Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 2, 1989

УДК 539.3

И. Н. Кандоба

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача определения формы односвязного поперечного сечения упругого однородного призматического стержня, обладающего максимальной крутильной жесткостью. При этом поперечное сечение должно принадлежать некоторому заданному в двумерном евклидовом пространстве множеству и на его площадь накладывается традиционное изопериметрическое ограничение. Для вычисления искомой формы предлагается метод последовательных приближений. За каждое последующее приближение принимается линия уровня решения некоторой краевой задачи на специальным образом построенной из предыдущего приближения области.

Пусть в евклидовом пространстве R^2 задано ограниченное замкнутое множество D. Обозначим O множество всех односвязных открытых областей G из R^2, принадлежащих множеству D. Для каждой области G из O, ограниченной замкнутой жордановой кривой Γ, $U(\Gamma;\, p)$ — решение следующей краевой задачи (Δ — оператор Лапласа):

$$-\Delta U(\Gamma;\, p) = 1,\ p \in G;\ U(\Gamma;\, p) = 0,\ p \in \Gamma \tag{1}$$

Пусть заданы функционал $J(\Gamma) = \int_G U(\Gamma;\, p)\, dp$ и величина P: $\operatorname{mes}(D) > P > 0$, где $\operatorname{mes}(G)$ — лебегова мера области G. Требуется определить такой элемент G° из O (и его границу Γ°), что

$$J(\Gamma^\circ) = \sup\{J(\Gamma) \mid G \in O,\ \operatorname{mes}(G) = P\} \tag{2}$$

Известно [1, 2], что необходимым условием оптимальности контура Γ° является

$$\begin{gathered} |\nabla U(\Gamma^\circ;\, p)| = \lambda^2, \quad p \in \Gamma^\circ \setminus \partial D \\ |\nabla U(\Gamma^\circ;\, p)| \geqslant \lambda^2,\ p \in \Gamma^\circ \cap \partial D \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь λ — некоторая постоянная.

Отметим, что поставленная задача представляет интерес лишь в случае, когда множество D и величина P таковы, что D не содержит в себе область круговой формы меры P. В противном случае решение задачи (2) очевидно (см. [3]).

Введем обозначения

$$\begin{gathered} \bar G = G \cup \Gamma,\ c(\Gamma) = \max\{U(\Gamma;\, p) \mid p \in \bar G\} \\ I(\Gamma) = (0,\ c(\Gamma)),\ \Gamma_c = \{p \in G \mid U(\Gamma;\, p) = c\} \\ B(\Gamma) = \{\Gamma_c \mid c \in I(\Gamma)\} \end{gathered}$$

Теорема 1. Пусть G — некоторая область из O. Тогда для произвольного замкнутого жорданового контура $\Gamma^* \subseteq G$ и любого $c \in I(\Gamma)$ справедливо неравенство

$$J(\Gamma_c) - \int\limits_{R_c} \varphi^2(p)\, dp \geqslant J(\Gamma^*) - \int\limits_{R^*} \varphi^2(p)\, dp \tag{4}$$

$$R_c = \bar G_c \setminus G^*;\quad R^* = \bar G^* \setminus G_c;\quad \varphi(p) = |\nabla U(\Gamma;\, p)|,\quad p \in G$$

Здесь G_c и G^* — области, ограниченные контурами Γ_c и Γ^* соответственно.

При доказательстве теоремы будет использоваться методика, предложенная в [4]. Для произвольных $\alpha \leqslant \beta$ ($\alpha, \beta \in I(\Gamma)$) определим следующие множества:

$$S_{\beta-\alpha} = G_\alpha \diagdown G_\beta, \quad S^*_{\beta-\alpha} = G^* \cap S_{\beta-\alpha}$$
$$G^*_\alpha = G_\alpha \cap G^*, \quad l_\alpha = \Gamma^* \cap G_\alpha$$
$$\gamma_\alpha = \Gamma_\alpha \cap G^*, \quad \Gamma_\alpha{}^* = l_\alpha \cup \gamma_\alpha$$

Зафиксируем некоторое $c \in I(\Gamma)$.

Доказательство теоремы проведем в два этапа.

