

УДК 539.3

М. А. Гринфельд, М. П. Лазарев

## УСТОЙЧИВОСТЬ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ С КОГЕРЕНТНЫМИ МЕЖФАЗНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Найдены необходимые условия устойчивости (достаточные условия неустойчивости) двухфазных конфигураций с границами когерентных превращений. Предполагающиеся изотропными фазы одного и того же химического вещества различаются упругими модулями различных порядков. Кроме того, предполагается малость «собственной» деформации (СД) перехода между опорными конфигурациями фаз.

Использование асимптотики малой СД фазового превращения позволяет находить физические параметры и уравнения межфазных поверхностей для равновесных актуальных конфигураций в виде разложений в ряды по малому параметру в окрестности опорных состояний. При когерентных переходах однородное напряженно-деформированное состояние одной из фаз однозначно определяется по заданному однородному состоянию соседней фазы, ориентации плоской когерентной границы и СД превращения [1, 2].

Для анализа условий устойчивости равновесия гетерогенных термодинамических систем используется подход, основанный на исследовании неотрицательной определенности второй вариации соответствующего энергетического функционала [3, 4]. Вопрос об устойчивости равновесия конфигураций, в которых фазы находятся в однородном напряженно-деформированном состоянии и разделены плоской межфазной границей, сводится к выяснению условий неотрицательной определенности собственного спектрального значения системы линейных однородных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами с соответствующими граничными условиями.

Здесь рассматриваются изотермические гетерогенные системы с изотропными несжимаемыми фазами. В рамках асимптотики малой СД превращения решение спектральной задачи работы [4] ищется в виде рядов по малому параметру. В низшем приближении в двумерном случае для однородно деформированных фаз это позволяет существенно упростить задачу и указать критерий потери устойчивости плоской когерентной границы. Вопрос об устойчивости однозначно решается при известном напряженно-деформированном состоянии одной из фаз и заданной СД превращения. Выведено уравнение для критических деформаций (уравнение поверхности нейтральной устойчивости), которые имеют порядок СД превращения. Указаны стабилизирующие и дестабилизирующие факторы для устойчивости когерентных границ. Показано, что если в двухфазной равновесной конфигурации с когерентной границей при СД всестороннего растяжения — сжатия в гидростатически напряженном состоянии находится фаза с меньшим модулем сдвига, то такая система всегда неустойчива. Полученные результаты используются для обсуждения локальной устойчивости некоторых равновесных конфигураций гетерогенных систем с криволинейными когерентными границами между неоднородно деформированными фазами.

Рассмотрена задача об устойчивости периодической структуры, состоящей из чередующихся слоев двух различных фаз. Получены соответствующие дисперсионные уравнения и уравнения поверхности нейтральной устойчивости. Сформулированы необходимые условия устойчивости таких структур для возмущений симметричного и антисимметричного типа. Частным предельным случаем указанной задачи оказывается задача об устойчивости плоского слоя — зародыша новой фазы в безграничной упругой матрице.

Влияние внешних границ рассмотрено на примере задач об устойчивости зародыша новой фазы на поверхности упругого полупространства (жесткой стенки или свободной поверхности). В случае жесткой стенки длинноволновые возмущения не приводят к потере устойчивости. В случае свободной поверхности неустойчивость при длинноволновых возмущениях наступает при ненулевом скачке главных напряжений в направлении касательной к межфазной границе.

1. **Необходимые условия устойчивости систем с когерентными межфазными границами.** Рассматривается изотермическая гетерогенная система, состоящая из двух упругих фаз («плюс» и «минус») одного и того же химического вещества, разделенных когерентной межфазной границей. Поверхностное натяжение и внешние силовые поля отсутствуют.

Опорная конфигурация фазы плюс отождествляется с начальной однофазной конфигурацией [1]. Предполагается, что переходу в опорную конфигурацию фазы минус соответствует малая аффинная СД превращения, вызывающая перемещения материальных частиц  $w_i$ , задаваемых соотношениями  $w_i = \varepsilon \Delta_{ij} x^j$ ,  $\Delta_{ij} \sim 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , где  $x^j$  — лагранжевы декартовы координаты в начальной конфигурации ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

В предположении, что в опорных конфигурациях фазы находятся в ненапряженном состоянии при температуре, соответствующей совпадению плотностей свободных энергий фаз на единицу массы, поля дополнительных перемещений частиц  $v^i$  и уравнение межфазной границы  $x^i(\xi^\alpha, \varepsilon)$  ( $\xi^1, \xi^2$  — поверхностные координаты) в гетерогенной актуальной конфигурации могут быть найдены в виде рядов по малому параметру  $\varepsilon$  [1]:

$$v_{\pm}^i = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N v_{N\pm}^i, \quad x^i(\xi^\alpha, \varepsilon) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N x_{N}^i(\xi^\alpha) \quad (1.1)$$

Была установлена [3, 4] спектральная задача для исследования условий устойчивости равновесной гетерогенной конфигурации, в которой однородно деформированные фазы разделены плоской межфазной границей. Постоянные в каждой из фаз градиенты перемещений  $v_{i,j}$  обозначим  $\kappa_{ij}$  (запятая перед латинским индексом означает дифференцирование по пространственной координате начальной конфигурации).

Решение спектральной задачи работы [4] также ищется в виде рядов

$$\pi = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N \pi_N, \quad a^i(x^k) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N a_N^i, \quad c = \sum_{N=-1}^{\infty} \varepsilon^N c_N \quad (1.2)$$

Здесь  $\pi$  — собственное значение спектральной задачи,  $a^i$  — вариации поля дополнительных перемещений,  $c$  — «скорость» межфазной поверхности прообраза в начальной конфигурации в направлении единичной нормали  $n^i$ , индуцированная изменением параметра варьирования. На нетривиальном вещественном поле  $a^i, c$ , принадлежащем собственному значению  $\pi$  и удовлетворяющем условию нормировки (1.8) работы [4], вторая вариация свободной энергии системы принимает свое экстремальное значение, равное  $\pi$ . Следовательно, для устойчивости термодинамической системы необходимо, чтобы собственные значения параметра  $\pi$  были неотрицательны.

В низшем приближении по  $\varepsilon$  спектральная задача работы [4] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{ijkl} a_{0k, lj} + \pi_0 a_0^i &= 0 \quad (1.3) \\ [a_0^i] &= -c_{-1} [v_{1\cdot, j}^i + \Delta_{\cdot j}^i] n^j \\ [\bar{\psi}^{ijkl} a_{0k, l}] n_j &= c_{-1, \alpha} x_{j \cdot 0}^{\alpha} [\bar{\psi}^{ijkl} v_{1k, l}] \\ ([\bar{\psi}^{ijkl} v_{1k, l} a_{0i, \alpha}] + [\bar{\psi}^{ijkl} v_{1k, l} (v_{1i, p} + \Delta_{ip})] n^p c_{-1, \alpha}) x_{j \cdot 0}^{\alpha} &= \\ &= [\bar{\psi}^{ijkl} (v_{1i, p} + \Delta_{ip}) a_{0k, l}] n^p n_j \\ \bar{\psi}^{ijkl} &\equiv \partial^2 \bar{\psi} / \partial v_{i, j} \partial v_{k, l} \\ x_{\cdot \alpha}^i &\equiv \partial x^i / \partial \xi^\alpha, \quad [a] \equiv a^+ - a^- \end{aligned}$$

Здесь  $\psi$  — плотность свободной энергии на единицу массы, черта сверху показывает, что значение соответствующей производной вычисляется при  $\varepsilon = 0$ ; запятая перед греческим индексом означает частное дифференцирование по поверхностной координате. Первое из соотношений (1.3) должно выполняться внутри соответствующих фаз, а остальные — на межфазной границе.

