на k -й характеристике с учетом того, что скорость ее движения в пределе совпадает со скоростью движения фронта

$$|A_{ij} - \rho W^2 \delta_{ij}| = 0 \quad (6.3)$$

$$\rho g_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + W \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - \rho W g_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + W \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = B_i g_i \frac{\partial S}{\partial x} + g_i C_i + g_i F_i$$

(g_i — собственный вектор матрицы A_{ij}). Первое из уравнений (6.3) позволяет по заданному W найти соответствующее значение A_{11} (можно убедиться, что если $c_*^{(k)} < W < c_{**}^{(k)}$, то $A_{11}^* < A_{11} < A_{11}^{**}$). После этого второе равенство (6.3) дает искомое дополнительное соотношение на фронте, которое можно записать в виде

$$\rho g_i \left(\frac{dv_i}{dt} - W \frac{du_i}{dt} \right) = B_i g_i \frac{\partial S}{\partial x} + g_i C_i + g_i F_i \quad (6.4)$$

(прямые производные означают дифференцирование вдоль фронта).

Вообще говоря, можно представить себе и другие модели непрерывного излучающего фронта, однако рассмотренный вариант обладает тем привлекательным качеством, что не выходит за рамки теории упругости.

В связи с этим упомянем, что рассматривались [16] фронты, на которых производилось сопряжение решений волнового уравнения и уравнения первого порядка. Среди различных типов фронтов был введен и излучающий фронт («граница раздела второго типа»). Интересно отметить, что дополнительное условие на этом фронте, полученное [16] из совсем других представлений о его структуре, совпадает с найденным выше дополнительным условием, выражающим соотношение на характеристике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. МТТ. 1968. № 2. С. 44—53.
2. Голоконников Л. А. Вариант разномодульной теории упругости // Механика полимеров. 1969. № 2. С. 363—365.
3. Wesolowski Z. Elastic material with different elastic constants in two regions of variability of deformation // Arch. Mech. Stosow. 1969. V. 21. № 4. P. 449—468.
4. Джонс Р. М. Соотношения, связывающие напряжения и деформации в материалах с разными модулями упругости при растяжении и сжатии // Ракетн. техника и космонавтика. 1977. Т. 15. № 1. С. 16—25.
5. Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29—34.
6. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 317 с.
7. Белл Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. М.: Наука. 1984. Ч. 1. 596 с.; Ч. 2. 431 с.
8. Ивандаев А. И., Губайдуллин А. А. Исследование нестационарного истечения вскипающей жидкости в термодинамически равновесном приближении // Теплофизика высоких температур. 1978. Т. 16. № 3. С. 556—562.
9. Маслов В. П., Мосолов П. П. Теория упругости для разномодульной среды. М.: Изд-во. МИЭМ, 1985. 99 с.
10. Маслов В. П., Мосолов П. П. Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 419—437.
11. Маслов В. П., Мосолов П. П., Соснина Е. В. О типах разрывов решений уравнения продольных, свободных, одномерных движений в разномодульной упругой среде // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985. С. 108—118.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
13. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
14. Мандель Ж. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика: период. сб. перев. иностр. статей, 1963. № 5. С. 119—141.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. Куликовский А. Г., Реутов В. А. Движение уединенной и периодических волн с амплитудой, близкой к предельной, в слое жидкости медленно меняющейся глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 6. С. 76—86.