1°. Сначала докажем справедливость неравенства (4) при дополнительных предположениях относительно контуров Γ_c и Γ^*: а) $G_c \subset G^*$, б) Γ^* — непрерывно-дифференцируемая кривая, имеющая не более чем конечное число точек пересечения с любым контуром Γ_α, $\alpha \in I(\Gamma)$.

Обозначим $R_\alpha{}^* = G_\alpha{}^* \diagdown G_c$, где $\alpha \in I(\Gamma)$ (фиг. 1).

Введем вспомогательную функцию

$$\omega(\alpha) = J(\Gamma_\alpha{}^*) - \int\limits_{R_\alpha{}^*} \varphi^2(p)\,dp, \alpha \in (c^*, c)$$

$$c^* = \inf\{\alpha \in I(\Gamma) \,|\, G^* \subseteq G_\alpha\}$$

Видно, что

$$\omega(c^*) = J(\Gamma^*) - \int\limits_{R^*} \varphi^2(p)\,dp, \quad \omega(c) = J(\Gamma_c)$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $\omega(c) \geqslant \omega(c^*)$.

Покажем, что функция $\omega(\alpha)$ на интервале (c^*, c) монотонно возрастает. Для этого убедимся, что для произвольного $\alpha \in (c^*, c)$ при любом $\delta \in (0, c-\alpha)$ справедливо неравенство