Для изотропных фаз компоненты тензора  $\bar{\psi}^{ijkl}$  вычисляются по формуле [5]

$$m\bar{\psi}^{ijkl} = \lambda\delta^{ij}\delta^{kl} + \mu(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) \quad (1.4)$$

Здесь  $m$  — плотность массы в начальной конфигурации;  $\lambda_{\pm}$ ,  $\mu_{\pm}$  — коэффициенты Ламе, вычисленные в опорных конфигурациях.

Ограничимся случаем плоской деформации, полагая поля  $\Delta_{iz}$ ,  $v_{z\alpha}$ ,  $a_z$  равными нулю (вместо  $a_{0i}$ ,  $v_{1i}$  и  $\pi_0$  в дальнейшем используются обозначения  $a^i$ ,  $v_i$  и  $\pi$ ), а поля  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  не зависящими от  $x^3$ . Будем также предполагать, что фазы изотропны и несжимаемы, т. е. коэффициент  $\lambda$  стремится в бесконечность, а  $\kappa_{.i}^i$  и  $a^i_{.i}$  обращаются в нуль ( $i = 1, 2$ , причем  $i = 1$  соответствует координате  $x$ , а  $i = 2$  —  $z$ ). Конечную величину  $\lambda_{\pm}\kappa_{.i}^i$  обозначим  $-p_{\pm}$ , а  $\lambda_{\pm}a^i_{.i}$  через  $-p'_{\pm}(x, z)$ . Система (1.3), дополненная условием несжимаемости, после исключения  $c_{-1}$  и использования условий равновесия (см., например, первую формулу (2.10) в работе [1]) примет следующий вид:

а) внутри фаз

$$c_{\perp\pm}^2 \left( \frac{\partial^2 a_1^{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1^{\pm}}{\partial z^2} \right) - m^{-1} \frac{\partial p_{\pm}'}{\partial x} + \pi a_1^{\pm} = 0 \quad (1.5)$$

$$c_{\perp\pm}^2 \left( \frac{\partial^2 a_2^{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2^{\pm}}{\partial z^2} \right) - m^{-1} \frac{\partial p_{\pm}'}{\partial z} + \pi a_2^{\pm} = 0$$

$$\frac{\partial a_1^{\pm}}{\partial x} + \frac{\partial a_2^{\pm}}{\partial z} = 0, \quad c_{\perp\pm} \equiv (\mu_{\pm} m^{-1})^{1/2}$$

б) на поверхности — прообразе межфазной границы ( $z = 0$ )

$$\left[ \frac{\partial a_1}{\partial x} - \beta \frac{\partial a_2}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[ c_{\perp}^2 \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial a_2}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial a_2}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.6)$$

$$\left[ -m^{-1} p' + 2c_{\perp}^2 \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] = 0$$

$$\alpha \frac{\partial a_1^-}{\partial x} - \beta c_{\perp+}^2 \left( \frac{\partial a_1^+}{\partial z} + \frac{\partial a_2^+}{\partial x} \right) - 2c_{\perp+}^2 \frac{\partial a_2^+}{\partial z} + m^{-1} p_+' = 0$$

$$\alpha \equiv \frac{[2c_{\perp}^2 (\kappa_{11} - \kappa_{22})]}{[\kappa_{22} + \Delta_{22}]}, \quad \beta \equiv \frac{[\kappa_{12} + \Delta_{12}]}{[\kappa_{22} + \Delta_{22}]} \quad (1.7)$$

Вся информация о деформированном состоянии системы содержится в двух параметрах  $\alpha$  и  $\beta$ . В равновесной гетерогенной конфигурации с плоской когерентной границей между однородно деформированными фазами состояние одной из фаз при известной СД превращения однозначно определяется по состоянию другой фазы по формулам (см. формулы (9), (10) работы [2])

$$\kappa_{11}^- = \kappa_{11}^+ - \Delta_{11}, \quad \kappa_{22}^- = \kappa_{22}^+ + \Delta_{11} \quad (1.8)$$

$$\kappa_{12}^- = \kappa_{12}^+ + \Delta_{21} + 2(\chi - 1)\kappa_{(12)}^+, \quad \kappa_{21}^- = \kappa_{21}^+ - \Delta_{21}$$

$$\sigma_{11}^- = (1 - \chi^{-1})\sigma_{22}^+ + \chi^{-1}\sigma_{11}^+ - 4\mu_- \Delta_{11}, \quad \sigma_{12}^- = \sigma_{12}^+, \quad \sigma_{22}^- = \sigma_{22}^+$$

$$p^- = p^+ - 2[\mu] \kappa_{22}^+ + 2\mu_- \Delta_{11} = \frac{1}{2} \chi^{-1} (\sigma_{22}^+ - \sigma_{11}^+) + \sigma_{22}^+ + 2\mu_- \Delta_{11}$$

$$\sigma_{ij} \equiv -p\delta_{ij} + 2\mu\kappa_{(ij)}, \quad \chi \equiv \mu_+/\mu_-$$

Подставляя (1.8) в (1.7), получим формулы для расчета параметров  $\alpha$  и  $\beta$  по заданным  $\kappa_{ij}^+$  или  $\sigma_{ij}^+$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\Delta^{-1} (2 [c_{\perp}^2] (\kappa_{11}^+ - \kappa_{22}^+) + 4c_{\perp}^2 - \Delta_{11}) = \\ &= -m^{-1} \Delta^{-1} ((\sigma_{11}^+ - \sigma_{22}^+) (1 - \chi^{-1}) + 4\mu_- \Delta_{11}), \quad \Delta \equiv \Delta_{11} + \Delta_{22} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2\Delta^{-1} (\Delta_{(12)} + (\chi - 1) \kappa_{(12)}^+) = \\ &= \Delta^{-1} (2\Delta_{(12)} + (\chi - 1) \sigma_{12}^+ / \mu_+) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Система (1.5), (1.6), как и (1.3), должна дополняться соответствующими условиями на внешней границе.

**2. Локальная устойчивость когерентной границы.** Рассматривается актуальная двухфазная конфигурация, в которой область  $z > 0$  занята фазой плюс, а область  $z < 0$  — фазой минус. Следуя определению работы [4], когерентная граница устойчива, если экспоненциально затухающим в глубь соответствующих полупространств и имеющим колебательный характер в направлении межфазной границы решениям  $a^i(x, z)$ ,  $p'(x, z)$  спектральной задачи (1.5), (1.6), соответствуют неотрицательные собственные значения  $\lambda$ . Экспоненциально затухающие решения (1.5) в верхней и нижней полуплоскостях имеют вид

$$a_1^{\pm} = \pm i (B_1^{\pm} \exp(\mp kz) + B_2^{\pm} \xi^{\pm} \exp(\mp k\xi^{\pm} z)) \exp(-ikx) \quad (2.1)$$

$$a_2^{\pm} = (B_1^{\pm} \exp(\mp kz) + B_2^{\pm} \exp(\mp k\xi^{\pm} z)) \exp(-ikx)$$

$$p_{\pm}' = -\pi m k^{-1} B_1^{\pm} \exp(k(\mp z - ix)), \quad \xi^{\pm} \equiv \sqrt{1 - \pi k^{-2} c_{\perp}^{-2}}_{\pm}$$

( $k$  — вещественное волновое число).

Подстановка (2.1) в условия на межфазной границе (1.6) приводит к линейной однородной системе алгебраических уравнений относительно  $B_1^{\pm}$ ,  $B_2^{\pm}$ . Условие существования нетривиального решения спектральной задачи (1.5), (1.6) сводится к обращению в нуль детерминанта этой системы, что приводит к уравнению для определения спектрального значения  $q$  ( $q \equiv \pi k^{-2}$ )

$$\xi_- R_+^2 + \xi_+ R_-^2 - (Q_-^2 + Q_+^2) \xi_+ \xi_- - \beta^2 (4c_{\perp+}^4 \xi_+ - S_+^2 + 4c_{\perp-}^4 \xi_- - S_-^2) = 0 \quad (2.2)$$

$$Q \equiv 2c_{\perp}^2 + \alpha, \quad R \equiv 2c_{\perp}^2 - q + \alpha, \quad S \equiv 2c_{\perp}^2 - q$$

Полагая  $q = 0$  и раскрывая возникающую при этом неопределенность по правилу Лопиталья, приходим к уравнению поверхности нейтральной устойчивости!

$$1/4 c_{\perp+}^{-2} c_{\perp-}^{-2} \alpha^2 - \beta^2 = 1 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) определяет в плоскости переменных  $\alpha$  и  $\beta$  гиперболу. Если точка  $(\alpha_0, \beta_0)$  находится вне ветвей этой гиперболы (имеются в виду области, содержащие точки  $\beta = 0$ ,  $\alpha \rightarrow \pm \infty$ ), то уравнение (2.2) обязательно имеет отрицательный корень  $q$ , следовательно, соответствующая равновесная конфигурация неустойчива.

Сложный вид уравнения (2.2) не позволяет провести полный анализ знакоопределенности корней при произвольных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ . Не останавливаясь на доказательствах, укажем свойства уравнения (2.2): при любом значении параметра  $\alpha = \alpha_0$  ( $\beta = \beta_0$ ) можно найти такое значение параметра  $\beta = \beta_0$  ( $\alpha = \alpha_0$ ), что при всех  $\beta$  (всех  $\alpha$ ), удовлетворяющих условию  $|\beta| > \beta_0$  ( $|\alpha| > \alpha_0$ ), уравнение (2.2) не будет иметь отрицательных корней (имеет отрицательный корень); при этом когерентная граница

будет удовлетворять необходимым условиям устойчивости (достаточным условиям неустойчивости).

Используя формулы (1.9), (1.10), уравнение поверхности нейтральной устойчивости можно переписать в параметрах  $\kappa_{ij}^+$  или  $\sigma_{ij}^+$ :

$$((\kappa_{11}^+ - \kappa_{22}^+)(\chi - 1) + 2\Delta_{11})^2 - 4\chi(\Delta_{(12)} + (\chi - 1)\kappa_{(12)}^+)^2 = \chi\Delta^2 \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{4}\mu_+^{-2}\chi((\sigma_{11}^+ - \sigma_{22}^+)(1 - \chi^{-1}) + 4\mu_+\chi^{-1}\Delta_{11})^2 - 4(\Delta_{(12)} + (\chi - 1)\sigma_{12}^+\mu_+^{-1})^2 = \Delta^2 \quad (2.5)$$

При  $\chi \neq 1$  и  $\Delta_{11} \neq -\Delta_{22}$  уравнение (2.5) определяет в пространстве параметров  $(\sigma_{11}^+, \sigma_{22}^+, \sigma_{12}^+)$  гиперболический цилиндр (при  $\Delta_{11} = -\Delta_{22}$  цилиндр вырождается в две пересекающиеся плоскости). Области вне этого цилиндра соответствуют неустойчивым равновесиям. При  $\chi = 1$  вопрос о потере устойчивости зависит только от СД (см. (2.4) или (2.5)).

Если зафиксировать  $\Delta_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}^+$  и  $\mu_+$ , причем  $\sigma_{12}^+ \neq 0$ , то при  $\chi \rightarrow \infty$  ( $\chi \rightarrow 0$ ) левая часть в (2.5) будет меньше правой (больше правой, если  $\sigma_{11}^+ - \sigma_{22}^+ \neq 4\mu_+\Delta_{11}$ , что эквивалентно условию  $\sigma_{11}^- = \sigma_{22}^-$ ), а соответствующие равновесия будут удовлетворять необходимым условиям устойчивости (достаточным условиям неустойчивости).

Пусть  $\sigma_{12}^+ = 0$ , тогда, как видно из (2.5), при достаточно больших  $\chi$  любые негидростатические напряжения в фазе плюс приводят к неустойчивости двухфазного равновесия. Этот результат согласуется с полученным в [6] выводом о неустойчивости межфазной границы, разделяющей негидростатически напряженную твердую фазу и ее расплав, при переходе с проскальзыванием.

Рассмотрим фазовые превращения, сопровождающиеся СД всестороннего растяжения — сжатия ( $\Delta_{ij} = \delta\delta_{ij}$ ), при  $\sigma_{12}^+ = 0$ . Если  $\chi = 1$ , то  $\alpha = -2c_{\perp}^2$ , а (2.2) имеет корни  $q = 0$  и  $q_+ = c_{\perp}^2$ , т. е. система устойчива. Если  $\chi < 1$  и  $\sigma_{11}^+ = \sigma_{22}^+$  или  $\chi > 1$  и  $\sigma_{11}^- = \sigma_{22}^-$ , то межфазная граница неустойчива (см. (2.4), (2.5)). Это является характерной особенностью когерентных границ: при СД всестороннего растяжения — сжатия плоская когерентная граница всегда неустойчива, если в гидростатическом состоянии находится фаза с меньшим модулем сдвига (это верно и для сжимаемых фаз). Заметим, что обе фазы не могут одновременно находиться в гидростатически напряженном состоянии (см. формулы (1.8)).