$$\omega(\alpha+\delta) - \omega(\alpha) \geqslant o(\delta) \tag{5}$$

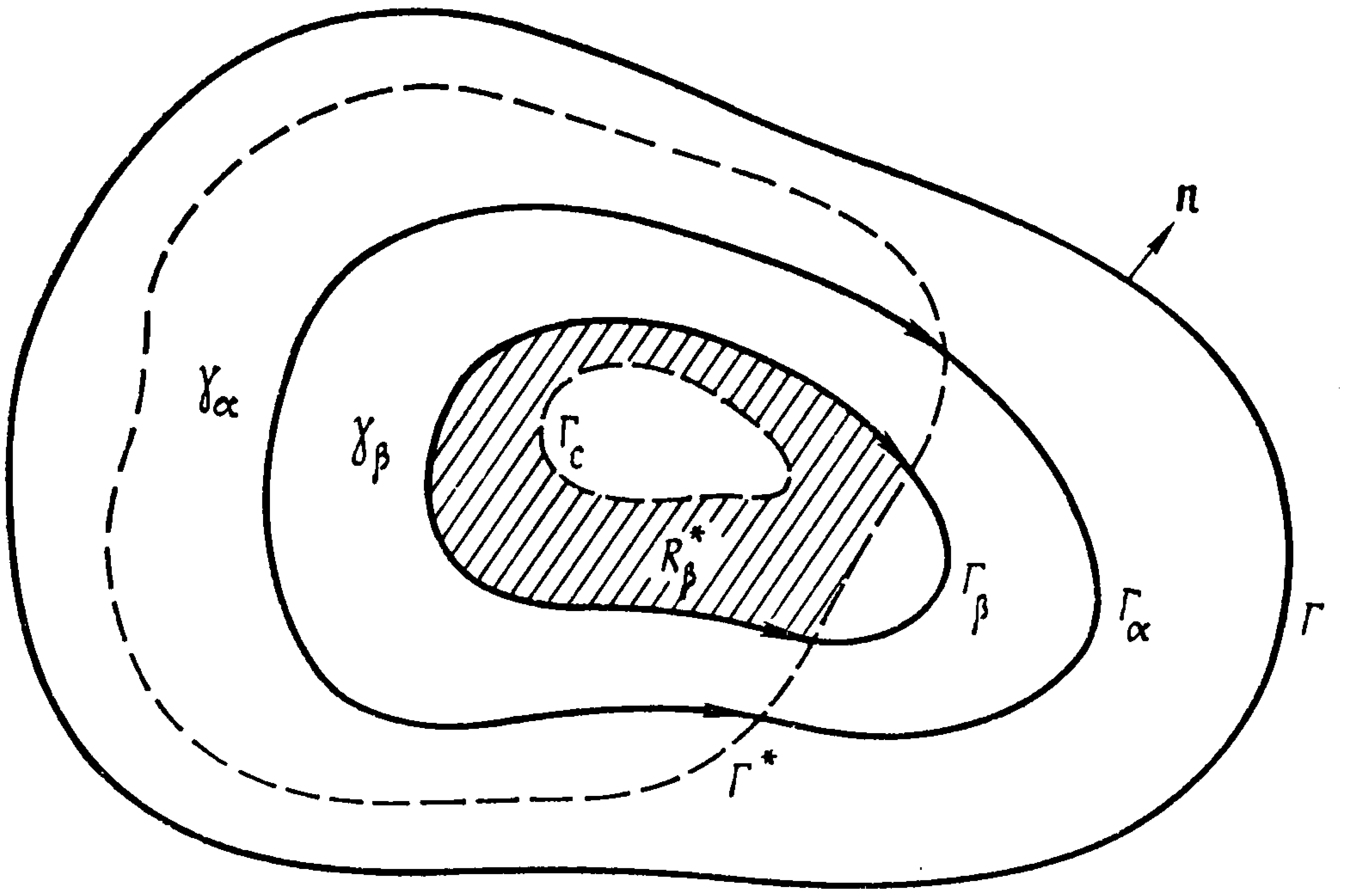
Рассмотрим равенство

$$\omega(\alpha+\delta) - \omega(\alpha) = A - B - C$$
$$A = \int\limits_{S_\delta{}^*} \varphi^2(p)\,dp, \quad B = \int\limits_{G^*_{\alpha+\delta}} V(\Gamma^*_{\alpha+\delta}; p)\,dp$$
$$C = \int\limits_{S_\delta{}^*} U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,dp, \quad S_\delta{}^* = S_\alpha{}^* \diagdown \overline{S^*_{\alpha+\delta}}$$
$$V(\Gamma^*_{\alpha+\delta}; p) = U(\Gamma_\alpha{}^*; p) - U(\Gamma^*_{\alpha+\delta}; p)$$

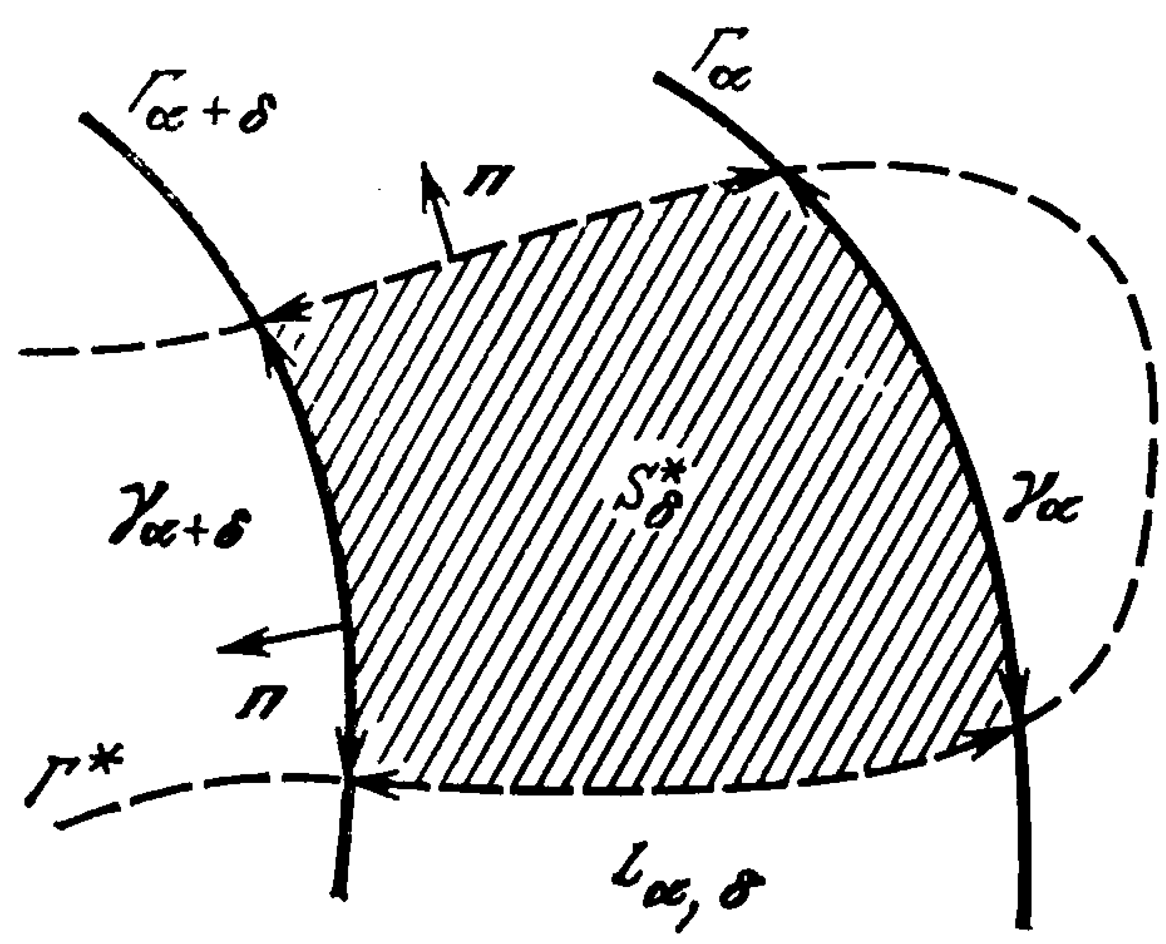
Воспользовавшись формулой Грина, сделаем следующие преобразования (интегрирование по l ведется по множеству $\gamma_{\alpha+\delta}$):

$$B = -\int\limits_{G^*_{\alpha+\delta}} V(\Gamma^*_{\alpha+\delta}; p)\,\Delta U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,dp = \int U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,D_n V(\Gamma^*_{\alpha+\delta}; p)\,dl -$$
$$- \int U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,D_n U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,dl = \int U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,D_n(U(\Gamma^*_\alpha; p) - U(\Gamma^*_{\alpha+\delta}; p))\,dl -$$
$$- \int U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,D_n U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,dl = \int |\nabla U(\Gamma^*_{\alpha+\delta}; p)|\,U(\Gamma_\alpha{}^*; p)\,dl$$

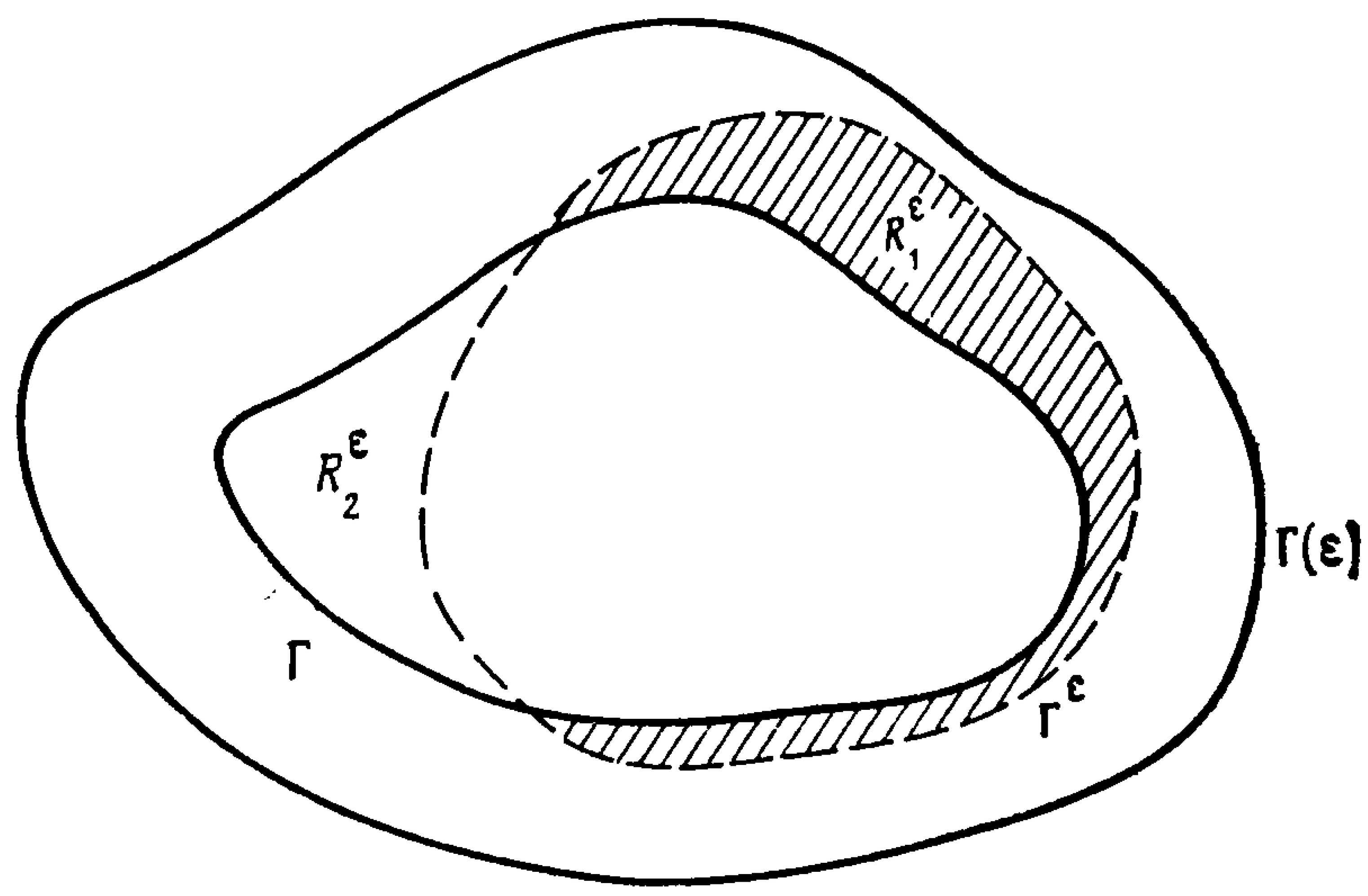
Здесь D_n — производная по направлению внешней нормали к соответствующему контуру. Поскольку $U(\Gamma; p) \geqslant 0$ в G [5], то из принципа максимума для гармонических функций следует, что для любых $\alpha \in (c^*, c)$ и $p \in G_\alpha{}^* \cup \gamma_\alpha$ справедливо неравенство $U(\Gamma_\alpha; p) \geqslant U(\Gamma_\alpha{}^*; p)$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