Полученные выше достаточные условия неустойчивости можно использовать для анализа локальной устойчивости гетерогенных систем с криволинейными границами и неоднородно деформированными фазами, поскольку при достаточно коротких возмущениях локальной кривизной и неоднородностью равновесной конфигурации можно пренебречь. Например, известно, что при когерентных превращениях с СД всестороннего растяжения — сжатия равновесные эллиптические зародыши новой фазы в упругих матрицах находятся в гидростатически напряженном состоянии [1]. На основании полученных выше необходимых условий устойчивости когерентных границ можно утверждать, что равновесная конфигурация с зародышем будет неустойчивой, если новая фаза имеет меньший, чем у основной фазы, модуль сдвига.

**3. Устойчивость двухфазной периодической структуры.** Здесь в качестве актуальной равновесной конфигурации рассмотрим гетерогенную систему, состоящую из чередующихся слоев фаз плюс и минус. Границы слоев в начальной однофазной конфигурации предполагаются параллель-

ными, а толщины слоев — прообразов  $2H_+$  и  $2H_-$  одинаковыми для каждой фазы.

Формулы (1.8) позволяют рассчитать равновесное однородное напряженное состояние в слоях фазы минус по заданному состоянию в слоях фазы плюс. Напряженные состояния всех слоев одной фазы оказываются одинаковыми, следовательно, значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  одинаковы для всех межфазных границ.

Рассмотрим устойчивость периодической структуры по отношению к вариациям (возмущениям) поля дополнительных перемещений  $a_i(x, z)$  и  $p'(x, z)$ , имеющих периодический характер (ось  $x$  направим по одной из границ), т. е.

$$\begin{aligned} a_i(x, z) &= a_i(x, z \pm 2(H_+ + H_-)) \\ p'(x, z) &= p'(x, z \pm 2(H_+ + H_-)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Назовем гетерогенную двухфазную периодическую систему с когерентными межфазными границами устойчивой, если периодическим вдоль оси  $z$  и имеющим колебательный характер вдоль межфазных границ решениям  $a_i, p'$  спектральной задачи (1.5), (1.6) соответствуют неотрицательные собственные значения  $\lambda$ .

При изучении равновесия и устойчивости указанных систем естественным образом выделяется «периодическая ячейка» толщины  $2(H_+ + H_-)$ , состоящая из двух соседних слоев. Все характеристики периодической системы повторяются при переходе от одной ячейки к другой. Рассмотрим периодическую ячейку  $z \in [-2H_-, 2H_+]$  (для определенности пусть  $z \in [0, 2H_+]$  — слой фазы плюс). Общее решение системы дифференциальных уравнений (1.5) в ячейке можно записать в виде суммы симметричных и антисимметричных возмущений. Возмущения симметричного типа имеют вид

$$\begin{aligned} f_1^\pm &= i(F_1^\pm \operatorname{ch} k(z \mp H_\pm) + F_2^\pm \xi_\pm \operatorname{ch} k\xi_\pm(z \mp H_\pm)) e^{-ikx} \\ f_2^\pm &= -(F_1^\pm \operatorname{sh} k(z \mp H_\pm) + F_2^\pm \operatorname{sh} k\xi_\pm(z \mp H_\pm)) e^{-ikx} \\ p'_{f\pm} &= -k^{-1} \pi m F_1^\pm \operatorname{ch} k(z \mp H) e^{-ikx} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для антисимметричных возмущений  $g_{1,2}^\pm$  и  $p'_{g\pm}$  в каждой формуле (3.2) косинусы и синусы взаимно заменяются, а вместо постоянных  $F_{1,2}^\pm$  берутся постоянные  $G_{1,2}^\pm$ .

В (3.2) функции  $f_i^-$  и  $p'_{f-}$  рассматриваются при  $z \in [-2H_-, 0]$ , а функции  $f_i^+$  и  $p'_{f+}$  — при  $z \in [0, 2H_+]$ . В слое  $z \in [0, 2H_+]$  вектор  $\mathbf{f}_+ = \{f_1^+, f_2^+\}$  определяет симметричные относительно оси  $z = H_+$  возмущения поля перемещений, а вектор  $\mathbf{g}_+$  — антисимметричные. В частности, на границах слоя  $z = 0$  и  $z = 2H_+$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} f_1^+(x, 0) &= f_1^+(x, 2H_+), & f_2^+(x, 0) &= -f_2^+(x, 2H_+) \\ p'_{f+}(x, 0) &= p'_{f+}(x, 2H_+), & p'_{g+}(x, 0) &= -p'_{g+}(x, 2H_+) \\ g_1^+(x, 0) &= -g_1^+(x, 2H_+), & g_2^+(x, 0) &= g_2^+(x, 2H_+) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогичными свойствами обладают  $f_{1,2}^-, g_{1,2}^-, p'_{f-}$  и  $p'_{g-}$ .

Подставим (3.1), (3.2) в систему граничных соотношений (1.6) при  $z = 0$ . Получим первую группу алгебраических уравнений относительно  $F_{1,2}^\pm$  и  $G_{1,2}^\pm$ . Вторую группу уравнений получим, рассматривая граничные соотношения (1.6) при  $z = 2H_+$ . В качестве  $a_i^+$  и  $p_+^+$  возьмем значения  $a_i^+(x, 2H_+)$  и  $p_+^+(x, 2H_+)$  из (3.2). Пользуясь условием периодичности

(3.1), в качестве  $a_i^-$  и  $p_-'$  из соседней ячейки возьмем равные им значения  $a_i^-(x, -2H_-)$  и  $p_-'(x, -2H_-)$ . В совокупности полученные две группы линейных однородных алгебраических уравнений образуют систему из восьми уравнений для определения восьми постоянных  $F_{1,2}^\pm$  и  $G_{1,2}^\pm$ .

Ограничимся рассмотрением деформированных состояний периодической структуры, при которых параметр  $\beta$  обращается в нуль (для этого достаточно положить, например,  $\Delta_{(12)} = 0$  и  $\sigma_{12}^+ = 0$ ). Тогда после эквивалентных преобразований, учитывающих свойства (3.3), полученная система уравнений распадается на две независимые подсистемы: первая — для  $F_{1,2}^\pm$ , вторая — для  $G_{1,2}^\pm$ .

Условием существования нетривиального решения  $f_i^\pm, p_{f\pm}'$  спектральной задачи (1.5), (1.6) является равенство нулю определителя  $D_f$  первой подсистемы, а решения  $g_i^\pm, p_{g\pm}'$  — определителя  $D_g$  второй подсистемы. Вычисляя  $D_f$ , приходим к уравнению для определения спектрального параметра  $q$  ( $h = kH$ )<sup>1</sup>

$$D_f = q(\xi_+\xi_-(Q_-^2 \text{th } h_- + Q_+^2 \text{th } h_+) - \xi_+R_-^2 \text{th } h_- \xi_- - \xi_-R_+^2 \text{th } h_+ \xi_+) = 0 \quad (3.4)$$

Раскрывая неопределенность при  $q = 0$  и приравнивая полученное выражение нулю, получаем уравнение поверхности нейтральной устойчивости для симметричных возмущений

$$(q^{-2}D_f)_{q=0} = -\frac{1}{2}\alpha^2(c_{\perp-}^{-2}(\text{th } h_- - t_-) + c_{\perp+}^{-2}(\text{th } h_+ - t_+)) + 2\alpha(t_- + t_+) + \\ + 2(c_{\perp-}^2(\text{th } h_- + t_-) + c_{\perp+}^2(\text{th } h_+ + t_+)) = 0 \\ t_\pm \equiv h_\pm(1 - \text{th}^2 h_\pm) \quad ((D_f)_{q=0} = (q^{-1}D_f)_{q=0} = 0)$$

Аналогичный анализ показывает, что в дисперсионном уравнении (3.4) и уравнении поверхности нейтральной устойчивости (3.5) для антисимметричных возмущений возникают котангенсы вместо тангенсов.