При этом, очевидно

$$U(\Gamma_\alpha;\ p) = U(\Gamma;\ p) - \alpha \tag{6}$$

Отсюда следует, что для любых $\alpha \in (c^*, c)$ и $p \in \gamma_\alpha$ выполняется неравенство $|\nabla U(\Gamma_\alpha;\ p)| \geqslant |\nabla U(\Gamma_{\alpha^*};\ p)|$. Следовательно

$$\begin{gathered} \omega(\alpha+\delta) - \omega(\alpha) \geqslant A - D - E \\ D = \int\limits_{S_{\delta^*}} U(\Gamma_\alpha; p)\, dp,\ E = \int\limits_{\gamma_{\alpha+\delta}} |\nabla U(\Gamma; p)|\, U(\Gamma_\alpha; p)\, dp \end{gathered} \tag{7}$$

По формуле Грина с учетом (1), (2) и (6) имеем (фиг. 2)

$$\begin{gathered} D = A - E - F \\ F = \int\limits_{l_{\alpha,\delta}} U(\Gamma_\alpha; p)\, D_n U(\Gamma; p)\, dl,\ l_{\alpha,\delta} = l_\alpha \diagdown \bar{l}_{\alpha+\delta} \end{gathered} \tag{8}$$

Подставив равенство (8) в условие (7), получаем

$$\omega(\alpha+\delta) - \omega(\alpha) \geqslant F \geqslant -\delta H, \quad H = \int\limits_{l_{\alpha,\delta}} |\nabla U(\Gamma; p)|\, dl$$

так как в силу равенства (6) и по определению Γ_α ($\alpha \in I(\Gamma)$) на $l_{\alpha,\delta}$ справедливо неравенство $0 < U(\Gamma_\alpha;\ p) < \delta$.