Уравнение (3.5) всегда имеет два действительных корня разных знаков  $\alpha_{1,2}^f$  ( $\alpha_1^f < 0 < \alpha_2^f$ ). Для случая  $h_+ = h_- = h$  зависимость безразмерных величин  $\bar{\alpha}_{1,2}^f$  и  $\bar{\alpha}_{1,2}^g$  от  $h$  при  $\chi = 1$  и  $\chi = 10$  показана на фиг. 1 (здесь обозначено  $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha c_{\perp+}^{-1} c_{\perp-}^{-1}$ ).

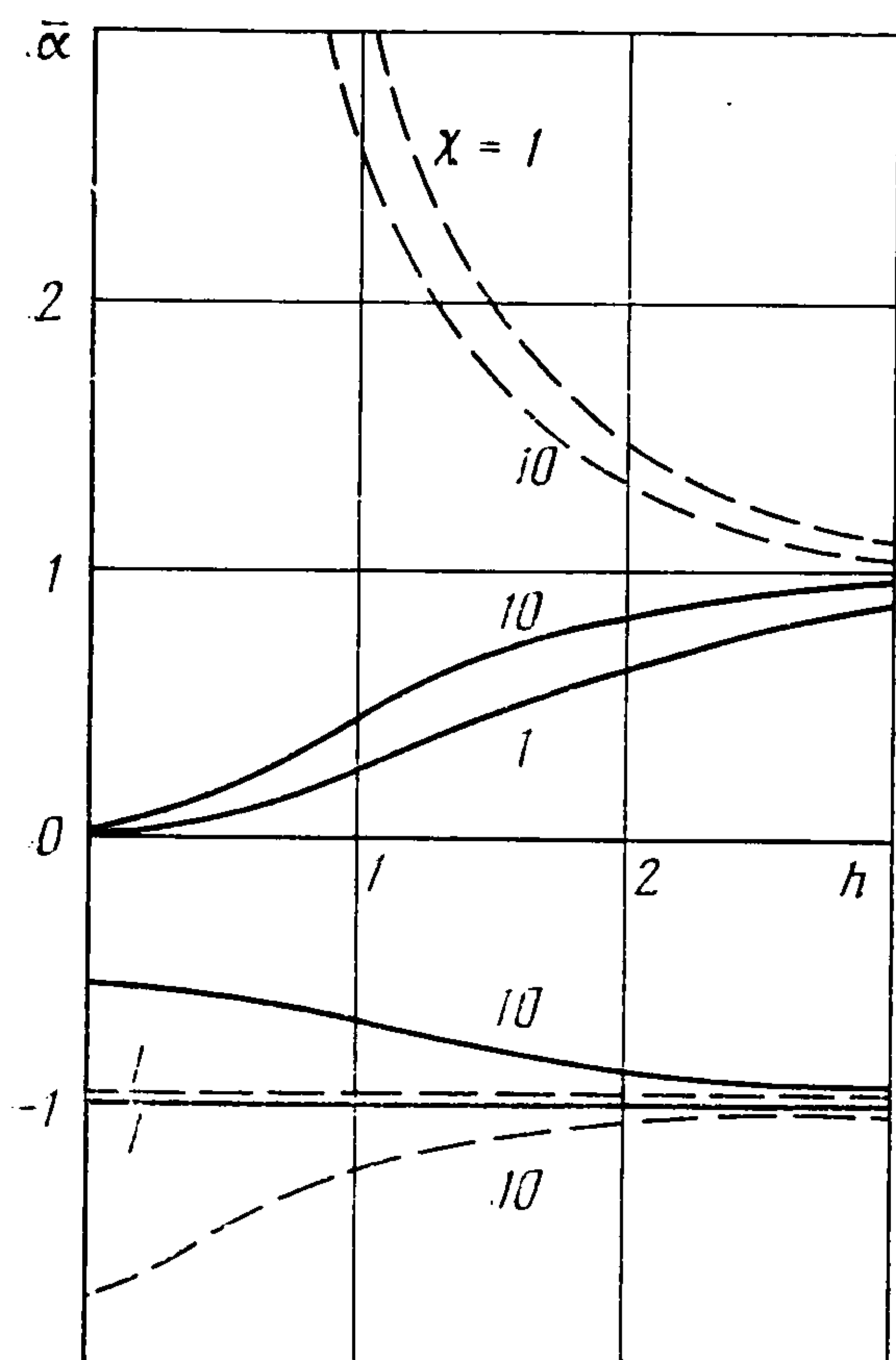
Штрихами отмечена зависимость  $\bar{\alpha}_{1,2}^f$ , сплошной линией —  $\bar{\alpha}_{1,2}^g$ . Если  $\chi = 1$ , то  $\bar{\alpha}_1^f = \bar{\alpha}_1^g = -1$  при любом  $h$ .

Если  $\alpha < \alpha_1^f$  или  $\alpha_2^f < \alpha$ , то уравнение (3.4) всегда имеет отрицательный корень  $q$ . Аналогичное утверждение верно и для антисимметричных возмущений.

Итак, если напряженно-деформированное состояние в слоях фазы плюс таково, что  $\beta = 0$ , а  $\alpha \in ]-\infty, \alpha_1^f [ \cup ] \alpha_2^f, +\infty [$  ( $\alpha \in ]-\infty, \alpha_1^g [ \cup ] \alpha_2^g, +\infty [$ ),

то равновесие в двухфазной периодической структуре будет неустойчивым по отношению к возмущениям симметричного (антисимметричного) типа.

Рассмотрим некоторые асимптотики. При  $h_+ \sim h_- \rightarrow +\infty$  приходим к результатам разд. 2 независимо от вида возмущений.



Фиг. 1

Пусть  $h_+ \sim h_- \rightarrow 0$  (физически это соответствует случаю больших длин возмущений  $k^{-1}$  при конечных толщинах слоев  $H_{\pm}$  или случаю конечных длин возмущений при малых толщинах слоев). Система будет неустойчивой относительно симметричных возмущений, если  $\bar{\alpha} \in ]-\infty, -1/2(\sqrt{\chi} + 1/\sqrt{\chi})[$  (корень  $\bar{\alpha}_2^f$  обращается в бесконечность), а относительно антисимметричных, если  $\bar{\alpha} \in ]-\infty, -2(\sqrt{\chi} + 1/\sqrt{\chi})^{-1}[ \cup ]0, +\infty[$ .