Вычислим

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\{\delta H\} = \lim_{\delta\to 0} H \leqslant M \lim_{\delta\to 0} \operatorname{len} l_{\alpha,\delta} \\ 0 \leqslant M \leqslant \max\{|\nabla U(\Gamma; p)|\ |\ p \in \bar{G}_{c^*}\} \end{gathered}$$

(len $l_{\alpha,\delta}$ — длина $l_{\alpha,\delta}$). В силу условия б) окончательно получаем $\lim \operatorname{len} l_{\alpha,\delta} = 0$ при $\delta \to 0$. Следовательно, справедливо неравенство (5), что и требовалось доказать.

2°. При общих предположениях, сделанных в теореме, можно выбрать такую последовательность областей $\{G_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, что при любом k контур Γ_k^*, ограничивающий область G_k^* из этой последовательности, удовлетворяет условию б) и при этом $\lim J(\Gamma_k^*) = J(\Gamma^*)$ при $k \to \infty$. Таким образом можно исключить ограничение б), сделанное на первом этапе доказательства теоремы. С другой стороны, можно убедиться, что для любого $\alpha \in I(\Gamma)$: $\alpha \leqslant c$ справедливо равенство

$$J(\Gamma_\alpha) = J(\Gamma_c) + \int\limits_{S_{c-\alpha}} \varphi^2(p)\, dp$$

Откуда и следует утверждение теоремы для контура Γ_α.

Под ε-окрестностью области G из O будет пониматься область

$$G(\varepsilon) = \bigcup_{p\in\bar{G}} B(p,\varepsilon), \quad B(p,\varepsilon) = \{q \in R^2 \mid |p-q| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

Везде в дальнейшем $\Gamma(\varepsilon)$ — граница области $G(\varepsilon)$. Рассмотрим некоторую область G из O. Пусть контур Γ имеет ограниченную кривизну $0 < \varkappa < \infty$, где $\varkappa = \varkappa(\Gamma) = \max\{\varkappa(\Gamma; p) \mid p \in \Gamma\}$; $\varkappa(\Gamma; p)$ — кривизна контура Γ в точке p. Пусть $\varepsilon(\Gamma) = 1/\varkappa(\Gamma)$.

В этом случае для области G на $(0, \varepsilon(\Gamma)]$ определим следующую функцию (фиг. 3):

$$F(\Gamma;\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\int\limits_{R_1^\varepsilon} U^2(\varepsilon;p)\,dp - \int\limits_{R_2^\varepsilon} U^2(\varepsilon;q)\,dq\right\}$$

$$U(\varepsilon;p) = U(\Gamma(\varepsilon);p); \quad R_1^\varepsilon = G^\varepsilon \setminus \bar{G}, \quad R_2^\varepsilon = G \setminus \overline{G^\varepsilon}$$

$$G^\varepsilon \in O : \Gamma^\varepsilon \in B(\Gamma(\varepsilon)), \quad \operatorname{mes} G^\varepsilon = \operatorname{mes} G$$

Видно, что $F(\Gamma;\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\Gamma)]$.

Теорема 2. Пусть область G из O удовлетворяет следующим условиям: а) $\operatorname{mes} G = P$, б) контур $\Gamma \in C^1$ и имеет ограниченную кривизну $\varkappa$, в) $F(\Gamma;\varepsilon) \geqslant C\varepsilon$, $C > 0$, г) существует такое $\delta(\Gamma) \in (0, \varepsilon(\Gamma)]$, что для любого $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \delta(\Gamma)$ кривая Γ^ε — односвязный контур. Тогда существует такое $0 < \varepsilon_0 \leqslant \delta(\Gamma)$, что для любого $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ справедливо неравенство

$$J(\Gamma^\varepsilon) > J(\Gamma)$$

Прежде чем переходить к доказательству, сделаем некоторые предварительные замечания: во-первых, для каждой области G из O и любого $Q < \operatorname{mes} G$ существует $c \in I(\Gamma)$: $\operatorname{mes}(G_c) = Q$ [6]; во-вторых, по определению $\varepsilon(\Gamma)$, $G(\varepsilon) \in O$, $\forall \varepsilon \in (0, \delta(\Gamma)]$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in (0, \delta(\Gamma)]$. В силу сказанного выше существует $c(\varepsilon) \in I(\Gamma(\varepsilon))$, такое, что $\operatorname{mes} G_{c(\varepsilon)} = P$, и в силу теоремы 1 справедливо неравенство

$$J(\Gamma^\varepsilon) - \Phi_1 \geqslant J(\Gamma) - \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \int\limits_{R_1^\varepsilon} \varphi^2(\varepsilon;p)\,dp, \quad \Phi_2 = \int\limits_{R_2^\varepsilon} \varphi^2(\varepsilon;p)\,dp$$

$$\varphi(\varepsilon;\ p) = |\nabla U(\varepsilon;\ p)|, \quad p \in G(\varepsilon)$$