Фиг. 1 показывает, что длинноволновые возмущения могут приводить к потере устойчивости гетерогенных когерентных равновесий, несмотря на выполнение необходимых условий локальной устойчивости отдельных межфазных границ (эти условия в данном случае имеют вид  $|\bar{\alpha}| < 1$ ).

При  $h_+ \sim 1, h_- \rightarrow 0$  (что соответствует двухфазной структуре с тонкими периодическими когерентными зародышами) областью неустойчивости для антисимметричных возмущений будет объединение интервалов  $] -\infty, -1/\sqrt{\chi}[ \cup ]0, +\infty[$ , а для симметричных —  $] -\infty, -\sqrt{\chi}[ \cup ]\sqrt{\chi}(\operatorname{sh} 2h_+ + 2h_+)(\operatorname{sh} 2h_+ - 2h_+)^{-1}, +\infty[$ .

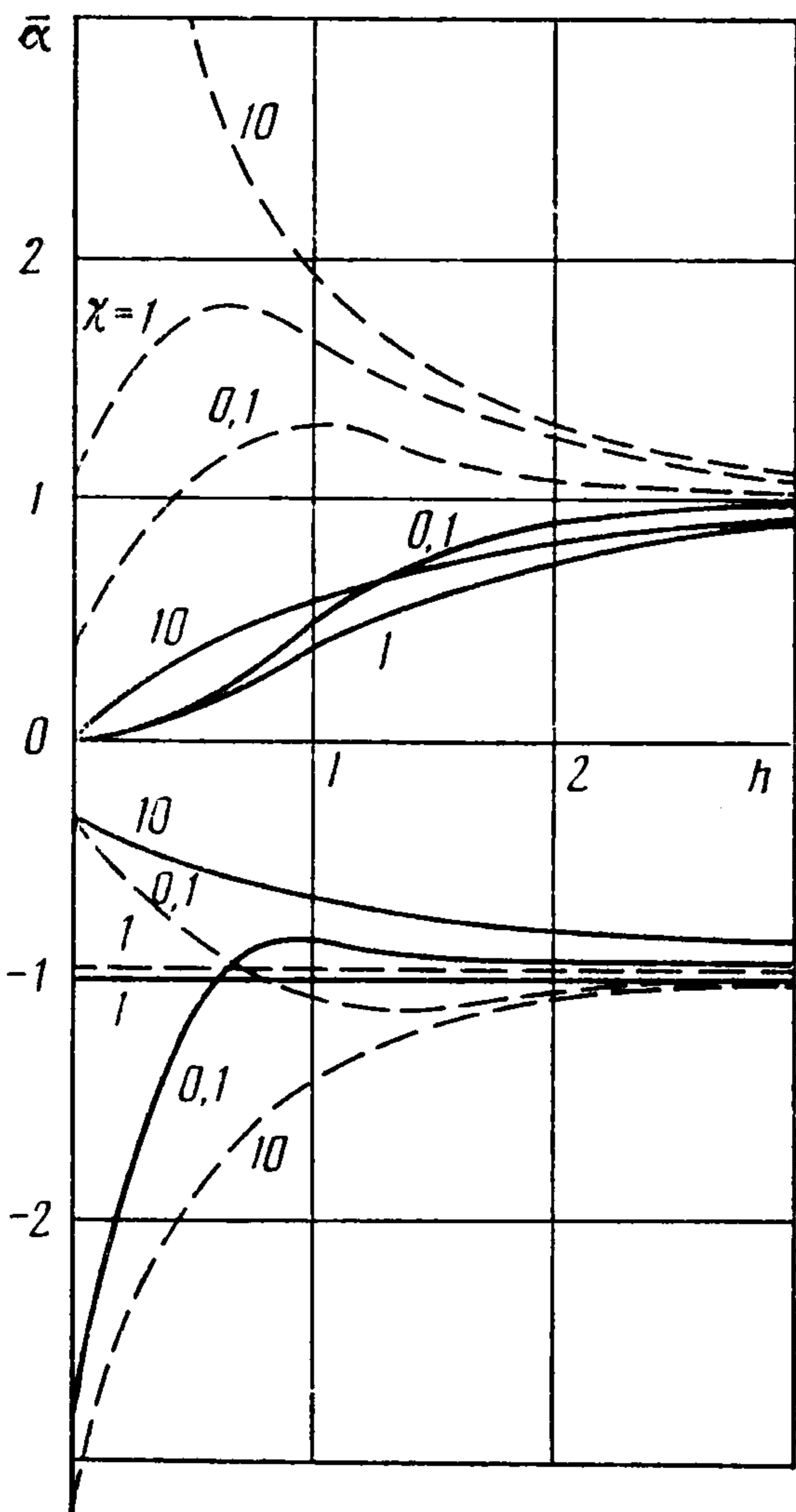
**4. Задача об устойчивости уединенного плоского включения новой фазы в безграничной упругой матрице.** Пусть в начальной конфигурации слой  $z \in ]-2H_-, 0[$  есть прообраз зародыша новой фазы минус, а области  $z \in ]-\infty, -2H_-[ \cup ]0, +\infty[$  — прообразы полупространств, занятых основной фазой плюс. Из формул (1.8) следует, что напряженно-деформированные состояния в полупространствах фазы плюс совпадают и однозначно определяют состояния в зародыше. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  оказываются одинаковыми для обеих межфазных границ.

Назовем равновесие когерентного зародыша новой фазы в безграничной упругой матрице устойчивым, если экспоненциально затухающим в глубь соответствующих полупространств основной фазы и имеющим колебательный характер вдоль границ зародыша решениям  $a_i, p'$  спектральной задачи (1.5), (1.6) соответствуют неотрицательные собственные значения  $q$ . Как и в задаче об устойчивости периодической структуры, при  $\beta = 0$  система (1.5), (1.6) имеет решения симметричного и антисимметричного типов. Рассуждения, аналогичные изложенным в разд. 2, 3, приводят к дисперсионному уравнению для определения параметра  $q$  и уравнению поверхности нейтральной устойчивости. Для решений симметричного типа эти уравнения совпадают с соотношениями (3.4) и (3.5), если в последних устремить  $h_+$  в бесконечность. Для антисимметричных решений в указанных уравнениях вместо тангенсов возникают котангенсы.

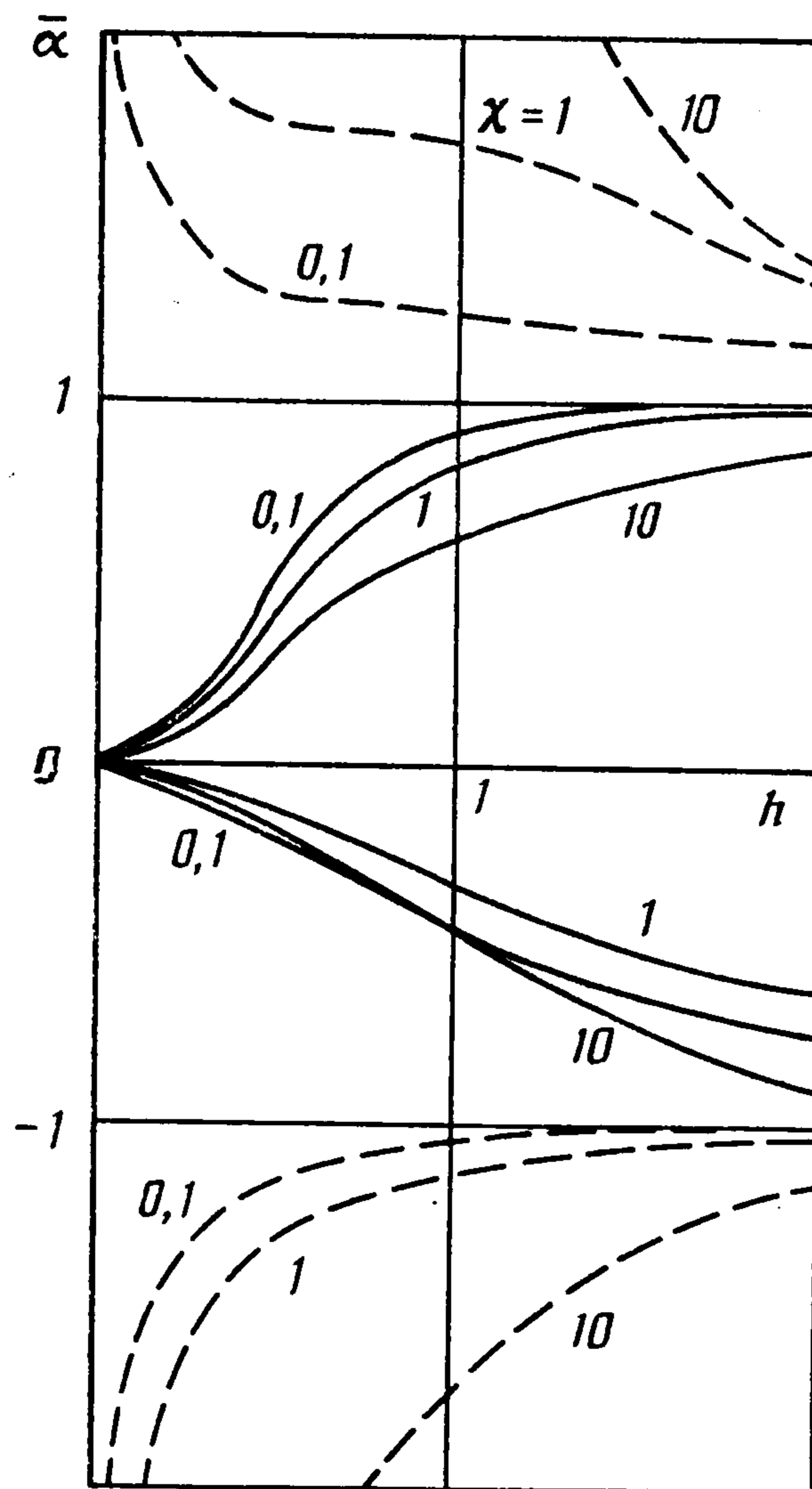
Равновесие зародыша новой фазы в упругой матрице становится неустойчивым, если  $\alpha < \alpha_1$  или  $\alpha_2 < \alpha$ .

На фиг. 2 показана зависимость  $\bar{\alpha}_{1,2}^f, \bar{\alpha}_{1,2}^g$  от  $h$  при значениях  $\chi = 0, 1; 1; 10$  ( $\bar{\alpha}_{1,2}^g$  соответствует сплошная линия,  $\bar{\alpha}_{1,2}^f$  — штриховая). Если  $\chi = 1$ , то  $\bar{\alpha}_1^f = \bar{\alpha}_1^g = -1$ . Если  $h_- \rightarrow 0$ , то  $\bar{\alpha}_1^f = -\sqrt{\chi}, \bar{\alpha}_2^f = \sqrt{\chi}, \bar{\alpha}_1^g = -1/\sqrt{\chi}, \bar{\alpha}_2^g = 0$ . Фиг. 2 иллюстрирует то, что к потере устойчивости приводят увеличение толщины зародыша при  $|\bar{\alpha}| > 1$  и уменьшение — при  $0 < \bar{\alpha}$  или  $\bar{\alpha} < \max(-\sqrt{\chi}, -1/\sqrt{\chi})$ .

**5. Устойчивость когерентного зародыша новой фазы на свободной поверхности упругого полупространства.** Пусть в начальной конфигурации область  $z \in ]0, +\infty[$  соответствует прообразу полупространства, занятого основной фазой плюс, а  $z \in ]-H, 0[$  — прообразу слоя новой фазы минус. Предполагается, что в актуальной равновесной конфигурации главные направления тензора  $\Delta_{(ij)}$  совпадают с направлениями осей  $x$  и  $z$ . Наружней границе зародыша ( $z = -H$ ) поддерживается постоян-



Фиг. 2



Фиг. 3

все нулевое давление. Система (1.8) дополняется соотношениями

$$\sigma_{22}^- = 0, \quad \sigma_{12}^- = 0 \quad (5.1)$$

Из (1.8), (5.1) и (1.9) вытекают формулы для определения однородного равновесного напряженного состояния в зародыше и параметров  $\alpha$  и  $\beta$  при заданных  $\sigma_{11}^+$ ,  $\Delta_{11}$  и  $\Delta_{22}$  (из (1.8) и (5.1) следует, что  $\sigma_{22}^+ = 0$ ,  $\sigma_{12}^+ = 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^- &= \chi^{-1} \sigma_{11}^+ - 4\mu_- \Delta_{11}, \quad \sigma_{12}^- = 0, \quad \sigma_{22}^- = 0 \\ \alpha &= -m^{-1} \Delta^{-1} (\sigma_{11}^+ (1 - \chi^{-1}) + 4\mu_- \Delta_{11}), \quad \beta = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

При исследовании устойчивости указанного равновесия спектральная задача (1.5), (1.6) дополняется вытекающими из условия постоянства давления на внешней границе зародыша следующими уравнениями ( $z = -H$ ):

$$\frac{\partial a_1^-}{\partial z} + \frac{\partial a_2^-}{\partial x} = 0, \quad p_- ' + 2\mu_- \frac{\partial a_2^-}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