Определим вспомогательную функцию $\Phi(\Gamma;\varepsilon) = \Phi_1 - \Phi_2$. Отметим некоторые ее свойства: 1) $\Phi(\Gamma; 0) = 0$ для любой области $G \in O$, 2) функция $\Phi(\Gamma;\varepsilon)$ непрерывна по ε на $(0, \delta(\Gamma))$ (см. [7]).

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\Phi(\Gamma;\ \varepsilon) - \Phi(\Gamma;\ 0) = \Phi(\Gamma;\ \varepsilon) > 0 \tag{9}$$

Рассмотрим произвольную точку p^* из R_1^ε. По определению $\varepsilon(\Gamma)$ и $\Gamma(\varepsilon)$, для точки p^* на контурах Γ и $\Gamma(\varepsilon)$ могут быть заданы точки p_1 и p_2 соответственно так, что p^* лежит на отрезке $L(p_1,\ p_2)$, соединяющем p_1 и p_2. И при этом отрезок $L(p_1,\ p_2)$ перпендикулярен кривым Γ и $\Gamma(\varepsilon)$ в соответствующих им точках.

По формуле конечных приращений получаем

$$U(\varepsilon;\ p^*) = (\nabla U(\varepsilon;\ p_0),\ p_1 - p_2)\ |\ p^* - p_2\ |,\quad p_0 \in L(p_1,\ p_2)$$

Отсюда в силу непрерывности $\varphi(\varepsilon;\ p)$ в $G(\varepsilon)$ имеем

$$U(\varepsilon;\ p^*) = (\varphi(\varepsilon;\ p^*) + \psi(\varepsilon;\ p^*))\ |\ p^* - p_2\ |$$

Здесь $\psi(\varepsilon;\ p)$ — некоторая непрерывная по p в $M(\varepsilon)$ функция, где $M(\varepsilon) = \overline{(G(\varepsilon) \setminus G) \cup R_2^\varepsilon}$, причем $\psi(\varepsilon_i;\ p_i) \to 0$ при $i \to \infty$ для любых последовательностей $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{p_i\}_{i=1}^\infty$, таких, что $p_i \in M(\varepsilon_i)$ и $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Далее, по определению R_1^ε справедливо неравенство

$$U^2(\varepsilon;\ p^*) < \varepsilon^2(\varphi^2(\varepsilon;\ p^*) + \sigma(\varepsilon;\ p^*))$$

$$\sigma(\varepsilon;\ p) = 2\varphi(\varepsilon;\ p)\psi(\varepsilon;\ p) + \psi^2(\varepsilon;\ p)$$

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости оценки $U^2(\varepsilon;\ q^*) > \varepsilon^2(\varphi^2(\varepsilon;\ q^*) + \sigma(\varepsilon;\ q^*))$, где q^* — произвольная точка из R_2^ε.

В итоге имеем

$$\varepsilon^2 F(\Gamma;\ \varepsilon) < \varepsilon^2\Phi(\Gamma;\ \varepsilon) + \varepsilon^3 K(\Gamma;\ \varepsilon)\ \mathrm{len}\ \Gamma$$

$$K(\Gamma;\ \varepsilon) = \max\{\sigma(\varepsilon;\ p)\ |\ p \in M(\varepsilon)\} - \min\{\sigma(\varepsilon;\ q)\ |\ q \in M(\varepsilon)\}$$

Отсюда $\Phi(\Gamma;\ \varepsilon) > (C - K(\Gamma;\ \varepsilon)\ \mathrm{len}\ \Gamma)\ \varepsilon$. При этом очевидно, что $K(\Gamma;\ \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, откуда и следует неравенство (9).

Можно отметить, что условие г) теоремы выполняется, по крайней мере, для областей, на границе которых модуль градиента решения задачи (I) больше нуля. Что касается условия в), то есть гипотеза, что оно справедливо для областей, не удовлетворяющих условию (3).

На основе теорем 1 и 2 предлагается следующий численный алгоритм построения максимизирующей последовательности областей $\{G_k\}_{k=0}^\infty$ в задаче (2).

1) Начальная область G_0 может быть выбрана из интуитивных соображений. Однако целесообразно, чтобы при этом $\rho(D;\ G_0) > 0$. Здесь $\rho(D;\ G) = \min\{d(q,\ \Gamma)\ |\ q \in \partial D\}$, где $d(q,\ \Gamma) = \min\{|\ q - p\ |\ |\ p \in \Gamma\}$.

2) В качестве очередного члена последовательности полагается область $G_k = G^{\varepsilon_{k-1}}$, где $\Gamma_k = \Gamma^{\varepsilon_{k-1}} \in B(\Gamma_{k-1}(\varepsilon_{k-1}))$.

3) Проверяется условие конца вычислений

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{mes}\ (\delta G_k) < \delta P \quad \text{или} \\ G_k : \forall \varepsilon_k > 0\ \ \bar{G}_{k+1} \cap (R^2 \setminus D) \neq \varnothing \end{array}\right\} \tag{10}$$

где $\delta G_k = (G_k \setminus G_{k-1}) \cup (G_{k-1} \setminus G_k)$; $\delta P > 0$ — некоторая заранее заданная величина.

4) В случае невыполнения условия (10) выбирается величина $0 < \varepsilon_k < \delta(\Gamma_k)$ так, чтобы а) $\Phi(\Gamma_k;\ \varepsilon_k) > 0$; б) $G_{k+1} \subset D$ и осуществляется переход на 2).

В алгоритме предполагается, что все области G_k удовлетворяют ограничениям теоремы 2.

Отметим, что изложенный алгоритм родственен численному методу, рассмотренному [8] применительно к задаче минимизации теплового потока.

Численное моделирование показывает, что вдоль построенной указанным выше способом последовательности областей действительно происходит улучшение функционала качества J. При этом наблюдается монотонное убывание величин $\rho(D; G_k)$ к нулю и уменьшение невязки модуля градиента решения задачи (1) на границе каждой последующей области. Если же ограничение $G \subset D$ не существенно, то наблюдается сходимость последовательности $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$ к кругу. Описанный метод применим и к некоторым родственным задачам (оптимизация двусвязного сечения [9], минимизация теплового потока [4, 10]).

В литературе основное внимание уделялось методам оптимизации в задачах без ограничений типа включения $G \subset D$ на форму поперечного сечения стержня. Некоторые из таких алгоритмов изложены, например, в [1, 2, 9].

Следует отметить, что рассматриваемые в [1, 2, 9] численные методы явно используют необходимое условие оптимальности (3); повышение точности приближения к оптимальному контуру связано либо с увеличением размерности решаемой в [2, 9] нелинейной системы алгебраических уравнений, либо с необходимостью в [1] рассматривать все более сложные краевые задачи; при наличии ограничений типа $G \subset D$ на форму поперечного сечения стержня применимость указанных методов представляется проблематичной.

Автор благодарит Ю. С. Осипова за постановку задачи и внимание к работе, А. П. Суетова — за обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
2. *Куршин Л. М.* К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 3. С. 585—588.
3. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
4. *Acker A.* Heat flow inequalities with applications to heat flow optimizations problems // SIAM J. Math. Anal. 1977. V. 8. № 4. P. 604—618.
5. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
7. *Крейн Г.* Поведение решений эллиптических задач при вариации области // Stud. mat. 1968. V. 31. № 4. P. 411—424.
8. *Acker A.* Free boundary optimization. A constructive iterative method // Z. angew. Math. and Phys. 1979. V. 30. № 6. P. 885—900.
9. *Куршин Л. М., Оноприенко П. Н.* Определение форм двусвязных сечений стержней максимальной крутильной жесткости // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1078—1084.
10. *Волков М. А.* Численное решение одной задачи оптимизации с неизвестной границей // Вестн. МГУ. Сер. Вычисл. математика и кибернетика. 1984. № 3. С. 13—18.

Свердловск

Поступила в редакцию
18.VII.1988