Равновесный зародыш назовем устойчивым, если экспоненциально затухающим при  $z \rightarrow +\infty$  и имеющим колебательный характер вдоль межфазной границы решениям задачи (1.5), (1.6), (5.3) соответствуют неотрицательные значения параметра  $q$ . Анализ, аналогичный проведенному в разд. 2, 3, приводит к уравнению для нахождения  $q$  и соотношению для критических деформаций

$$\begin{aligned} &\xi_- (Q_+^2 \xi_+ - R_+^2) (4c_{\perp}^4 \xi_- \operatorname{ch} h \operatorname{sh} h \xi_- + S_- \operatorname{sh} h \operatorname{ch} h \xi_-) + 4\xi_+ \xi_- c_{\perp}^2 Q_- R_- S_- - \\ &- \xi_+ \xi_- \operatorname{ch} h \operatorname{ch} h \xi_- (4c_{\perp}^4 R_-^2 - Q_-^2 S_-^2) + \xi_+ \operatorname{sh} h \operatorname{sh} h \xi_- (4c_{\perp}^4 \xi_-^2 Q_-^2 + R_-^2 S_-^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} &-\alpha^2 (\chi^{-1} (\operatorname{sh} h \operatorname{ch} h - h) + \operatorname{ch}^2 h + h^2) + 4\alpha c_{\perp}^2 h^2 + 4c_{\perp}^4 (\chi (\operatorname{sh} h \operatorname{ch} h - h) + \\ &+ \operatorname{sh}^2 h - h^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) при фиксированных  $\chi$  и  $h$  всегда имеет два вещественных корня разных знаков  $\alpha_{1,2}$  ( $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ ). При  $\alpha \in ]-\infty, \alpha_1 [ \cup ]\alpha_2, +\infty[$  уравнение (5.4) имеет отрицательный корень  $q$ . Таким образом, описанная равновесная двухфазная конфигурация неустойчива, если при заданных растягивающих (или сжимающих) вдоль межфазной границы напряжениях  $\sigma_{11}^+$ , собственной деформации превращения  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{22}$ , толщине зародыша  $H$  и длине возмущений  $k^{-1}$  параметр  $\alpha$ , вычисленный по формуле (5.2), попадает в область значений  $]-\infty, \alpha_1 [ \cup ]\alpha_2, +\infty[$ .

На фиг. 3 сплошной линией показана зависимость  $\bar{\alpha}_{1,2}$  от  $h$ . При  $h \rightarrow +\infty$  (5.4) распадается на два уравнения. Одно — уравнение Рэлея для поверхностных волн в изотропном полупространстве фазы минус. Этому уравнению, как известно [5], соответствуют лишь вещественные положительные корни. Второе — уравнение (2.2) при  $\beta = 0$ . Соответственно  $\bar{\alpha}_{1,2} \rightarrow \mp 1$ . При  $h \rightarrow 0$  величины  $\bar{\alpha}_{1,2}$  асимптотически выражаются через  $h$ :

$$\bar{\alpha}_{1,2} = \mp \sqrt[2]{\frac{2}{3}\chi h^{3/2}} + o(h^{3/2})$$

т. е. пороговые значения параметра  $\alpha$ , при которых возникает неустойчивость, стремятся к нулю (фиг. 3). Следовательно, при ненулевом скачке главных напряжений в направлении касательной к межфазной границе ( $[\sigma_{11}] = -m\Delta\alpha$ ) уменьшение толщины зародыша приводит к потере устойчивости.

**6. Устойчивость когерентного зародыша на границе упругого полупространства основной фазы и жесткой стенки.** Пусть  $\Delta_{(12)} = 0$ ,  $\sigma_{12}^+ = 0$  (параметр  $\beta$  при этом обращается в нуль). Рассмотрим на внешней границе зародыша ( $z = -H$ ) условие обращения в нуль полных перемещений материальных частиц. При учете разложений (1.1) это приводит к соотношениям

$$v_1^- + \Delta_{11}x = 0, \quad v_2^- - \Delta_{22}H = 0 \quad (6.1)$$

Присутствие в конфигурации жесткой стенки накладывает ограничение на выбор  $\sigma_{11}^+$  и  $\sigma_{22}^+$ . Из (1.8) и (6.1) следует, что в актуальной конфигурации возможно только гидростатическое состояние фазы плюс:  $\sigma_{11}^+ = \sigma_{22}^+ = -p_+$ . Однородное напряженное состояние в зародыше и параметр  $\alpha$  при заданных  $p_+$ ,  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{22}$  определяются из (1.8), (1.9), (6.1) по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^- &= -p_+ - 4\mu_- \Delta_{11}, & \sigma_{22}^- &= -p_+ \\ \sigma_{12}^- &= 0, & \alpha &= 4c_{\perp}^2 \Delta_{11} \Delta^{-1} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Определение устойчивости принимается то же, что и в п. 5. Вместо (5.3) при  $z = -H$  ставится условие

$$a_1^- = a_2^- = 0 \quad (6.3)$$

Соответствующее уравнение для определения собственного значения  $q$  спектральной задачи (1.5), (1.6), (6.3) и уравнение поверхности нейтральной устойчивости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &-q^2 \xi_+ \xi_- - \xi_+ R_-^2 (\xi_- \operatorname{ch} h \operatorname{ch} h \xi_- - \operatorname{sh} h \operatorname{sh} h \xi_- - \xi_-) + \\ &+ \xi_- (Q_+^2 \xi_+ - R_+^2) (\xi_- \operatorname{ch} h \operatorname{sh} h \xi_- - \operatorname{sh} h \operatorname{ch} h \xi_-) - \\ &- \xi_+ \xi_- Q_-^2 (\operatorname{ch} h \operatorname{ch} h \xi_- - \xi_- \operatorname{sh} h \operatorname{sh} h \xi_- - 1) = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\alpha^2 (h + \operatorname{sh} h \operatorname{ch} h + \chi (\operatorname{sh}^2 h - h^2)) - 4\alpha h^2 c_{\perp+}^2 - c_{\perp-}^2 (h + \operatorname{sh} h \operatorname{ch} h + \chi^{-1} (\operatorname{ch}^2 h + h^2)) = 0 \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) имеет два вещественных корня разных знаков  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ ).

На фиг. 3 штрихами отмечена зависимость  $\bar{\alpha}_{1,2}$  от  $h$  ( $\bar{\alpha}_1 \rightarrow -1$ ,  $\bar{\alpha}_2 \rightarrow 1$  при  $h \rightarrow +\infty$ ;  $\bar{\alpha}_1 \rightarrow -\infty$ ,  $\bar{\alpha}_2 \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow 0$ ). Если  $\alpha < \alpha_1$  или  $\alpha_2 < \alpha$ , то уравнение (6.4) имеет отрицательный корень  $q$ , а соответствующая равновесная конфигурация оказывается неустойчивой. Заметим, что в отличие от п. 5 вопрос об устойчивости не зависит от  $p_+$ .

Фиг. 3 показывает, что если не выполняются необходимые условия локальной устойчивости п. 2, то при любой фиксированной длине возмущений с увеличением толщины когерентного зародыша система всегда теряет устойчивость.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринфельд М. А. Асимптотика малой разности плотностей в проблеме когерентных фазовых превращений // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 582—592.
2. Гринфельд М. А. Лазарев М. П. О достаточных условиях неустойчивости когерентных межфазных границ // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 4. С. 836—840.
3. Гринфельд М. А. Устойчивость гетерогенного равновесия в системах, содержащих твердые упругие фазы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 4. С. 836—840.
4. Гринфельд М. А. Устойчивость межфазных границ в твердых упругих средах // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 628—637.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Главная ред. общетехн. лит. и номогр., ОНТИ. 1935. 674 с.
6. Гринфельд М. А. Неустойчивость границы раздела между негидростатически напряженным упругим телом и расплавом // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1358—1363.

Москва

Поступила в редакцию  
18.IV.1988